

УДК 624.04:004

М.Н. Кирсанов
НИУ “МЭИ”

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОГИБЕ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ В СИСТЕМЕ MAPLE

Аннотация. Получены выражения для прогиба статически определимой плоской балочной фермы под действием равномерно распределенной по нижнему поясу нагрузки в зависимости от числа панелей. Решетка фермы с нисходящими раскосами симметрична относительно середины. Для определения усилий в стержнях используется метод вырезания узлов. С помощью пакета компьютерной математики Maple решена система уравнений равновесия в символьной форме. При вычислении прогиба по формуле Максвелла—Мора учитываются разные жесткости стержней поясов и решетки. Для обобщения серии решений для ферм с различным числом панелей на случай произвольного числа панелей применен метод индукции и операторы для составления и решения рекуррентных уравнений системы Maple. В результате найдены некоторые предельные свойства решения.

Ключевые слова: ферма, точное решение, прогиб, индукция, Maple

DOI: 10.22227/2305-5502.2017.1.1

Аналитические решения задач строительной механики имеют не только теоретическое, но и практическое значение как для оценки проектируемых, так и для анализа эксплуатационных характеристик. Формулы для расчета плоских статически определимых ферм получены в работах [1–5], пространственных — в работах [6–9].

В рассматриваемой симметричной конструкции (рис. 1) число панелей в половине пролета четное $n = 2k$. Ферма статически определима, содержит $s = 4n + 5$ шарнирных узлов и $m = 8n + 4$ стержня, включая три стержня, моделирующие опоры. Нагрузка приложена к узлам нижнего пояса.

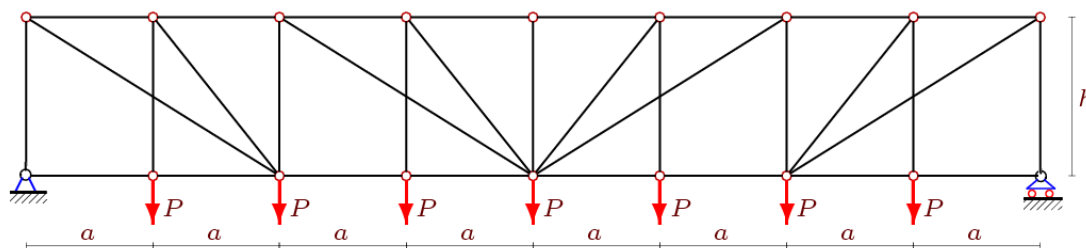


Рис. 1. Ферма при $k = 2$

M.N. Kirsanov
MPEI

EXACT SOLUTION OF THE PROBLEM OF DEFLECTION OF A TRUSS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS IN THE MAPLE SYSTEM

Abstract. This article presents the formulae derived for statically determinate flat truss under load evenly distributed in the lower boom depending on the number of panels. The truss lattice with lowering diagonals is symmetric with respect to the middle. In order to calculate the forces in the rods, method of joints is used. Simultaneous equations in symbol presentation were solved using the Maple computer mathematics software package. Different stiffness coefficients for boom and lattice rods are considered when calculating the deflection using Maxwell–Mohr formula. For the purpose of synthesis of a number of solutions for the trusses with different numbers of panels in case of arbitrary number of panels, the induction method and functions for creation and solution of recurrent equations in Maple system were used. As a result, some limit properties of solution were discovered.

Key words: truss, exact solution, deflection, induction, Maple

DOI: 10.22227/2305-5502.2017.1.1

Analytical solutions of the problems of the construction engineering possess not only theoretical, but practical value as well, both for assessment of design parameters, and for analysis of operational parameters. The formulae for calculation of flat statically determinate trusses were derived in papers [1–5], spatial — in [6–9].

The symmetrical structure being considered (fig. 1) features even number of panels in one half of the span $n = 2k$. The truss is statically determined, it contains $s = 4n + 5$ joint assemblies and $m = 8n + 4$ rods, including three rods simulating supports. The load is applied to the assemblies of the lower boom.

