

1 Упругий эквивалент

Рассмотрим конкретный пример. Найдем упругий эквивалент 2-го порядка среды

$$\dot{p}e^{kp/\sigma} = A \quad (1)$$

при постоянных напряжениях ($\dot{\sigma} = 0$). Пусть $k = 1$ МПа, $A = 1/c$.

$$\dot{p}e^{p/\sigma} = 1 \quad (2)$$

Проварьируем (2)

$$\sigma^2 \Delta \dot{p} + \dot{p}(\sigma \Delta p - p \Delta \sigma) = 0 \quad (3)$$

Дифференцируем (3)

$$\sigma^2 \Delta \ddot{p} + \ddot{p}(\sigma \Delta p - p \Delta \sigma) + \dot{p}(\sigma \Delta \dot{p} - \dot{p} \Delta \sigma - p \Delta \dot{\sigma}) = 0 \quad (4)$$

Подставим соотношения $\Delta \sigma = \Delta p$, $\Delta \dot{\sigma} = \Delta \dot{p}$ в систему (3-4) и запишем ее в матричной форме, выделив в правую часть возмущение ускорения

$$B \bar{X} = \Delta \ddot{p} \bar{Y}$$

где

$$\bar{X} = \begin{vmatrix} \Delta p \\ \Delta \dot{p} \end{vmatrix}, \quad \bar{Y} = \begin{vmatrix} 0 \\ \sigma^2 \end{vmatrix}$$

С учетом соотношения $\ddot{p} = -\dot{p}^2/\sigma$, следующего из (2) при постоянных напряжениях, матрица системы имеет вид

$$B = \begin{vmatrix} \dot{p}(\sigma - pG) & \sigma^2 \\ -(\dot{p}^2/\sigma)(\sigma - pG) - \dot{p}^2 G & \dot{p}(\sigma - pG) \end{vmatrix}$$

Приравнивая определитель B к нулю, получим уравнение

$$G^2 p^2 + G(\sigma - 3p)\sigma + 2\sigma^2 = 0$$

Решение уравнения дает выражения для модулей упругого эквивалента

$$G = \sigma \frac{3p - \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 6\sigma p + p^2}}{2p^2}$$

Задачи

1. $\dot{p}p/(2-p) = A(3\sigma^3 - \sigma)$,
 $p = 1.05, \sigma = 2.$

2. $\dot{p}p/(2-p) = A \operatorname{sh}(2\sigma)$, $p = 0.95$,
 $\sigma = 2.$

3. $\dot{p} \operatorname{sh}(16p) = Ae^{2\sigma}$, $p = 0.4.$

4. $\dot{p}e^{16p} = Ae^{2\sigma}.$

5. $\dot{p}pe^{7p} = A \operatorname{sh}(2\sigma)$, $p = 0.2$,
 $\sigma = 3.$

6. $\dot{p} \operatorname{sh}(8p) = A \operatorname{sh}(2\sigma)$, $p = 0.4$,
 $\sigma = 3.$

7. $\dot{p}p^7 = A\sigma^8$, $p = 0.4, \sigma = 4.$

8. $\dot{p}e^{8p} = A\sigma/(7 - \sigma)$, $\sigma = 4.$

Ответы

	G_{*1}	G_{*2}		G_{*1}	G_{*2}
1	2.5807	1.2001	2	1.9508	1.0547
3	16.0000	8.0000	4	16.0000	8.0000
5	10.6582	7.3416	6	8.0000	4.0000
7	15.9891	10.2609	8	27.4286	13.7143