



Research Article

Received: August 12, 2022

Accepted: August 15, 2022

Published: August 15, 2022

ISSN 2304-6295

Deformations of a planar multi-span arch truss: analytical solutions

Kirsanov, Mikhail Nikolaevich^{1*} ¹ Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation; c216@ya.ru (K.M.N).Correspondence:* email c216@ya.ru; contact phone [+79651833534](tel:+79651833534)

Keywords:

Truss; Maple; Maxwell – Mohr formula; Deflection; Exact solution; Arch; Number of spans

Abstract:

The object of research. A scheme of a statically determinate indefinite truss with arched spans is proposed. The upper belt of the structure is rectilinear. The side supports of the truss are fixed hinges, the intermediate ones are movable. The truss is subjected to a vertical load, evenly distributed over all nodes of the upper chord of the truss or concentrated in the middle of the middle span. The derivation of formulas for calculating the dependence of the deflection of the middle span on the load, dimensions and number of spans is given. Analytical expressions are derived for the forces in the critical elements for an arbitrary number of spans of the structure. **Method.** The calculation of the forces in the elements and the reaction of supports of an externally statically indeterminate structure is carried out by cutting out all nodes from the solution of a joint system of equilibrium equations for nodes. The expression for the deflection is in symbolic form according to the Maxwell – Mohr formula. The generalization of a series of solutions to an arbitrary number of spans is carried out by induction. **Results.** The dependences found for the forces in the rods and deflections have a compact form and allow one to give simple estimates of the solutions. It is noted that the forces in all the rods of the upper chord, except for the side ones, in the case of a uniform load are equal to zero for arbitrary truss sizes and the number of spans. The dependence of the deflection on the number of spans has a jumplike character. All necessary transformations and analysis of solutions are performed in the Maple symbolic mathematics system. Linear asymptotics of the solutions for the deflection are derived.

1 Introduction / Введение

Многопролетные арочные фермы широко используются в мостовых строениях. Расчет прочности и устойчивости ферм обычно базируется на численных расчетах с применением метода конечных элементов в специализированных пакетах [1]–[4]. Использование аналитических решений затрудняется сложностью их получения. Проблемой существования и расчета статически определимых регулярных ферм, допускающих получение конечных формул для прогиба при произвольном числе панелей, впервые занялись Hutchinson R.G., Fleck N.A [5], [6], Zok F.M., Latture R.M., Begley M.R. [7]. В работах Kaveh A. [8]–[10] изучается оптимизация регулярных конструкций. Известны отдельные аналитические решения для прогибов регулярных плоских [11]–[14] и пространственных ферм [15], [16], полученные методом индукции обобщением ряда решений на произвольное число панелей с применением операторов систем компьютерной математики Maple. В справочнике [17] даны формулы для расчета прогибов и усилий в различных схемах плоских статически определимых регулярных ферм под действием сосредоточенных и распределенных нагрузок различного типа. В альтернативном направлении исследований при выводе расчетных формул для конструкций применяется представление решения в виде тригонометрических рядов [18]–[21]. Численно – аналитический метод расчета колебаний регулярных конструкций применен в [22]. Нижние оценки первой частоты собственных колебаний регулярной фермы с произвольным числом панелей методом индукции в аналитической форме получены в [23], [24]. В этих работах использован метод Донкерлея [25]. Применение арочных ферм в различных конструкциях изучалось в [26]–[28]

Kirsanov, M.

Deformations of a planar multi-span arch truss: analytical solutions;

2022; *Construction of Unique Buildings and Structures*; 102 Article No 10204. doi: 10.4123/CUBS.102.4



В настоящей работе предложена новая схема регулярной статически определимой плоской многопролетной фермы арочного типа. Ставится задача вывести формулы для зависимости прогиба конструкции от числа пролетов. Примененный алгоритм может быть использован в аналогичных задачах для конструкций с регулярной структурой.

2 Materials and Methods / Материалы и методы

Ферма состоит из n одинаковых арок пролетом $9a$ и высотой $9h$ (рис. 1, 2). Крайняя левая и крайняя правая опоры — неподвижные шарниры, остальные опоры (промежуточные) имеют подвижные шарниры. Ферма состоит из $N = 29n + 1$ стержней, из которых $6n$ стержней длиной $3a$ образуют верхний горизонтальный пояс. Ферма статически определимая, однако реакции опор из условия равновесия всей конструкции в целом определить нельзя. Это делает ферму внешне статически неопределимой.