Fig. 1. Truss at $k = 2$

Усилия в стержнях фермы определяем, используя метод вырезания узлов. Прогиб вычисляем по формуле Максвелла—Мора

Forces in the truss rods shall be calculated by using method of joints. The deflection shall be calculated using Maxwell-Mohr formula.

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} \frac{S_i N_i l_i}{(EF_i)},$$

где S_i — усилия в стержнях фермы от действия внешней нагрузки; N_i — усилия в стержнях от действия единичной силы, приложенной к середине пролета; l_i — длины стержней; EF — жесткость стержней поясов и $EF_i = \mu EF$ — жесткость стержней решетки ($\mu < 1, i = 4n+1, \dots, m-3$. Три жесткие опорные стержня в сумму не входят, поэтому верхний предел суммирования равен $m-3$).

where S — forces in the truss rods caused by external load; N_i — forces in the rods caused by single force applied to the middle of the span; l_i — lengths of the rods; EF — stiffness coefficient of the boom rods, and $EF_i = \mu EF$ — stiffness factor of the lattice rods ($\mu < 1, i = 4n + 1, \dots, m - 3$. Three rigid support rods are not included in the total, therefore the upper sum limit is $m-3$).

На основе алгоритма [10], разработанного для системы компьютерной математики Maple, составляем уравнения равновесия и заполняем матрицу косинусов направляющих углов. Вводим данные о геометрии фермы, задаем координаты узлов. Сначала нумеруются нижние узлы фермы, затем — узлы верхнего пояса (рис. 2). Начало координат помещаем в левой неподвижной опоре.

Equilibrium equations are created and directional angle cosine matrix is filled on the basis of algorithm [10] developed for computer mathematics system Maple. We input the truss geometry data and set coordinates of the joints. First, the lower joints of the truss are numbered, then, the upper boom joints (Fig. 2). The zero of coordinate system shall be in the left static support.

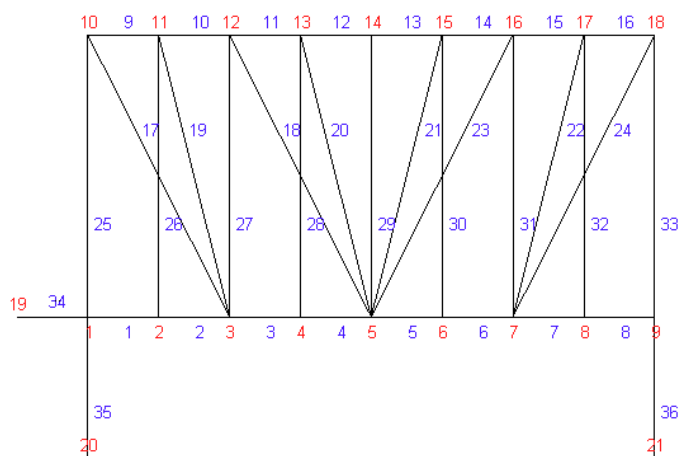


Рис. 2. Нумерация стержней и шарниров при $k = 2$

Fig. 2. Numbering of rods and joints at $k = 2$

Значения координат шарниров:

Values of the coordinates of the joints

$$x_i = x_{i+2n+1} = ia - a, \\ y_i = 0, y_{i+2n+1} = h, \quad i = 1, \dots, 2n+1.$$

Так как опорные стержни принимаются жесткими и в сумму формулы Максвелла—Мора не входят, их длины можно брать произвольными, например единичными:

