



Research Article

Received: January 12, 2023

Accepted: January 22, 2023

Published: January 27, 2023

ISSN 2304-6295

Model of a hexagonal prismatic truss. Oscillation frequency spectrum

Kirsanov, Mikhail Nikolaevich¹ 

¹ Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation; c216@ya.ru (K.M.N.);
Correspondence: * c216@ya.ru; contact phone [+79651833534](tel:+79651833534)

Keywords:

Spatial truss; Hexagonal prism; Natural vibrations; Lower frequency estimate; Dunkerley method; Induction; Frequency spectrum isoline; Spectral constant

Abstract:

The object of research is a spatial truss. A scheme of a statically determinate tower-type truss is proposed. The purpose of the study is to derive formulas for the dependences of the first frequency of natural oscillations on the dimensions of the structure and to numerically analyze the spectra of a family of regular trusses of various orders. It is assumed that the mass of the structure is concentrated in the truss nodes. **Method.** To determine the analytical expressions for the forces in the rods, the equilibrium equations of the nodes are compiled in matrix form using the operators of the Maple computer mathematics system. The rigidity of the structure required to calculate the vibration frequencies is calculated using the Maxwell - Mohr formula. The lower analytical estimate of the first frequency is obtained in the Dunkerley approximation by calculating the partial frequencies. Only horizontal oscillations of the weights are assumed, each weight has two degrees of freedom. Generalizing a series of solutions for trusses with a successively increasing number of panels, we obtain the dependence of the lower frequency estimate on the number of panels. **Results.** A formula is obtained for the first oscillation frequency as a function of the number of panels. A good agreement between the found analytical solution and the numerical solution obtained with allowance for all degrees of freedom of the structure is shown. Graphs of the dependence of the first frequency and the relative error of the analytical solution on the number of panels are plotted. With an increase in the number of panels, the error of the found solution decreases from 7% to 3%. The natural frequency spectrum of the truss is analyzed. Spectral isolines and constants are found in the frequency set of a series of regular trusses.

1 Введение / Introduction

Расчет пространственных ферм в инженерной практике, как правило, производится в специализированных пакетах, основанных на методе конечных элементов [1]–[3]. Аналитических решений в виде конечных замкнутых формул, удобных для расчета прогиба, прочности или собственных частот колебаний немного и в основном это решения для статически определимых плоских ферм. Особенно актуальны формульные решения для регулярных ферм, включающие в расчетные формулы порядок регулярности конструкции, например, число панелей. Для вывода формул зависимости решения от числа панелей наиболее эффективен метод индукции, основанный на обобщении серии аналитических решений для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей. При этом общие члены расчетных формул получаются из решения рекуррентных уравнений с использованием возможностей операторов систем компьютерной математики, например, Maple, Maxima или Mathematica. Известны также и другие подходы к получению аналитических решений. В [4], в частности, используется метод суперпозиции, основанный на методе начальных функций, и метод, построенный с использованием функции Грина в виде ортогонального ряда. Разложение по начальным функциям с использованием системы Maple применяется и в [5] для получения аналитического решения задачи о микрополярном прямоугольнике. Балочная аналогия и метод конечных элементов при расчете пространственной модели антенны для космической связи

Kirsanov, M.

Model of a hexagonal prismatic truss. Oscillation frequency spectrum;

2023; *Construction of Unique Buildings and Structures*; **106** Article No 10601. doi: 10.4123/CUBS.106.01



использовались в [6]. В справочнике автора [7] собраны решения задач о прогибе плоских статически определимых балочных, арочных и рамных регулярных ферм. Аналитический расчет прогиба плоских регулярных ферм с произвольным числом панелей в системе Maple выполнен в [8]–[10]. Оценки первой собственной частоты в виде компактных формул получены методом индукции для ферм [11]–[13]. Проблемы существования статически определимых регулярных ферм и их расчета впервые подняли Hutchinson R.G. и Fleck N.A. в [14], [15]. Рассмотрены общие вопросы регулярных конструкций и решены задачи их оптимизации в работах Kaveh A. [16]–[19]. Некоторые проблемы периодических систем, в частности регулярных ферм, рассмотрены в [20]. Задачи нелинейных колебаний ферм решались в [21]–[23]. Нелинейные деформации и динамический отклик фермы кольцевой ферменной антенны численно изучены в [24], [25].