Поэтому расчет усилий и реакций опор будет произведен методом вырезания узлов из решения общей системы уравнений равновесия узлов в проекции на оси координат. В символическом виде такое решение можно получить, например, в системе компьютерной математики Maple [29], [30]. В программу вводятся координаты шарниров и порядок соединения стержней в узлах. Матрица \mathbf{G} системы уравнений равновесия $\mathbf{GS} = \mathbf{B}$ состоит из коэффициентов при неизвестных усилиях, включая и реакции опор. Число стержней, моделирующих опоры, равно $n + 3$, поэтому матрица \mathbf{G} имеет размер $30n + 4$. Обозначено: \mathbf{B} — вектор нагрузок, \mathbf{S} — вектор неизвестных усилий.

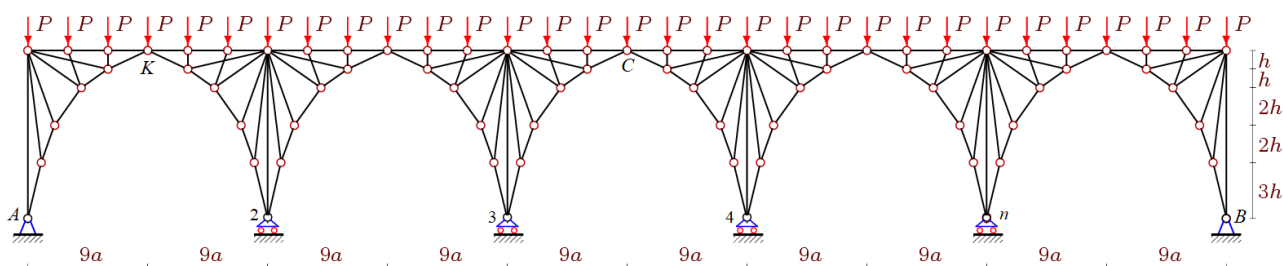


Рис. 1 – Конструкция фермы под действием равномерной нагрузки, $n=5$
Fig. 1 – Truss structure under uniform load, $n=5$

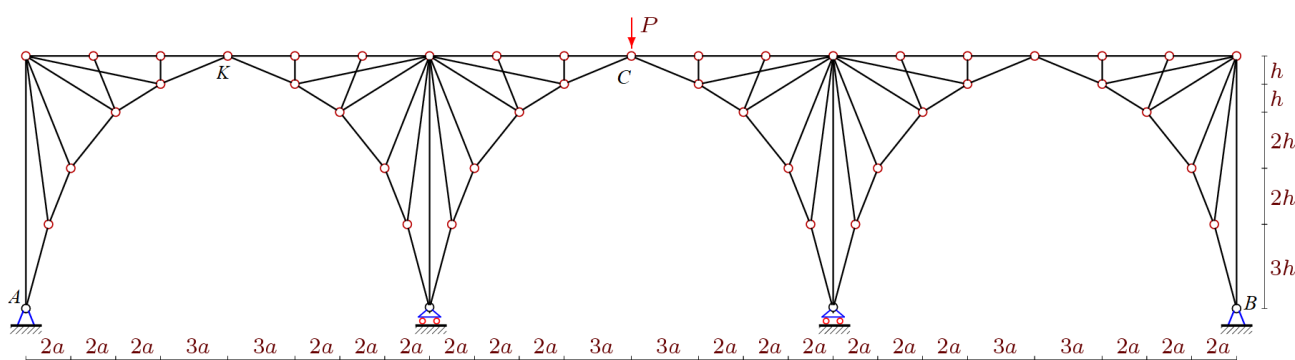


Рис. 2 – Конструкция фермы под действием сосредоточенной нагрузки, $n=3$
Fig. 2 – Truss structure under concentrated load, $n=3$

Вычисление усилий выполняется в системе Maple по программе [31]. Решение системы уравнений можно получить как в символическом, так и численном виде. В последнем случае в программу вводятся конкретные размеры фермы, от которых зависят координаты узлов. Первые же вычисления показали, что при четном числе пролетов определитель матрицы \mathbf{B} обращается в ноль. Это свидетельствует о недопустимой при таком числе пролетов кинематической



изменяемости конструкции. Действительно, можно найти кинематически непротиворечивую картину распределения скоростей узлов фермы (рис. 3). В ферме можно выделить три диска. Боковые диски $AA'C'$ и $BB'C$ вращаются вокруг шарниров A и B , средний $C'D$ — вокруг мгновенного центра скоростей, находящегося над опорой D на высоте $18h$. Очевидно соотношение скоростей: $v/c = u/(2h)$, где $c = \sqrt{a^2 + h^2} = AC'/9$. Исключая из рассмотрения фермы с четным числом пролетов, все вычисления следует произвести для ферм с числом пролетов $n = 2k - 1, k = 1, 2, \dots$