As support rods are assumed to be rigid, and are not included in the sum of Maxwell-Mohr formula, their lengths are arbitrary, and can be assumed, for example, to be one:

$$x_{s-2} = -1, y_{s-2} = 0, x_{s-1} = 0, y_{s-1} = -1, x_s = 2na, y_s = -1.$$

Схему соединений стержней и шарниров решетки фермы зададим векторами \bar{N}_i , $i = 1, \dots, m$, соответствующими стержням. Компоненты этих векторов являются номерами шарниров по концам соответствующих стержней. Направления условных векторов произвольны и не связаны со знаками усилий в стержнях. Для стержней нижнего пояса имеем следующие векторы: $\bar{N}_i = [i, i + 1]$, верхнего — $\bar{N}_{i+2n} = [i + 2n + 1, i + 2n + 2]$, $i = 1, \dots, 2n$. Векторы стержней решетки кодируются векторами

$$\begin{aligned} \bar{N}_{i+4n} &= [2i + 1, 2i + 2n], \\ \bar{N}_{i+4n+k} &= [2i + 1, 2i + 2n + 1], \\ \bar{N}_{i+4n+2k} &= [2i + n - 1, 2i + 3n + 1], \\ \bar{N}_{i+4n+3k} &= [2i + n - 1, 2i + 3n + 2], \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Стойки соответствуют векторам $\bar{N}_{i+6n} = [i, i + 2n + 1]$, $i = 1, \dots, 2n + 1$.

Направляющие косинусы, входящие в уравнения узлов фермы, вычисляются через длины стержней и проекции их условных векторных представлений на оси координат:

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, \quad l_{1,i} = x_{N_{2,i}} - x_{N_{1,i}}, \quad l_{2,i} = y_{N_{2,i}} - y_{N_{1,i}}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Здесь первый индекс j в номере $N_{j,i}$ соответствует номеру компоненты вектора ($j = 1$ — начало, $j = 2$ — конец условного вектора \bar{N}_i), второй индекс i — номер стержня. Направляющие косинусы образуют матрицу системы уравнений равновесия узлов в проекциях на оси координат: $G_{r,i} = -l_{j,i}/l_i$, $r = 2N_{2,i} - 2 + j$, $r \leq m$, $j = 1, 2$, $G_{r,i} = l_{j,i}/l_i$, $r = 2N_{1,i} - 2 + j$, $r \leq m$, $j = 1, 2$, где $i = 1, \dots, m$. Из решения системы линейных уравнений

$$G\bar{S} = \bar{B}$$

находим в символьной форме усилия в стержнях фермы. Здесь \bar{S} — вектор неизвестных усилий в стержнях, \bar{B} — вектор нагрузок. Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу i , должны записываться в нечетные элементы B_{2i-1} (в настоящей постановке задач таких нагрузок нет), вертикальные — в четные $B_{2i} = P$, $i = 2, \dots, 2n$. При определении усилий от вертикальной единичной силы в середине пролета полагаем $B_{2(n+1)} = 1$.

Let us size the diagram of connections of the rods and joints of truss lattice using vectors \bar{N}_i , $i = 1, \dots, m$, which correspond with the rods. Components of such vectors are numbers of joints at the ends of respective rods. Directions of the conditional vectors are arbitrary, and are not related to the signs of the forces in the rods. The following vectors are present for the lower boom rods: $\bar{N}_i = [i, i + 1]$, for the upper boom rods — $\bar{N}_{i+2n} = [i + 2n + 1, i + 2n + 2]$, $i = 1, \dots, 2n$. Vectors of the lattice rods are coded as vectors

Racks correspond with the vectors $\bar{N}_{i+6n} = [i, i + 2n + 1]$, $i = 1, \dots, 2n + 1$.