Значение первой (основной) частоты собственных колебаний является одной из главных динамических характеристик конструкции. Для этой частоты известны приближенные методы получения верхней и нижней оценок. Это методы, использующие значения парциальных частот, которые можно найти аналитически. Для регулярных конструкций возможно обобщение решений на произвольное число панелей фермы методом индукции [26], [27].

В настоящей работе предлагается схема статически определимой пространственной фермы призматического типа с пирамидальным куполом, и дается вывод формулы для расчета нижней границы первой собственной частоты для произвольного числа панелей. Спектр собственных частот анализируется численно.

2 Материалы и методы / Materials and Methods

2.1 Схема фермы

Ферма в виде правильной шестигранной призмы высотой $h(n-1)$ и шестигранной пирамиды купола высотой $h/2$ сверху содержит $n_s = 18n + 3$ стержней, включая шесть вертикальных опорных стоек и три горизонтальные опорные связи в углах основания, имитирующие сферический шарнир в узле A и цилиндрический шарнир в узле B (рис. 1, 2). Призма вписывается в цилиндр радиусом R .

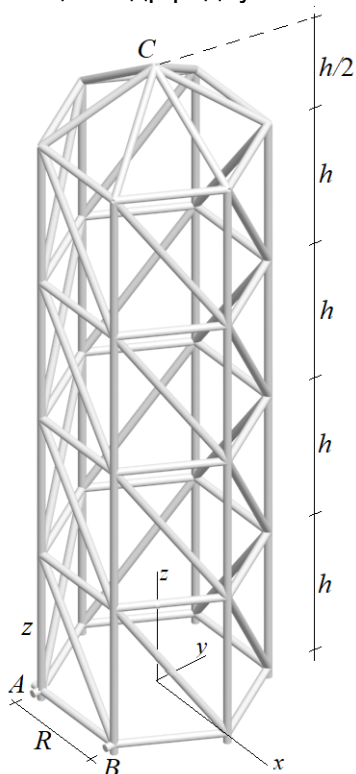


Рис. 1. – Схема фермы, $n=5$

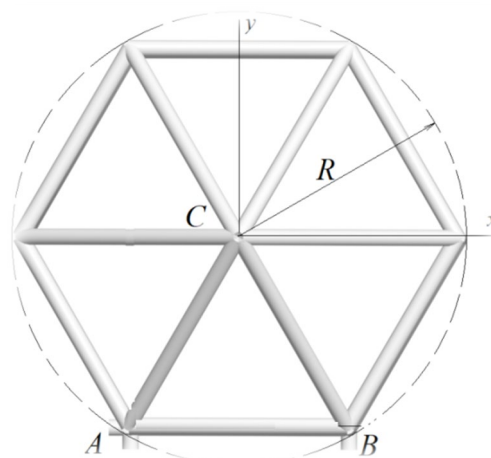


Рис. 2. – Купол конструкции

Fig. 1. – Truss scheme, $n=5$

Fig. 2. – Dome construction

Раскосы в ферме имеют длину $d = \sqrt{R^2 + h^2}$. Стержни конструкции соединены шарнирно. Для расчета усилий в стержнях в программу, написанную на языке символьной математики Maple [28], вводятся координаты узлов. Начало координат принято в основании на оси симметрии конструкции (рис. 3).