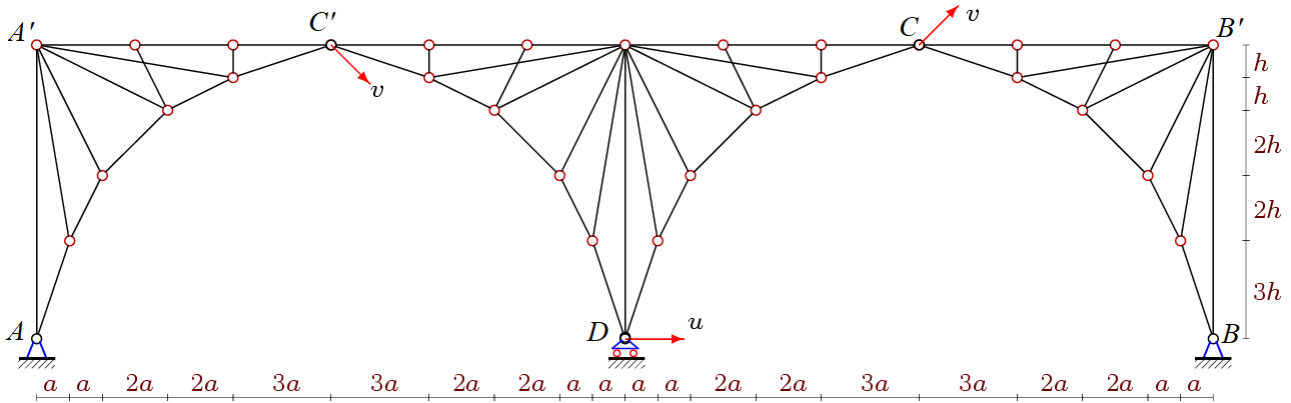


Рис. 3 – Возможные скорости узлов мгновенно изменяемой фермы
Fig. 3 – Possible velocities of the nodes of an instantly changing truss

3 Results / Результаты

3.1 Forces / Усилия

Рассмотрим случай нагружения фермы узловой нагрузкой равномерно по всем узлам верхнего пояса (рис. 1). Вектор нагрузок в правой части системы уравнения равновесия в этом случае имеет вид: $B_{2k_i} = -P$, где $k_i, i = 1, \dots, 6n + 1$ — номера узлов верхнего пояса. В чётные элементы вектора нагрузок записываются вертикальные внешние силы, приложенные к узлу k_i , в нечётные – горизонтальные. Картина распределения усилий в стержнях конструкции при $n = 3$ представлена на рисунке 4. Значения усилий отнесены к величине P нагрузки на узел и округлены до двух значащих цифр. Наиболее сжатые стержни оказались, как и следовало предполагать, внизу арок нижнего пояса, наиболее растянуты стойки длиной $9h$ в опорных частях фермы. Следует также отметить, что картина распределения усилий во всех пролетах одинакова.

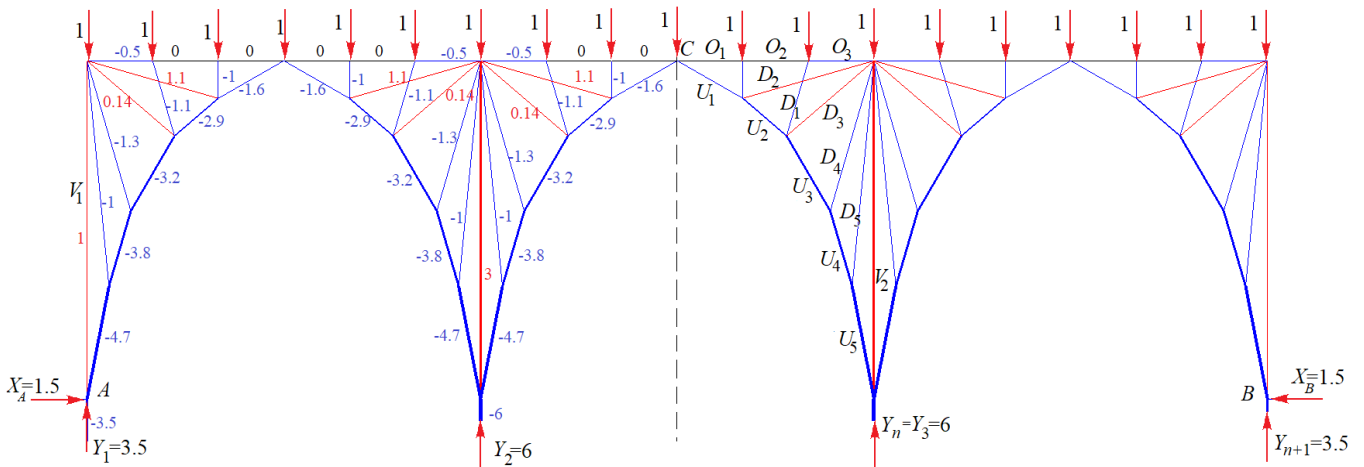


Рис. 4 – Распределение усилий в стержнях фермы, $n = 3, a = h = 1m$

Rice. 4 – Distribution of forces in the truss rods, $n = 3, a = h = 1m$

Kirsanov, M.