The directional cosines used in the equations for truss joints shall be calculated using lengths of rods and projections of their conditional vector presentations on the coordinate axes:

Here, the first index j in the number $N_{j,i}$ corresponds with the number of vector component ($j = 1$ — start, $j = 2$ — end of conditional vector \bar{N}_i), second index i is number of the rod. the directional cosines form matrix for the simultaneous equations of equilibrium of joints as projections on the coordinate axes: $G_{r,i} = -l_{j,i}/l_i$, $r = 2N_{2,i} - 2 + j$, $r \leq m$, $j = 1, 2$, $G_{r,i} = l_{j,i}/l_i$, $r = 2N_{1,i} - 2 + j$, $r \leq m$, $j = 1, 2$, where $i = 1, \dots, m$. On the basis of solution of the simultaneous simple equations

we can find the forces in the truss rods in symbol presentation. Here, \bar{S} is vector of unknown forces in the rods, \bar{B} is vector of loads. Horizontal loads applied to the joint i shall be entered into odd components B_{2i-1} (such loads are not present in the current problem), vertical loads shall be entered into even components $B_{2i} = P$, $i = 2, \dots, 2n$. When finding the forces resulting from single vertical load in the middle of a span, we assume $B_{2(n+1)} = 1$.

Последовательный расчет серии ферм с увеличивающимся числом панелей (от двух до 14) дает всякий раз один и тот же вид результата

Consecutive calculation of a series of trusses with increasing number of panels (from 2 to 14) leads to the same type of result every time

$$EF\Delta = P \frac{A_k a^3 + (C_k c^3 + H_k h^3) / \mu}{2h^2},$$

где $c = \sqrt{4a^2 + h^2}$. Последовательности коэффициентов в этой формуле имеют следующие общие члены:

where $c = \sqrt{4a^2 + h^2}$. Sequences of coefficients in the formula feature the following common members:

$$A_k = 2k \left[(20k^2 + 7)k/3 + 6 \right], C_k = k(2k + 1), H_k = 2k^2 + 3k - 2.$$

Коэффициенты A_k , C_k и H_k найдены в результате решения рекуррентных уравнений. Последовательность коэффициентов при a^3 , полученная по результатам расчетов десяти ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей, имеет вид 0; 236; 1128; 3496; 8460; 17460; 32256; 54928; 87876; 133820; 195800; 277176. Оператор **rgf_findrecur** системы Maple дает следующее уравнение для общего члена полученной последовательности: $A_k = 5A_{k-1} - 10A_{k-2} + 10A_{k-3} - 5A_{k-4} + A_{k-5}$. Решение этого уравнения дает оператор **rsolve**. Формулы для других коэффициентов выводятся аналогично.

Coefficients A_k , C_k and H_k were identified as a result of solving the recurrent equations. The sequence of coefficients at a^3 derived from the results of calculations for ten trusses with gradual increase of the number of panels is as follows: 0; 236; 1128; 3496; 8460; 17460; 32256; 54928; 87876; 133820; 195800; 277176. The Maple system function **rgf_findrecur** provides the following equation for the common member of the discovered sequence: $A_k = 5A_{k-1} - 10A_{k-2} + 10A_{k-3} - 5A_{k-4} + A_{k-5}$. Function **rsolve** provides for solution of this equation. Formulae for other coefficients are derived in the similar way.

Решение задачи о прогибе фермы при нагружении ее одной силой в середине пролета проще. Оно сводится к решению только одного рекуррентного уравнения $A_k = 4A_{k-1} - 6A_{k-2} + 4A_{k-3} - A_{k-4}$ и имеет более простые коэффициенты $A_k = 8k(2k^2 + 1)/3$, $C_k = H_k = k$.

Solving the problem of truss deflection in case of a single force acting on it in the middle of a span is simple. It comes down to solving a single recurrent equation $A_k = 4A_{k-1} - 6A_{k-2} + 4A_{k-3} - A_{k-4}$ and contains simple coefficients. $A_k = 8k(2k^2 + 1)/3$, $C_k = H_k = k$.

Интересно проследить зависимость прогиба от числа панелей при фиксированной длине пролета $L = 2an$ и общей нагрузке $P_s = 2(n-1)P$. На рис. 3 графики относительного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (P_s L)$ построены при $L = 100$ м, $\mu = 1$ и различных значениях высоты h , м.

