Механизм с муфтой

В указанном положении механизма определить скорость и ускорение муфты B относительно стержня, по которому она движется. Стержень OC вертикальный, стержни CD и DA в данный момент горизонтальные. Дано: $AD = 3$ см, $CD = 6$ см, $OB = 5$ см, $\omega_{ADz} = 6$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{ADz} = -2$ с$^{-2}$. Найти скорость и ускорение муфты относительно стержня CD.

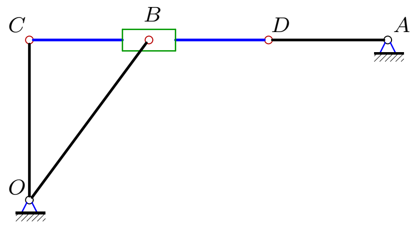

Рис. 1

Решение

Пронумеруем стержни: AD — 1, CD — 2, OC — 3. Таким образом, даны угловая скорость $\omega_{1z} = 6$ с$^{-1}$ и угловое ускорение $\varepsilon_{1z} = -2$ с$^{-2}$. Движение муфты представим как сложное, состоящее из относительного скольжения муфты по стержню CD с искомой скоростью и искомым ускорением и переносного движения стержня CD. Абсолютное движение — движение по окружности на конце стержня OB.

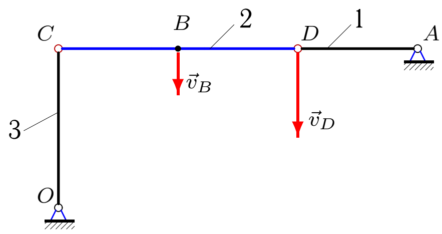

Рис. 2

1. **Скорость.** Найдем переносную скорость. Мысленно снимем муфту и уберем уже не нужный стержень OB (рис. 2). Вычислим скорость середины стержня CD, т.е. той точки, в которой в данный момент находится муфта. Механизм $OCDA$ — это стандартный, причем достаточно простой четырехзвенник. В общем случае, чтобы найти искомую скорость, надо сначала найти угловую скорость стержня CD, пользуясь, например, уравнениями трех угловых скоростей

$$\begin{aligned} &(x_O - x_C)\omega_{3z} + (x_C - x_D)\omega_{2z} + (x_D - x_A)\omega_{1z} = 0, \\ &(y_O - y_C)\omega_{3z} + (y_C - y_D)\omega_{2z} + (y_D - y_A)\omega_{1z} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

из которых по известной угловой скорости звена 1 и координатам точек легко найти угловые скорости звеньев 2 и 3. Вектор скорости точки C перпендикулярен OC и равен по модулю $\omega_3 OC$. Скорость точки D находим еще до составления уравнений трех угловых скоростей, так как стержень AD совершает вращательное движение с известной угловой скоростью $v_D = \omega_1 AD$. Зная скорости точек C и D и помня, что концы векторов скоростей неизменяемого отрезка лежат на одной прямой, компоненты переносной скорости находим по формуле

$$v_{Bx} = (v_{Cx} + v_{Dx})/2,$$
$$v_{By} = (v_{Cy} + v_{Dy})/2.$$

Однако, здесь можно поступить значительно проще, используя метод МЦС (мгновенного центра скоростей). В указанном положении механизма МЦС стержня CD лежит в точке C (на пересечении перпендикуляров к скоростям точек C и D). Следовательно, скорость C равна нулю. Отсюда $\vec{v}_B$ перпендикулярен CD и вдвое меньше скорости $\vec{v}_D$. Так как $v_D = \omega_1 AD = 18$ см/с, то переносная скорость найдена

$$v_e = v_D/2 = 18/2 = 9 \text{ см/с},$$

а угловая скорость переносного движения (она пригодится еще при вычислении переносного ускорения и ускорения Кориолиса) $\omega_2 = v_D/CD = 3$ с$^{-1}$ или, так как вращение происходит по часовой стрелке, $\omega_{2z} = -3$ с$^{-1}$. Заметим, что если использовать уравнения (1), то для определения знака угловой скорости не потребовались дополнительные рассуждения о направлении вращения — все получается автоматически. Аналогичное преимущество имеют и уравнения кинематических графов.

Основная формула теории сложного движения точки для скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r,$$

где $\vec{v}$ — абсолютная скорость, $\vec{v}_e$ — переносная, $\vec{v}_r$ — относительная скорость. Проецируя это векторное равенство на оси координат (горизонтальную x и вертикальную y), получаем (рис. 3)

$$v_x = v_{ex} + v_{rx}$$
$$v_y = v_{ey} + v_{ry}.$$

или

$$v \sin\alpha = v_r,$$
$$-v \cos\alpha = -v_e.$$

Отсюда находим абсолютную скорость $v = v_e/\cos\alpha = 9/0.6 = 15$ см/c, относительную скорость $v_r = v\sin\alpha = v_e \operatorname{tg}\alpha = 12$ см/c.