Deformations of a planar multi-span arch truss: analytical solutions;

2022; Construction of Unique Buildings and Structures; 102 Article No 10204. doi: 10.4123/CUBS.102.4



Красным цветом обозначены растянутые стержни (усилия в них положительные), синим — сжатые стержни (отрицательные усилия). Толщины отрезков стержней условно пропорциональны модулям усилий в этих стержнях. Усилия в стержнях верхнего пояса (кроме боковых в пролетах) равны нулю (черные линии стержней). Реакции всех промежуточных опор при такой нагрузке одинаковы и равны $Y_i = 6P, i = 1, \dots, n$. Программа дает и аналитические выражения для усилий. Весьма характерно для этой конструкции, что усилия не зависят от числа пролетов. Усилия в стержнях, образующих своды арок:

$$U_1 = -Ps / (2h), U_2 = -21Pb / (16h), U_3 = -9Pc / (4h), \\ U_4 = -27Pd / (16h), U_5 = -3Pg / (2h).$$

Обозначено:

$$b = \sqrt{4a^2 + h^2}, d = \sqrt{a^2 + 4h^2}, f = \sqrt{a^2 + 36h^2}, \\ g = \sqrt{a^2 + 9h^2}, r = \sqrt{36a^2 + h^2}, s = \sqrt{9a^2 + h^2}.$$

Усилия в раскосах:

$$D_1 = -Pd / (2h), D_2 = 3Pr / (16h), D_3 = -Pb / (16h), \\ D_4 = -9Pd / (16h), D_5 = -3Pf / (16h).$$

Усилия в стержнях верхнего пояса: $O_1 = O_2 = 0, O_3 = -Pa / (2h)$.

Усилия в средних стойках: $V_2 = 3P$, в боковых стойках: $V_1 = P$.

Реакции опор:

$$X_A = X_B = 3Pa / (2h), Y_A = Y_B = Y_1 = Y_{n+1} = 7P / 2, \\ Y_i = 6P, i = 2, \dots, n.$$

Аналогично, при действии на ферму сосредоточенной нагрузкой в узле С, усилия в отмеченных стержнях имеют вид:

$$U_1 = -Ps / (2h), U_2 = -9Pb / (16h), U_3 = -3Pc / (4h), \\ U_4 = -9Pd / (16h), U_5 = -Pg / (2h).$$

$$D_1 = 0, D_2 = -Pr / (16h), D_3 = -3Pb / (16h),$$

$$D_4 = -3Pd / (16h), D_5 = -Pf / (16h).$$

$$O_1 = O_2 = O_3 = Pa((-1)^k + 3) / (2h).$$

$$V_1 = P, V_2 = 2P$$

Реакции опор:

$$X_A = X_B = -Pa(-1)^k / (2h), Y_A = Y_B = Y_1 = Y_{n+1} = -(-1)^k P,$$

$$Y_i = (-1)^{(k+i)} P, i = 2, \dots, n.$$

3.2 Deflection / Прогиб

Расчет прогиба (вертикальное смещение среднего узла С) производится по формуле Максвелла – Мора в предположении, что все стержни упругие и имеют одинаковую жесткость EF .

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha}^{(P)} S_{\alpha}^{(1)} l_{\alpha} / (EF). \quad (1)$$

Сумма составляется по всем упругим стержням конструкции, кроме стержней, моделирующих опоры. Обозначено: $S_{\alpha}^{(P)}$ — усилие в стержне с номером α от действия внешней



нагрузки, $S_{\alpha}^{(1)}$ — усилие в этом же стержне от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу C , прогиб которого вычисляется, l_{α} — длина стержня.