It is interesting to track dependence of deflection on the number of panels with fixed span length $L = 2an$ and total load $P_s = 2(n-1)P$. Relative deflection charts $\Delta' = \Delta EF / (P_s L)$ on Fig. 3 were made for $L = 100$ м, $\mu = 1$ and different values of height h , м.

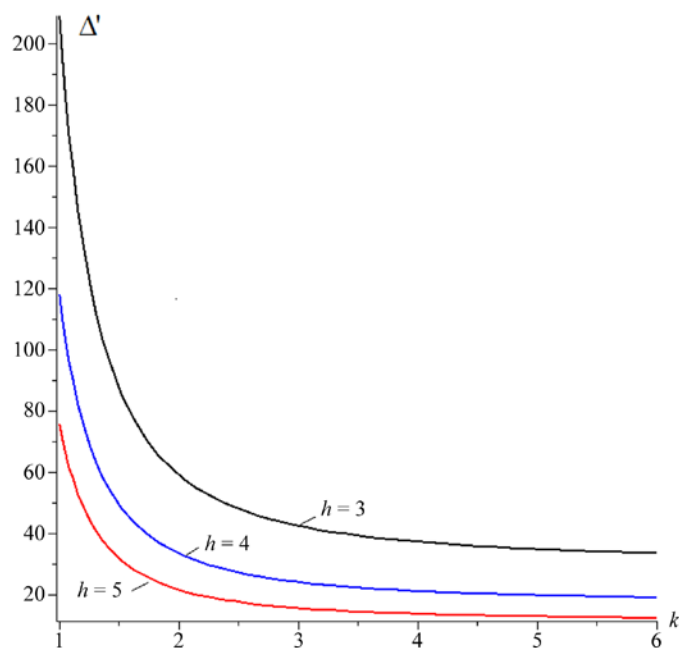


Рис. 3. Зависимость относительного прогиба фермы от числа панелей

Fig. 3. Dependence of relative deflection of the truss on the number of panels

Неявно выраженные наклонные асимптоты кривых определяются из предела $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k = h / (2L\mu)$. На рис.4 графики относительного прогиба построены при $L=100$ м, $k=5$. Как и следовало ожидать, увеличение жесткости стержней решетки приводит к уменьшению прогиба, однако начиная с некоторого значения это уменьшение незначительно. При $\mu = 1$ все стержни имеют одинаковую жесткость.

Indistinct oblique asymptotes of the curves can be found on the basis of the following limit $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k = h / (2L\mu)$. Relative deflection charts on Fig. 4 were made at $L = 100$ м, $k = 5$. As expected, increasing the stiffness of the lattice rods leads to decreasing the deflection, however, starting at certain value, this decrease is insignificant. Stiffness coefficients of all rods at $\mu = 1$ are equal.

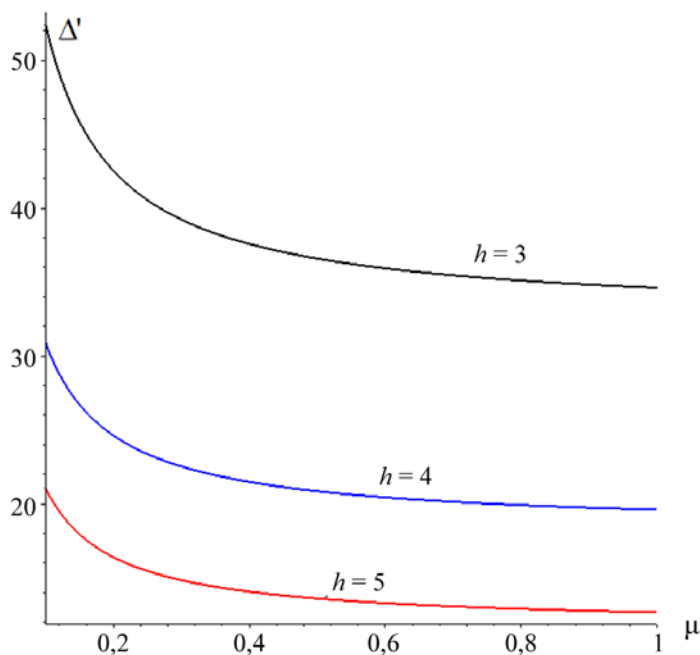


Рис. 4. Зависимость относительного прогиба от распределения жесткостей

Fig. 4. Dependence of relative deflection on distribution of stiffness coefficients