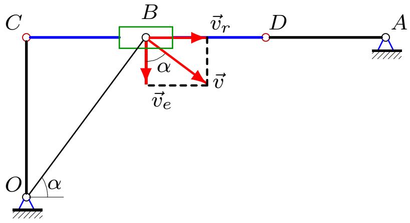

Рис. 3

2. **Ускорение.** Найдем переносное ускорение. Ускорение точки D состоит из двух компонент: нормальной $a_D^n = \omega_1^2 AD = 108$ см/с^2 и вращательной $a_D^\tau = \varepsilon_1 AD = 6$ см/с^2 (рис. 4). Воспользуемся формулой Ривальса, взяв точку D за полюс

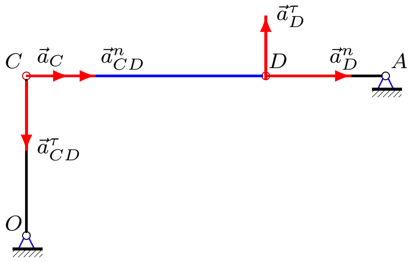

Рис. 4

$$\vec{a}_C = \vec{a}_D^n + \vec{a}_D^\tau + \vec{a}_{CD}^\tau + \vec{a}_{CD}^n, \tag{2}$$

где $a_{CD}^n = \omega_2^2 CD = 9 \cdot 6 = 54$ см/с^2. В проекциях на оси координат это уравнение примет вид

$$\begin{aligned} a_C &= a_D^n + a_{CD}^n, \\ 0 &= -a_{CD}^\tau + a_D^\tau. \end{aligned} \tag{3}$$

Из первого уравнения найдем $a_C = 54 + 108 = 162$ см/с^2, из второго $a_{CD}^\tau = 6$ см/с^2, откуда $\varepsilon_2 = 6/6 = 1$ с$^{-2}$, или $\varepsilon_{2z} = 1$ с$^{-2}$. Это же значение углового ускорения можно получить из уравнения трех угловых ускорений

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3}(x_i - x_{i+1})\varepsilon_{iz} - (y_i - y_{i+1})\omega_{iz}^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^{3}(y_i - y_{i+1})\varepsilon_{iz} + (x_i - x_{i+1})\omega_{iz}^2 = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где точки O, C, D, A имеют номера 1-4. Помещая начало координат в точку O, имеем следующие списки координат[1] $x = [0, 0, 6, 9]$, $y = [0, 4, 4, 4]$. Система (4) примет простой вид

$$\begin{aligned} -6\varepsilon_{2z} - 3\varepsilon_{1z} + 4\omega_3^2 = 0, \\ -4\varepsilon_{3z} - 6\omega_2^2 - 3\omega_1^2 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Так как $\omega_1 = 6$ с$^{-1}$, $\omega_2 = -\omega_1/2 = -3$ с$^{-1}$, $\omega_3 = 0$, $\varepsilon_{1z} = -2$ с$^{-2}$, то отсюда следует то же значение переносного углового ускорения $\varepsilon_{z2} = 1$ с$^{-2}$. Ускорения точек в проекциях на оси имеют вид $a_{Cx} = 162$ см/с^2, $a_{Cy} = 0$, $a_{Dx} = 108$ см/с^2, $a_{Dy} = 6$ см/с^2. Так как точка B стержня, где в данный момент располагается муфта, находится на середине отрезка CD, а концы векторов ускорений точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой (рис. 5) и делят ее на части, пропорциональные расстояниям между точками (в данном случае пополам), то переносное ускорение имеет

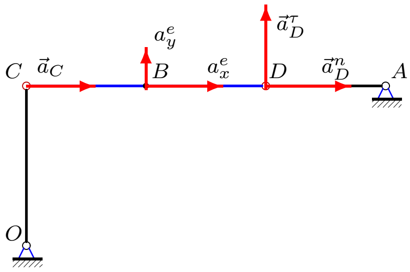

Рис. 5

следующие компоненты

$$\begin{aligned} a_x^e = (a_{Dx} + a_{Cx})/2 = 135 \text{ см/с}^2, \\ a_y^e = (a_{Dy} + a_{Cy})/2 = 3 \text{ см/с}^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Теорема сложения ускорений (теорема Кориолиса) выражается следующей векторной суммой (рис. 6)

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_K, \tag{7}$$

где $\vec{a}_r$ — искомое относительное ускорение, $\vec{a}_K = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ — ускорение Кориолиса. Вектор $\vec{a}_r$ направим условно направо:

[1] В системах компьютерной математики, где и предполагается решение, данные удобно вводить списками.