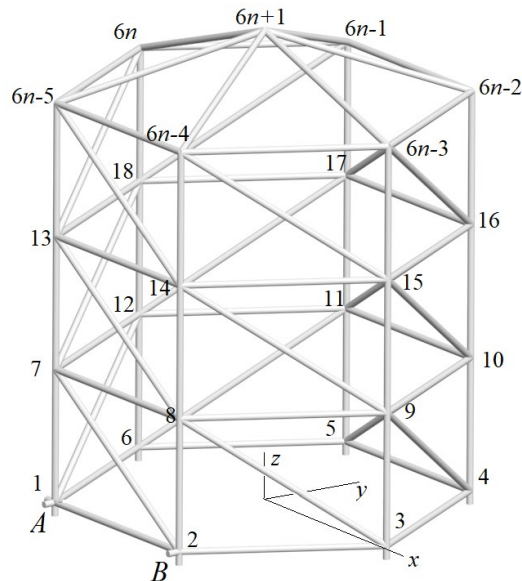


Рис. 3. – Номера узлов, $n=4$
Fig. 3. – Node numbers, $n=4$

Координаты внутренних узлов конструкции имеют вид:

$$x_{i+6(j-1)} = R \cos(\varphi i), \quad y_{i+6(j-1)} = R \sin(\varphi i), \quad z_{i+6(j-1)} = (j-1)h, \\ j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, 6, \quad \varphi = 2\pi / 6.$$

Координата вершины С:

$$x_{6n+1} = 0, \quad y_{6n+1} = 0, \quad z_{6n+1} = h(n-1/2).$$

Конфигурация решетки вводится в программу с помощью специальных упорядоченных списков номеров концов соответствующих стержней, точно также, как задаются графы в дискретной математике. Стойки конструкции, например, кодируются следующими списками вершин:

$$\Phi_{i+6(j-1)} = [i + 6(j-1), i + 6(j-1) + 6], \quad i = 1, \dots, 6, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Эти списки не ориентированы, выбор начала и конца стержня не влияет на решение. Стержни шестигранной пирамиды с вершиной в узле С кодируются аналогично:

$$\Phi_{18n-12+i} = [6(n-1) + i, 6n + 1], \quad i = 1, \dots, 6.$$

2.2 Расчет усилий в стержнях

Для расчета жесткости конструкции по формуле Максвелла – Мора необходимы величины усилий в стержнях. В статически определимой системе усилия определяются из уравнений равновесия узлов в проекции на оси координат. Система уравнений записывается в матричном виде $\mathbf{GS} = \mathbf{\Psi}$, где \mathbf{G} — матрица коэффициентов, состоящая из направляющих косинусов усилий, рассчитанных по координатам узлов и спискам номеров концов стержней Φ_i , $i = 1, \dots, n_s$,

\mathbf{S} — вектор неизвестных усилий и реакций опор, $\mathbf{\Psi}$ — вектор нагрузок на узлы. На каждый узел фермы выделяется по три строчки матрицы \mathbf{G} и три соответствующих элемента вектора



нагрузок. В элементы вектора нагрузок вида Ψ_{3i-2} , где i — номер узла, записываются нагрузки на этот узел в проекции на ось x . Элементы Ψ_{3i-1} содержат проекции сил на ось y . Вертикальные нагрузки записываются в элементы Ψ_{3i} .

По значениям координат узлов и порядку соединений стержней в узлах вычисляются проекции единичных векторов усилий в уравнениях равновесия узлов на оси координат:

$$l_{x,i} = (x_{\Phi_{i,1}} - x_{\Phi_{i,2}}) / l_i, \quad l_{y,i} = (y_{\Phi_{i,1}} - y_{\Phi_{i,2}}) / l_i, \quad l_{z,i} = (z_{\Phi_{i,1}} - z_{\Phi_{i,2}}) / l_i, \quad i = 1, \dots, n_s,$$

где $l_i = \sqrt{l_{x,i}^2 + l_{y,i}^2 + l_{z,i}^2}$ — длина стержня i . В число стержней включены опорные стержни в основании конструкции. Матрица коэффициентов уравнений равновесия в проекциях заполняется по строкам. Каждые три строки соответствуют уравнениям проекций на оси x , y и z соответственно:

$$\begin{aligned} G_{3\Phi_{i,1}-2,i} &= l_{x,i} / l_i, \quad G_{3\Phi_{i,1}-1,i} = l_{y,i} / l_i, \quad G_{3\Phi_{i,1},i} = l_{z,i} / l_i, \\ G_{3\Phi_{i,2}-2,i} &= -l_{x,i} / l_i, \quad G_{3\Phi_{i,2}-1,i} = -l_{y,i} / l_i, \quad G_{3\Phi_{i,2},i} = -l_{z,i} / l_i. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что проекции усилий, приложенных к разным концам одного стержня, имеют противоположные знаки.