Аналитические выражения прогиба середины пролета фермы в зависимости от ее размеров, соотношения жесткостей стержней и числа панелей получены для распределенной и сосредоточенной нагрузок. Комбинация этих решений дает возможность охватить достаточно широкий круг задач. Полученные формулы компактны, легко проверяемы и могут найти применение для тестирования численных решений и для первичной оценки проектируемых сооружений.

Обзоры работ по применению описанного метода индукции в сочетании с возможностями компьютерной математики Maple даны в статьях [11–13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // *Architecture and Engineering*. 2016. No. 3. Vol. 1. Pp. 14–17.
2. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2016. № 3 (266). С. 16–19.
3. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2014. № 6 (257). С. 2–6.
4. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // *Инженерно-строительный журнал*. 2015. № 5 (57). С. 58–65.
5. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture*. 2016. No. 1 (29). Pp. 84–105.
6. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // *Инженерно-строительный журнал*. 2013. № 5 (40). С. 52–58.
7. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // *Инженерно-строительный журнал*. 2011. № 6. С. 28–34.
8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2015. № 2 (259). С. 2–6.
9. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в си-

Analytical expressions for deflection of the middle of the truss span depending on its size, relation between stiffness coefficients of the rods, and number of panels were obtained for distributed and concentrated loads. Combination of said solutions allows for covering a significantly wide range of problems. The resultant formulae are compact, easy to check, and can be used for testing the numerical solutions, and for first-time assessment of the designed structures.

For reviews of works using the described induction method in combination of computer mathematics Maple, see articles [11–13].

REFERENCES

1. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. *Architecture and Engineering*. 2016, no. 3, vol. 1, pp. 14–17.
2. Kirsanov M.N. Analiticheskiyraschetregulyarnoybalochnoyfermy s proizvol'nymchislompaneley so slozhnoyreshetkoy [Analytical Calculation of a Regular Girder Truss with an Arbitrary Number of Panels with Complex Lattice]. *Stroitel'nayamekhanika i raschetsooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. 2016, no. 3 (266), pp. 16–19. (In Russian)
3. Kirsanov M.N. Analiticheskiyraschetmnogoreshetchatoyfermy [Analytical Calculation of Multilattice Truss]. *Stroitel'nayamekhanika i raschetsooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. 2014, no. 6 (257), pp. 2–6. (In Russian)
4. Kirsanov M.N. Analizprogibareshetchatoybalochnoyfermyraspornogotipa [Analysis of Deflection of Lattice Girder Frame]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal* [Magazine of Civil Engineering]. 2015, no. 5 (57), pp. 58–65. (In Russian)
5. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder. *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture*. 2016, no. 1 (29), pp. 84–105.
6. Kirsanov M.N., Andreevskaya T.M. Analizvliyaniyauprugikhdeformatsiy mачты na pozitsionirovaniye antennoy i radiolokatsionnogooborudovaniya [Analysis of Influence of Elastic Deformations of a Mast on Positioning of Antenna and Radar Equipment]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal* [Magazine of Civil Engineering]. 2013, no. 5 (40), pp. 52–58. (In Russian)
7. Kirsanov M.N. Statcheskiyraschet i analizprostranstvennoysterzhnevoyssystemy [Static Calculation and Analysis of Spatial Grid System]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal* [Magazine of Civil Engineering]. 2011, no. 6, pp. 28–34. (In Russian)
8. Kirsanov M.N. Analiticheskiyraschetprostranstvennoysterzhnevoyregulyarnoystrukturny s ploskoygran'yu [Analytical Calculation of a Spatial Frame Regular Structure with a Flat Face]. *Stroitel'nayamekhanika i raschetsooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. 2015, no. 2 (259), pp. 2–6. (In Russian)
9. Leonov P.G., Kirsanov M.N. Analiticheskiyraschet i analizprostranstvennoysterzhnevoykonstruktsii v sisteme Maple [Analytical calculation and analysis of space frame in the Maple system]. *Informatizatsiyainzhenernogoobrazovaniya* *INFORINO-2014* :trudymezhdunarodnoynauchno-