Для вывода формулы зависимости прогиба от числа пролетов используется метод индукции. При $k=1, k=2$ выражения для прогиба имеют вид:

$$\Delta_1 = P \frac{-384a^3 + 183b^3 + 864c^3 + 297d^3 + 2304h^3 + 192g^3 + 3c^3 - 3r^3 + 64s^3}{128h^2EF},$$

$$\Delta_2 = P \frac{-1152a^3 + 183b^3 + 864c^3 + 297d^3 + 11520h^3 + 192g^3 + 3c^3 - 3r^3 + 64s^3}{128h^2EF}.$$

В общем случае:

$$\Delta_k = P(C_1a^3 + C_2b^3 + C_3c^3 + C_4d^3 + C_5h^3 + C_6g^3 + C_7f^3 + C_8r^3 + C_9s^3) / (h^2EF). \quad (2)$$

Последовательный расчет прогиба в символьной форме показывает, что для $k=1, 2, 3, 4...$ все коэффициенты, кроме коэффициентов C_1 при a^3 и C_5 при h^3 , не меняются. Последовательность коэффициентов при a^3 имеет вид: -3, -9, 3, -15, 9, -21... . Общий член этой последовательности определяется в системе Maple с помощью операторов пакета genfunc:

$$C_1 = 3((1-2k)(-1)^k - 3) / 2. \quad (3)$$

Коэффициент C_5 принимает поочередно значения 18 и 90: 18, 90, 18, 90, 18,.... . Общий член этой последовательности:

$$C_5 = 18(2(-1)^k + 3). \quad (4)$$

Таким образом, зависимость прогиба в узле C имеет вид (2) с коэффициентами $C_2 = 183/128$, $C_3 = 27/4$, $C_4 = 297/128$, $C_6 = 3/2$, $C_7 = 3/128$, $C_8 = -C_7$, $C_9 = 1/2$.

Коэффициенты C_1, C_5 вычисляются по формулам (3), (4).

Аналогично, коэффициенты в (2) в случае прогиба середины K первого пролета имеют вид:

$$C_1 = 3(k-2), C_2 = 183/128, C_3 = 27/4, C_4 = 297/128, C_5 = 18, C_6 = 3/2,$$

$$C_7 = 3/128, C_8 = -C_7, C_9 = 1/2.$$

Два полученных решения представлены графиком на рисунке 5.

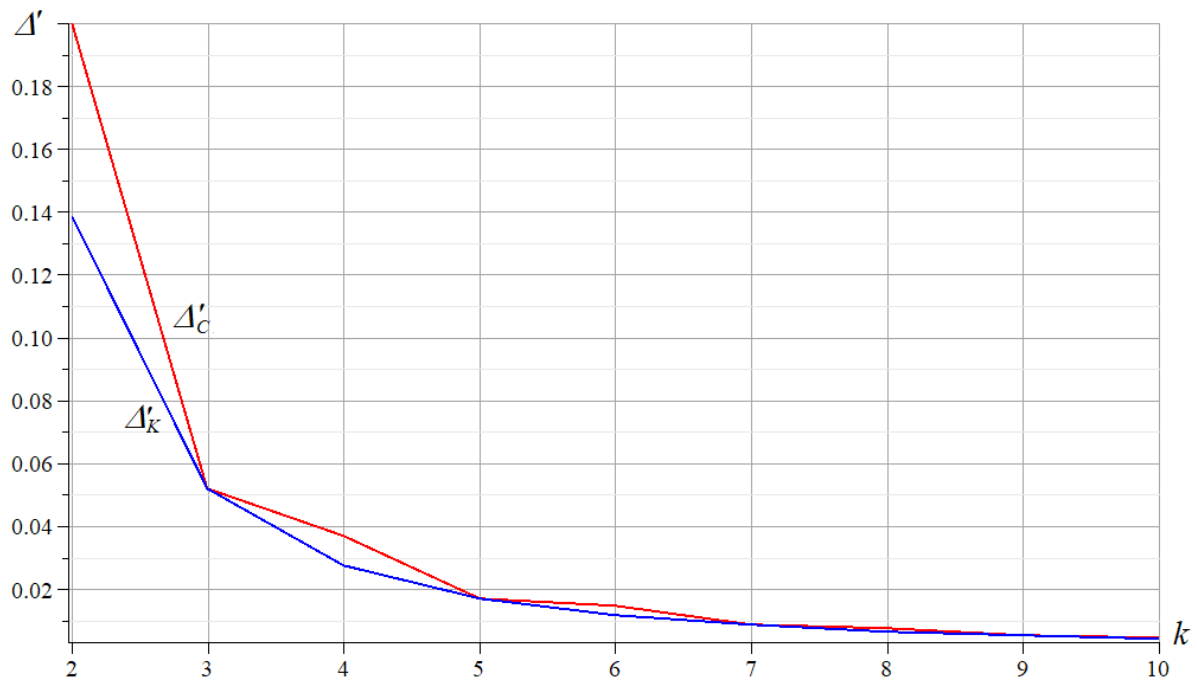


Рис. 5 – Зависимость прогибов в узлах С и К при равномерном нагружении от числа пролетов
Fig. 5 – Dependence of deflections in nodes C and K under uniform loading on the number of spans

Обозначено: Δ' — величина безразмерного прогиба, отнесенного к длине пролета фермы $L = 18na = 150$ м и суммарной нагрузке $P_0 = (6n + 1)P$:

$$\Delta' = EF\Delta_n / (P_0L). \quad (5)$$

Кривые построены при $h = a$. Как и ожидалось, для всех значений k прогиб середины пролета в узле С больше прогиба в узле К крайнего пролета. Однако, для нечетных значений k прогибы совпадают. С увеличением числа пролетов при общей постоянной длине конструкции относительный прогиб уменьшается и стремится к нулю.