2.3 Собственная частота колебаний

Для расчета частот колебаний конструкции используется наиболее распространенная модель, в которой масса фермы сосредотачивается только в ее узлах равномерно по всей конструкции. Принимается, что у каждой массы две степени свободы. Колебания масс по вертикальной оси z не учитываются. Число степеней свободы рассматриваемой модели фермы $K = 2(6n + 1)$.

Система дифференциальных уравнений динамики грузов имеет матричный вид:

$$\mathbf{M}_K \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}_K \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{U} — вектор горизонтальных перемещений масс $1, \dots, K$, \mathbf{D}_K — матрица жесткости системы, \mathbf{M}_K — матрица инерции, $\ddot{\mathbf{U}}$ — вектор ускорений. Матрица инерции пропорциональна единичной матрице $\mathbf{M}_K = m\mathbf{I}_K$, так как массы одинаковые. Матрица податливости \mathbf{B}_K , обратная к матрице жесткости \mathbf{D}_K , определяется по формуле Максвелла-Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{n_s} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF_{\alpha}), \quad (2)$$

где $S_{\alpha}^{(i)}$ — усилие в стержне α от действия единичной силы в узле i , приложенной по направлению колебаний. Умножение векторного уравнения (1) слева на матрицу \mathbf{B}_K с учетом замены $\ddot{\mathbf{U}} = -\omega^2 \mathbf{U}$, соответствующей гармоническим колебаниям, сводит задачу к проблеме собственных чисел матрицы \mathbf{B}_K : $\mathbf{B}_K \mathbf{U} = \lambda \mathbf{U}$, где $\lambda = 1 / (m\omega^2)$ — собственное число матрицы \mathbf{B}_K , ω — собственная частота колебаний. Отсюда получается формула для вычисления частоты колебаний: $\omega = \sqrt{1 / (m\lambda)}$.

Усилия $S_{\alpha}^{(i)}$ в стержнях фермы, входящие в элементы матрицы \mathbf{B}_K , определяются из решения системы уравнений узлов фермы. В систему уравнений равновесия входят и реакции девяти опор.

Получить аналитические решения для фермы с произвольным числом панелей в общем случае можно только численно. Известны две оценки первой частоты: оценка снизу по формуле Донкерлея и сверху по методу Рэлея.

Нижняя оценка первой частоты колебаний получается по формуле Донкерлея:



$$\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^K \omega_i^{-2}, \quad (3)$$

где ω_i — парциальная частота колебания массы m , расположенной в узле i . При вычислении парциальных частот ω_i уравнение (1) принимает скалярную форму:

$$m\ddot{u}_i + d_i u_i = 0,$$

где u_i — перемещение массы, \ddot{u}_i — вектор ускорений, d_i — скалярный коэффициент жесткости (i — номер массы). Частота колебаний груза $\omega_i = \sqrt{d_i / m}$. Коэффициент жесткости, обратный коэффициенту податливости, определяется по формуле Максвелла – Мора:

$$\delta_i = 1 / d_i = \sum_{\alpha=1}^{n_s} (\tilde{S}_\alpha^{(i)})^2 l_\alpha / (EF_\alpha). \quad (4)$$

Здесь обозначено $\tilde{S}_\alpha^{(i)}$ — усилия в стержне с номером α от действия единичной силы, приложенной к узлу i . Из (3) и (4) следует:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^K \omega_i^{-2} = m \sum_{i=1}^K \frac{1}{d_i} = m \sum_{i=1}^K \delta_i = m \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha=1}^{n_s} (\tilde{S}_\alpha^{(i)})^2 l_\alpha / (EF_\alpha) = m \Sigma_n.$$

Сечение вертикальных стоек γF отличается от сечений F остальных стержней коэффициентом $\gamma > 1$. Последовательный расчет сумм $\Sigma_n = \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha=1}^{n_s} (\tilde{S}_\alpha^{(i)})^2 l_\alpha / (EF_\alpha)$ при $n = 2, 3, 4, \dots$ дает:

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= (2144R^3 + 65c^3 + 1680d^3 + 9996h^3 / \gamma) / (12R^2EF), \\ \Sigma_3 &= 16840R^3 + 287c^3 + 14880d^3 + 193578h^3 / \gamma) / (36R^2EF), \\ \Sigma_4 &= 32048R^3 + 379c^3 + 29520d^3 + 659024h^3 / \gamma) / (36R^2EF), \\ \Sigma_5 &= 17352R^3 + 157c^3 + 16320d^3 + 552866h^3 / \gamma) / (12R^2EF), \dots \end{aligned}$$

где $c = \sqrt{4R^2 + h^2}$. В общем случае: $\Sigma_n = (C_1R^3 + C_2c^3 + C_3d^3 + C_4h^3 / \gamma) / (R^2EF)$.

Для получения общих членов последовательностей коэффициентов в этих выражениях потребовалось рассчитать в аналитическом виде не менее десяти ферм. Для меньшей длины последовательности операторы Maple общие члены не находят. В результате получены следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} C_1 &= 2(300n^2 - 199n + 2) / 9, \\ C_2 &= (92n + 11) / 36, \\ C_3 &= 20(10n + 1)(n - 1) / 3, \\ C_4 &= (1338n^4 + 624n^3 - 3742n^2 + 1679n + 204) / 18. \end{aligned}$$

В результате нижняя оценка для первой частоты по Донкерлею принимает вид:

$$\omega_D = R \sqrt{\frac{EF}{m(C_1R^3 + C_2c^3 + C_3d^3 + C_4h^3 / \gamma)}}. \quad (5)$$

3 Результаты и обсуждения / Results and Discussion

3.1 Пример

Оценить погрешность полученного приближенного аналитического решения можно на примере. Кривые на рисунке 4 показывают изменение частоты ω_D в зависимости от числа панелей, вычисленной по формуле (5) и частоты ω_1 , полученной численно, как минимальная частота спектра собственных частот конструкции при $h = 3\text{ м}$, $R = 5\text{ м}$, $\gamma = 1$. Масса грузов в узлах равна 500 кг. Модуль упругости стали, из которой изготовлены все стержни конструкции, принят равным $E = 2,1 \cdot 10^5\text{ МПа}$, площадь поперечных сечений $F = 9\text{ см}^2$. Первая частота ω_1 собственных колебаний фермы, полученная численно, и оценка ω_D Донкерлея (5) сближаются с увеличением числа панелей. Для уточнения степени полученных приближений вводится относительная погрешность $\varepsilon_D = |\omega_D - \omega_1| / \omega_1$ (рис. 5).

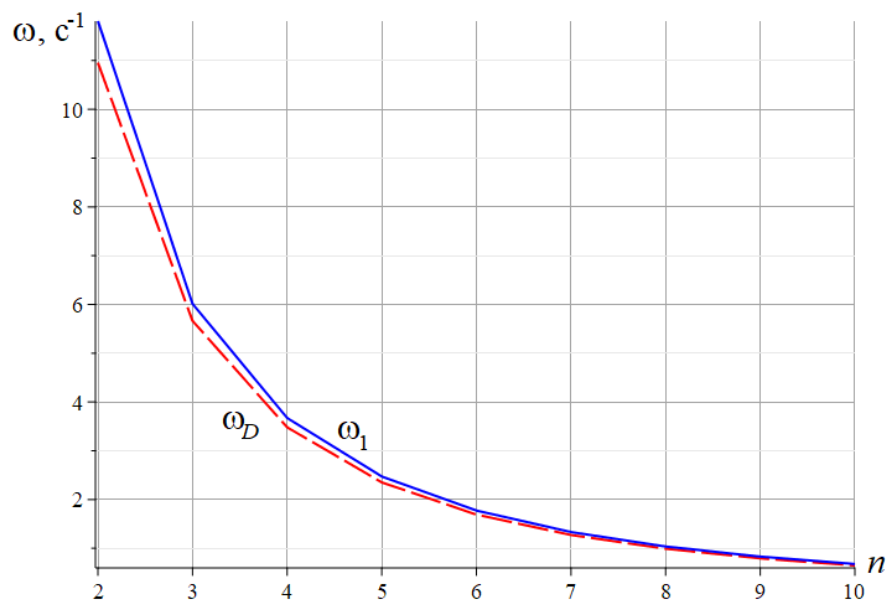


Рис. 4. – Первая частота колебаний, полученная двумя способами в зависимости от числа панелей