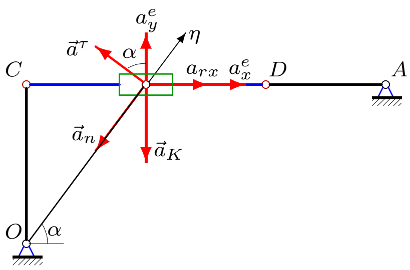

Рис. 6

Найдем компоненты вектора ускорения Кориолиса, раскрыв векторное произведение

$$\vec{a}_K = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{2z} \\ v_r & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отсюда получаем $a_{kx} = 0$, $a_{kz} = 0$, $a_{ky} = 2\omega_{2z}v_r = -2 \cdot 12 \cdot 3 = -72$ см/с^2. Вектор ускорения Кориолиса направлен вниз, что согласуется с правилом Жуковского[2].

Спроецируем (7) на ось η, направленную вверх вдоль стержня OB. Неизвестная вращательная компонента абсолютного ускорения $\vec{a}^\tau$ в полученное уравнение не войдет:

$$-a_n = a_{rx}\cos\alpha - a_K \sin\alpha + a_y^e \sin\alpha + a_x^e \cos\alpha. \tag{8}$$

Нормальная компонента абсолютного ускорения вычисляется по известной абсолютной скорости $v = 15$ см/с:

$$a_n = v^2/OB = 225/5 = 45 \text{ см/с}^2.$$

Из (8) получаем

$$a_{rx} = -118 \text{ см/с}^2.$$

3. Координатный способ решения задачи. Поместим начало координат в точку O, рис. 7. Изобразим механизм в некотором произвольном положении, введя угол, направляющий ведущий стержень AD. По условию задачи $\varphi = \pi + \omega t + \varepsilon t^2/2$. Расчетное положение соответствует $t = 0$.

[2]По правилу Жуковского надо повернуть вектор относительной скорости на 90 градусов по направлению переносного вращения, в данном случае — по часовой стрелке. Если вектор относительной скорости не лежит в плоскости, перпендикулярной $\vec{\omega}^e$, то сначала надо его спроецировать на эту плоскость, а потом уже поворачивать проекцию на 90 градусов.

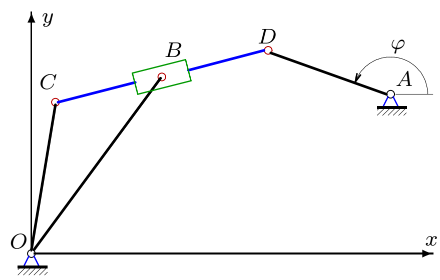

Рис. 7

Из системы уравнений

$$x_C^2 + y_C^2 = OC^2,$$
$$(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = CD^2,$$

где $x_D = x_A + AD\cos\varphi$, $y_D = Y_A + AD\sin\varphi$, определим функции $x_C(t)$, $y_C(t)$. Решение этой системы уравнений соответствует задаче определения координат точек пересечения двух окружностей — одной радиусом CD с центром в точке D, другой — радиусом OC с центром в начале координат. Очевидно, таких решений два, поэтому надо выбрать то, которое удовлетворяет условию задачи. На втором этапе решения задачи надо найти точку пересечения окружности радиуса OB с центром в начале координат с прямой, проходящей через точки C и D. Определим координаты точки B:

$$x_B^2 + y_B^2 = OB^2,$$
$$y_B = y_C + k(x_B - x_C),$$

где $k = (y_D - y_C)/(x_D - x_C)$ — тангенс угла наклона стержня CD. Эта система также имеет два решения, и здесь надо опять выбрать нужное. В итоге получаем расстояние между точками C и D как функцию времени

$$CB = S(t) = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}.$$

Относительные скорость и ускорение муфты получаются дифференцированием

$$v_r = dS/dt, \quad a_r = d^2S/dt^2.$$

Искомые величины вычисляем при $t = 0$: $v_r = v_r(0)$, $a_r = a_r(0)$.

Все преобразования рекомендуется проводить в какой-нибудь системе компьютерной математики, например, Maple[1]. Промежуточные результаты получаются весьма громоздкими (на нескольких страницах, вручную не стоит даже пытаться), и их не следует выводить на экран.

Литература

[1] *Кирсанов М.Н.* Практика программирования в системе Maple — М.: Издательский дом МЭИ, 2011. С. 208.