Если на ферму действует сосредоточенная сила в узле С (рис. 2), то суммарная нагрузка в знаменателе (5) — это сама нагрузка $P_0 = P$. Коэффициенты в формуле (2) прогиба имеют вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= 9(10k + 3(-1)^k - 5), \quad C_2 = C_4 = 99(2k - 1)/128, \quad C_3 = 9(2k - 1)/4, \\ C_5 &= 18(4k - 3), \quad C_6 = C_9 = (2k - 1)/2, \quad C_7 = C_8 = (2k - 1)/128. \end{aligned} \quad (6)$$

При действии на центральный узел К первого пролета все коэффициенты в (2) при вычислении прогиба в этом узле такие же, как в (6), кроме $C_1 = 18(5k - 4)$.

На рисунке 6 представлены эти две зависимости.

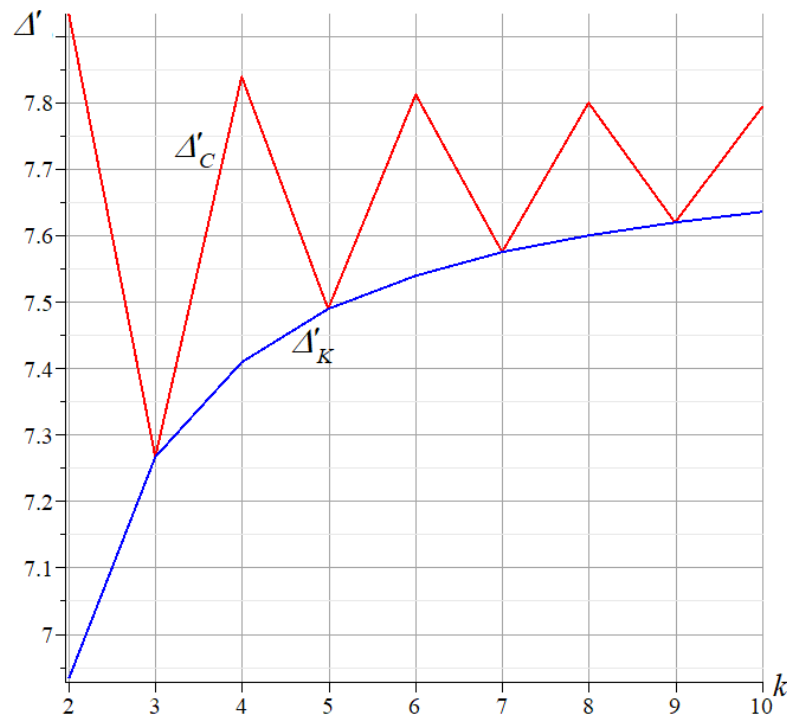


Рис. 6 – Зависимость прогибов от числа пролетов в узлах С и К при загрузении этих узлов сосредоточенной силой

Fig. 6 – Dependence of deflections on the number of spans in nodes C and K when these nodes are loaded with a concentrated force

Зависимость относительного прогиба Δ'_C в С от числа пролетов k скачкообразная, в узле К бокового пролета — монотонно возрастающая. Однако обе эти зависимости имеют одну и ту же асимптоту: $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta'_C / k = \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta'_K / k = 1949h / (16L) \approx 121.8h / L$.

Как и при сопоставлении зависимостей прогиба от действия распределенной нагрузки (рис. 5) обнаруживается совпадение результатов при нечетных k . Кроме того, есть еще две особенности этих решений. Во-первых, прогиб от действия сосредоточенных сил (и в С, и в К) на два порядка больше, чем от распределенной нагрузки. Суммарная распределенная нагрузка при этом такая же, как сосредоточенная. Во-вторых, кривые принципиально различаются тем, что при распределенной нагрузке относительный прогиб уменьшается до нуля при увеличении числа пролетов, а при сосредоточенной нагрузке прогиб, хотя и не всегда монотонно, но растет.