Fig. 4. - The first oscillation frequency obtained in two ways depending on the number of panels

В зависимости от числа панелей погрешность решения по Донкерлею меняется от 7%, при $n = 2$, до 4%. Замечено также, что степень приближения решения по Донкерлею несколько увеличивается при увеличении высоты конструкции.

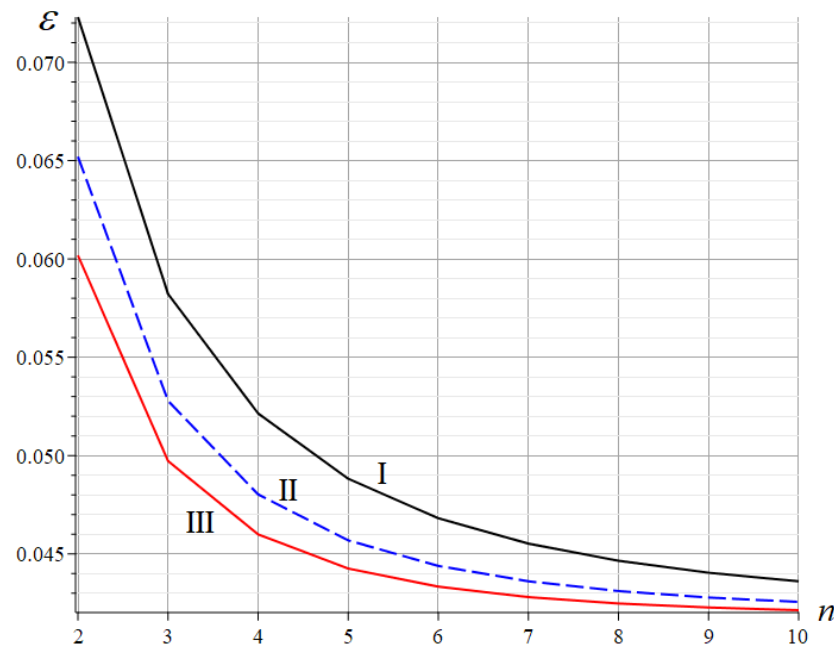


Рис. 5. – Относительная погрешность полученной оценки (5). I — $h=3$ м; II — $h=4$ м; III — $h=5$ м
 Fig. 5. – Relative error of the obtained estimate (5). I — $h=3$ m; II — $h=4$ m; III — $h=5$ m

Анализ выведенной формулы показывает, что на значение первой частоты колебаний конструкции башенного типа при малых высотах h соотношение площадей сечения стержней практически не влияет (рис. 6). Эти же графики показывают, что частота колебаний с увеличением высоты панели падает.

