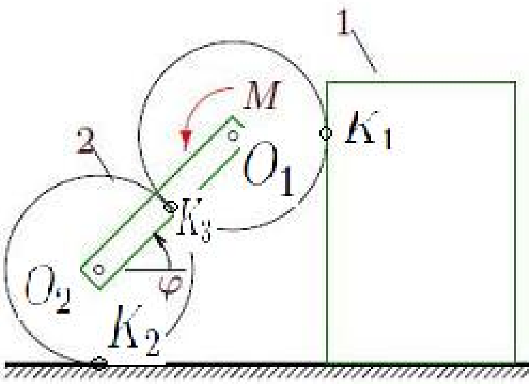
Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода

5 июля 2009 г.



Оси цилиндров соединены спарником. Верхний цилиндр катится без проскальзывания по боковой грани параллелепипеда массой m_1, скользящего по горизонтальной плоскости. Нижний цилиндр находится в зацеплении с верхним и катится по горизонтальной плоскости. Радиусы цилиндров R. Масса нижнего цилиндра m_2. К верхнему цилиндру приложен момент M. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота спарника φ.

1 Уравнение Лагранжа

Уравнение Лагранжа второго рода для заданной системы имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \tag{1}$$

Обобщённую силу будем искать как сумму вкладов консервативных и неконсервативных сил. Соответственно,

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + \widetilde{Q}.$$

2 Механическая энергия системы

2.1 Кинетическая энергия

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = T_1 + T_2, T_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2, T_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{4}m_2 r^2 \omega_2^2 \tag{2}$$

Выразим линейные и угловые скорости через обобщённые координаты. Для этого рассмотрим графы:

$$K_2 \xrightarrow{\frac{\pi}{2}, R} O_2$$

$$\begin{cases} v_{O_2x} = -\omega_2 R \sin\frac{\pi}{2}, \\ v_{O_2y} = \omega_2 R \cos\frac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{3}$$

$$O_2 \xrightarrow{\varphi, 2R} O_1$$

$$\begin{cases} v_{O_1x} = -2R\dot{\varphi}\sin\varphi + v_{O_2x}, \\ v_{O_1y} = 2R\dot{\varphi}\cos\varphi + v_{O_2y}. \end{cases} \tag{4}$$

$$O_1 \xrightarrow{0, R} K_1$$

$$\begin{cases} v_{K_1x} = v_{O_1x}, \\ 0 = v_{O_1y} + R\omega_1 \cos 0. \end{cases} \tag{5}$$

$$O_2 \xrightarrow{\varphi, R} K_3$$

$$\begin{cases} v_{K_3x} = v_{O_2x} - R\omega_2 \sin\varphi, \\ v_{K_3y} = v_{O_2y} + R\omega_2 \cos\varphi. \end{cases} \tag{6}$$

$$O_1 \xrightarrow{\pi+\varphi, R} K_3$$

$$\begin{cases} v_{K_3x} = v_{O_1x} - \omega_1 R \sin(\varphi + \pi), \\ v_{K_3x} = v_{O_1y} + \omega_1 R \cos(\varphi + \pi). \end{cases} \tag{7}$$

Получим:

$$\begin{cases} v_{2y} = 0, \\ \omega_2 = 2\omega + 2\omega\cos\varphi, \\ \omega_1 = -2\omega\cos\varphi, \\ v_{2x} = -2R\omega - 2R\omega\cos\varphi, \\ v_{1x} = -2R\omega - 2R\omega\cos\varphi - 2R\omega\sin\varphi, \\ v_{1y} = 2R\omega\cos\varphi, \\ v_{K_1x} = -2R\omega - 2R\omega\cos\varphi - 2R\omega\sin\varphi, \\ v_{K_3x} = -2R\omega - 2R\omega\cos\varphi - 2R\omega\sin\varphi, \\ v_{K_3y} = 2R\omega\cos\varphi + 2R\omega\cos^2\varphi. \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} v_1^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2, \\ v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2. \end{cases} \tag{9}$$

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}m_1(-2R\omega - 2R\omega\cos\varphi)^2 + \frac{1}{2}m_2(-2R\omega - 2R\omega\cos\varphi)^2 + \frac{1}{4}m_2R^2(2\omega + 2\omega\cos\varphi)^2. \tag{10}$$

Мощность неконсервативных сил:

$$N = (\vec{M}, \vec{\omega_1}) = -2M\omega\cos\varphi$$

В итоге вид обощённой силы:

$$Q = -2M\cos\varphi \tag{11}$$

3 Уравнения Лагранжа

Представим кинетическую энергию в виде

$$T = f(\varphi)\omega^2 \tag{12}$$

Подставим это в 1:

$$2f(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{df(\varphi)}{d\varphi}\dot{\varphi}^2 = -2M\cos\varphi. \tag{13}$$

Где

$$f(\varphi) = 2m_1R^2(1 + \cos\varphi + \sin\varphi)^2 + 3m_2R^2(1 + \cos^2\varphi)^2 \tag{14}$$

$$\frac{df(\varphi)}{d\varphi} = 4m_1R^2(1+\cos\varphi+\sin\varphi)(\cos\varphi-\sin\varphi)+6m_2r^2(1+\cos^2\varphi)\sin 2\varphi. \tag{15}$$