4 Discussion / Обсуждения

Рассмотрена новая схема статически определимой плоской конструкции многопролетной арочной фермы. Получены аналитические решения для прогибов и усилий в стержнях фермы под действием равномерной узловой нагрузки по верхнему поясу и сосредоточенных сил в отдельных узлах. Отличительная особенность решения — отсутствие усилий почти во всех стержнях верхнего пояса и периодичность по пролетам напряженного состояния конструкции. В крайних стержнях каждого пролета боковые стержни верхнего пояса имеют небольшие сжимающие усилия. Основная же нагрузка приходится на стержни нижнего пояса, образующие арки. Вероятно, именно по причине периодичности решения для усилий в формулах для прогибов почти все коэффициенты не зависят от числа пролетов k . Найдены линейные асимптоты для зависимостей относительных прогибов при загрузении фермы сосредоточенными силами. В этом случае также отмечается скачкообразное изменение прогиба, позволяющее рационально подобрать число пролетов. Изменение (уменьшение или увеличение) числа пролетов всего на один, может уменьшить или увеличить прогиб на 10%. С увеличением числа k скачки кривой решения сглаживаются.

Следует также отметить возможность мгновенной изменяемости конструкции при четном числе пролетов. При этом весьма существенным является тот факт, что расчеты проводятся в



символьной форме. Численные расчеты, произведенные по этой же Maple–программе, не всегда обнаруживают обращение в ноль определителя системы уравнений равновесия при вычислении усилий. Округление промежуточных данных, неизбежное в численных пакетах, часто скрывает эту опасную особенность конструкции. Расчеты в символьной форме свободны от этого недостатка и надежно выявляют факт вырождения определителя. Кроме того, в данной задаче для подтверждения эффекта кинематической изменяемости построена непротиворечивое распределение скоростей узлов фермы при четном числе пролетов.

5 Conclusions / Выводы

Основные результаты работы:

1. Рассмотрена новая схема многопролетной статически определимой фермы арочного типа.
2. Выведены расчетные формулы для усилий в характерных стержнях и прогиба под действием различных нагрузок при произвольном числе пролетов. Выявлены линейные асимптотики решений.
3. Отмечены случаи кинематического вырождения конструкции при четном числе пролетов. Найдена соответствующая картина распределения скоростей узлов.

6 Fundings / Финансирование

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда в рамках гранта 22-21-00473, <https://rscf.ru/project/22-21-00473/> (дата обращения 24 августа 2022 г.)

References

1. Itam, Z., Beddu, S., Mohd Kamal, N.L., Bamashmos, K.H. Finite Element Analysis of the Maximum Stress at the Joints of the Transmission Tower. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2016. 32(1). DOI:10.1088/1755-1315/32/1/012044.
2. Kazemzadeh Azad, S., Aminbakhsh, S. High-dimensional optimization of large-scale steel truss structures using guided stochastic search. Structures. 2021. 33. Pp. 1439–1456. DOI:10.1016/J.ISTRUC.2021.05.035.
3. Feng, J., Sun, Y., Xu, Y., Wang, F., Zhang, Q., Cai, J. Robustness analysis and important element evaluation method of truss structures. Buildings. 2021. 11(10). DOI:10.3390/BUILDINGS11100436.
4. Vatin, N.I., Sinelnikov, A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section. Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). Pp. 39–51. DOI:10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 17.04.2021).
5. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. Microarchitected cellular solids - The hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. 85(9). Pp. 607–617. DOI:10.1002/zamm.200410208.
6. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. The structural performance of the periodic truss. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. 54(4). Pp. 756–782. DOI:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
7. Zok, F.W., Lature, R.M., Begley, M.R. Periodic truss structures. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. 96. Pp. 184–203. DOI:10.1016/j.jmps.2016.07.007.
8. Kaveh, A. Optimal analysis of structures by concepts of symmetry and regularity. Optimal Analysis of Structures by Concepts of Symmetry and Regularity. 2013. 9783709115657. Pp. 1–463. DOI:10.1007/978-3-7091-1565-7.
9. Kaveh, A., Jafari, L., Farhoudi, N. Truss optimization with natural frequency constraints using a dolphin echolocation algorithm. Asian J. Civ. Eng. 2017. 16(1). Pp. 29–46.
10. Kaveh, A., Hosseini, S.M., Zaerreza, A. Size, Layout, and Topology Optimization of Skeletal Structures Using Plasma Generation Optimization. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering 2020 45:2. 2020. 45(2). Pp. 513–543. DOI:10.1007/S40996-020-00527-1. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s40996-020-00527-1> (date of application: 4.03.2022).
11. Ovsyannikova, V.M. Dependence of deformations of a trapezous truss beam on the number of panels. Structural Mechanics and Structures. 2020. 26(3). Pp. 13–20. URL:

Kirsanov, M.