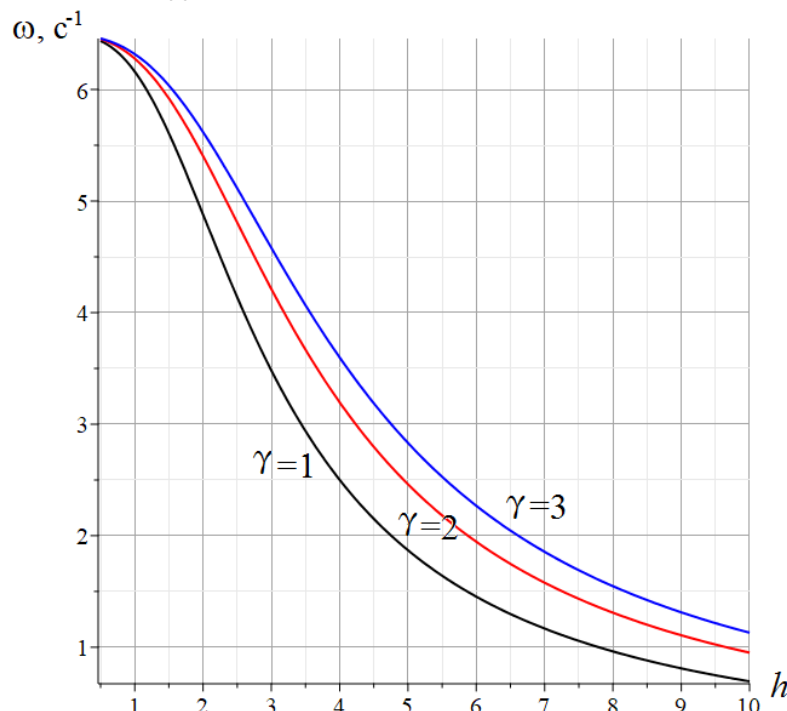


Рис. 6. – Зависимость основной частоты от высоты панели, $n=4$
 Fig. 6. – The dependence of the fundamental frequency on the height of the panel, $n=4$

3.2 Спектр частот регулярных ферм

Значения высших частот собственных колебаний конструкции редко используются на практике. Как правило, при анализе резонансных явлений в расчет берутся несколько первых частот. Аналитически рассчитать эти величины в общем случае не удастся, однако анализ распределения частот в спектре может выявить некоторые закономерности, полезные для



практических расчетов, особенно для ферм с большим числом панелей. На рисунке 7 приведены результаты расчета частот тринадцати ферм различного порядка.

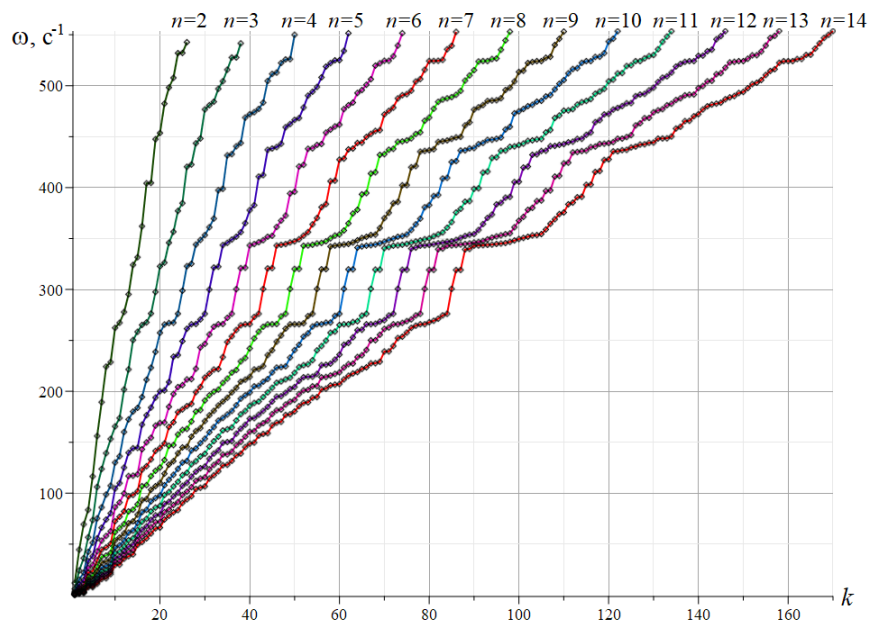


Рис. 7. Спектры частот регулярных ферм, $h=3$ м
Fig. 7. Frequency spectra of regular trusses, $h=3$ m

Каждая кривая соответствует спектру частот фермы заданного порядка, ординаты точек на ней — частоты, абсциссы — номера частот в спектре. Спектр фермы при $n=2$ содержит $K = 2(6n + 1) = 26$ частот, в спектре фермы порядка $n = 14$ содержится 170 частот.