стеме Maple // Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО–2014 : тр. междунар. науч.-методич. конф. 2014. С. 239–242.

10. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб. : Лань, 2012. 512 с.

11. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 6. С. 21–28.

12. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 66–73.

13. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247–254.

metodicheskoykonferentcii[informatization of Engineering Education INFORINO-2014 : Proceedings of International Scientific and Methodological Conference]. Moscow, 2014, pp. 239–242. (In Russian)

10. Kirsanov M.N. Maple i Maplet. Resheniyazadachmekhaniki [Maple and Maplet. Solutions of Problems on Mechanics]. Saint Petersburg, Lan' Publ., 2012, 512 p. (In Russian)

11. Tin'kov D.V. Analiztochnykhresheniiproigibaregulyarnykhsharnirno-sterzhnevykhkonstruktsiy [Analysis of Exact Solutions of Deflection of Regular Hinged-Rod Structures]. *Stroitel'nayamekhanikainzhenernykhkonstruktsiy i sooruzheniy* [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings]. 2015, no. 6, pp. 21–28. (In Russian)

12. Tin'kov D.V. Sravnitel'nyyanalitaliticheskikhresheniyzadachi o progibefermennykhkonstruktsiy [Comparative Analysis of Analytical Solutions of a Problem of Deflection of Truss Structures]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal* [Magazine of Civil Engineering]. 2015, no. 5 (57), pp. 66–73. (In Russian)

13. Kiyko L.K. Analiticheskayaotsenkaprogibaarochnoyfermy pod deystviemvetrovoy nagruzki [Analytical evaluation of deflection of arch truss under wind load]. *Nauchnyyvestnik* [Scientific Bulletin]. 2016, no. 1 (7), pp. 247–254. (In Russian)

Поступила в редакцию в октябре 2016 г.

Received in Oktober 2016.

Об авторе: **Кирсанов Михаил Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, **Национальный исследовательский университет «МЭИ» (НИУ «МЭИ»)**, 111250, г. Москва, Красноказарменная ул., д. 14, c216@ya.ru.

About the author: **Kirsanov Mikhail Nikolaevich**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Department of Robotics, Mechatronics, Machine Dynamics and Strength, **National Research University "Moscow Power Engineering Institute"**, 14 Krasnokazarmennaya str., Moscow, 111250, Russian Federation; c216@ya.ru.

Для цитирования:

Кирсанов М.Н. Точное решение задачи о прогибе балочной фермы с произвольным числом панелей в системе Maple // Строительство: наука и образование. 2017. Том 7. Выпуск 1 (22). Ст. 1. Режим доступа: <http://nso-journal.ru>.

For citation:

Kirsanov M.N. Tochnoeresheniezadachi o progibebalochnoyfermy s proizvol'nymchislompaneley v sisteme Maple [Exact Solution of the Problem of Deflection of a Girder with an Arbitrary Number of Panels in the Maple System]. *Stroitel'stvo: nauka i obrazovanie* [Construction: Science and Education]. 2017, vol. 7, issue 1 (22), paper 1. (In Russian) Available at: <http://www.nso-journal.ru>.