Deformations of a planar multi-span arch truss: analytical solutions;

2022; *Construction of Unique Buildings and Structures*; 102 Article No 10204. doi: 10.4123/CUBS.102.4



- <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44110286> (date of application: 11.03.2021).
12. Petrenko, V.F. The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*. 2021. (20). Pp. 2001. DOI:10.34910/ALF.20.1.
 13. Sviridenko, O.V., Komerzan, E.V. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 102(3). Pp. 10101–10101. DOI:10.4123/CUBS.101.1. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2022.102.1> (date of application: 11.08.2022).
 14. Dai, Q. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. *AlfaBuild*. 2021. 17. Pp. 1701. DOI:10.34910/ALF.17.1.
 15. Kirsanov, M. Model of a spatial dome cover. Deformations and oscillation frequency. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 99(9904). DOI:10.4123/CUBS.99.4. URL: [https://unistroy.spbstu.ru/userfiles/files/2022/1\(99\)/9904.pdf](https://unistroy.spbstu.ru/userfiles/files/2022/1(99)/9904.pdf) (date of application: 13.04.2022).
 16. Kirsanov, M. Deformations And Spatial Structure Vibrations Frequency of The Rectangular Contour Type Cover: Analytical Solutions. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2021. 98(9805). DOI:10.4123/CUBS.98.5. URL: [https://unistroy.spbstu.ru/userfiles/files/2021/5\(98\)/9805.pdf](https://unistroy.spbstu.ru/userfiles/files/2021/5(98)/9805.pdf) (date of application: 13.04.2022).
 17. Kirsanov, M. *Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020.
 18. Galileev, S.M., Matrosov, A. V. Method of initial functions: Stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures. *Composite Structures*. 1997. 39(3–4). Pp. 255–262. DOI:10.1016/S0263-8223(97)00108-6.
 19. Goloskokov, D.P., Matrosov, A. V. Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates. *AIP Conference Proceedings*. 2018. 1959. DOI:10.1063/1.5034687.
 20. Goloskokov, D.P., Matrosov, A. V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack. *Materials Physics and Mechanics*. 2018. 36(1). Pp. 137–141. DOI:10.18720/MPM.3612018_15.
 21. Matrosov, A. V. Computational Peculiarities of the Method of Initial Functions. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. 2019. 11619 LNCS. Pp. 37–51. DOI:10.1007/978-3-030-24289-3_4.
 22. Grishanina, T.V., Shklyarchuk, F.N. Numerical-analytical method for calculating the oscillations of regular structures. *Mechanics of composite materials and structures*. 2022. 28(2). Pp. 175–186. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=49026364> (date of application: 8.08.2022).
 23. Vorobev, O.V. Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. 92(7). Pp. 9204–9204. DOI:10.18720/CUBS.92.4. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2020.92.4> (date of application: 27.02.2021).
 24. Vorobyev, O. About methods of obtaining analytical solution for eigenfrequencies problem of trusses. *Structural mechanics and structures*. 2020. 1(24). Pp. 25–38. URL: http://vuz.exponenta.ru/PDF/NAUKA/elibrary_42591122_21834695.pdf.
 25. Low, K.H. Modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2000. 42(7). Pp. 1287–1305. DOI:10.1016/S0020-7403(99)00049-1.
 26. He, Z.Q., Xu, T., Liu, Z. Decoupling of arch action and truss action in deep beams by strain energy. *Structures*. 2020. 26. Pp. 185–192. DOI:10.1016/J.ISTRUC.2020.04.020.
 27. Shi, M., Yuan, B., Jiang, T., Wei, Y. In-plane failure mechanisms and strength design of circular steel tubular Vierendeel truss arches with rectangular section. *Structures*. 2021. 29. Pp. 1779–1790. DOI:10.1016/J.ISTRUC.2020.12.040.
 28. Li, L.Y., He, S.C., He, X.H. Aeroelastic model design and sensitivity analysis of a complicated steel truss arch tower to skew incident winds based on wind tunnel tests. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2021. 214. Pp. 104646. DOI:10.1016/J.JWEIA.2021.104646.
 29. Zotos, K. Performance comparison of Maple and Mathematica. *Applied Mathematics and Computation*. 2007. 188(2). Pp. 1426–1429. DOI:10.1016/j.amc.2006.11.008.
 30. Maple software package. *Advanced Mathematics for Engineering Students*. 2022. Pp. 389–393. DOI:10.1016/B978-0-12-823681-9.00023-X. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B978012823681900023X> (date of application: 13.04.2022).

Kirsanov, M.

Deformations of a planar multi-span arch truss: analytical solutions;

2022; *Construction of Unique Buildings and Structures*; 102 Article No 10204. doi: 10.4123/CUBS.102.4



- 15.07.2021).
31. Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N., Serdjuks, D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2020. 4(4). Pp. 510–517. DOI:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.