Здесь можно заметить некоторые частоты, одинаковые для всех ферм — спектральные константы [29], [30], а также частоты, имеющие один и тот же относительный номер в спектрах ферм различного порядка и лежащие на кривых, стремящихся к некоторому постоянному значению (спектральные изолинии) (рис. 8).

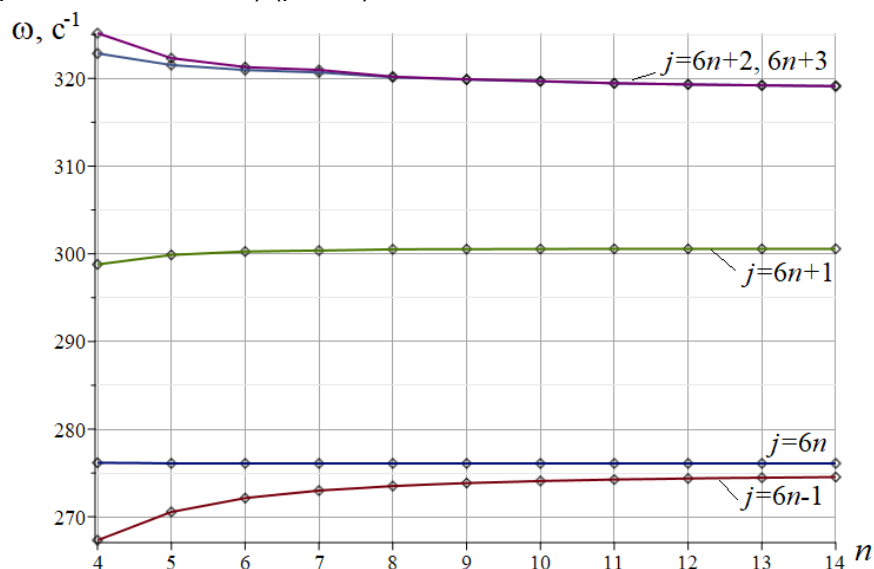


Рис. 8. – Спектральные изолинии и спектральная константа
Fig. 8. – Spectral isolines and spectral constant

На рисунке 8 параметр j — номер частоты в спектре (индекс кривой). Например, на кривой $j = 6n + 1$ первая точка — это частота с номером $j = 6 \cdot 4 + 1 = 25$ в упорядоченном спектре частот фермы порядка $n=4$, следующая точка — частота с номером $j = 6 \cdot 5 + 1 = 31$ в спектре фермы порядка 5 и т. д. Кривая $j = 6n$ — это спектральная константа. Начиная с фермы



некоторого порядка, соответствующие частоты не меняются (в пределах погрешности вычислений). Серия расчетов показала, что значение номера частоты в спектральной константе (здесь это индекс bl) не зависит от порядка фермы. Значение же соответствующей частоты меняется при изменении размеров конструкции. Следует также отметить, что и высшая частота колебаний всех ферм рассмотренного семейства почти не меняется. Точки высших частот на рисунке 7 также образуют изолинию с индексом $j = K$, стремящуюся к некоторой константе снизу.

Выявление закономерностей распределения частот в спектрах регулярных систем вызвано не только теоретическим интересом. Для практических расчетов реальных конструкций, в которых возможны резонансные явления на высших частотах, важно знать границы изменения собственных частот и области сгущения частот, из которых желательно вывести спектр частот проектируемой конструкции.

Предложена схема статически определимой фермы пространственной осесимметричной конструкции башенного типа. Ферма имеет форму правильной шестигранной призмы с произвольным числом панелей по высоте. Такая конструкция может быть использована как опора или ограждающее сооружение. Ферма внешне статически неопределима. Реакции девяти опорных стержней можно найти только из решения совместной системы уравнений равновесия всех узлов в проекциях на оси координат одновременно с усилиями в стержнях. Но в настоящей работе решена более сложная задача. С достаточной степенью точности найдена аналитическая зависимость первой частоты собственных колебаний от размеров фермы и числа панелей. Это дает возможность применять полученную формулу для широкого класса конструкций предложенного типа. Формула практична. Без какого-либо ущерба для точности ее можно использовать при весьма большом числе панелей в конструкции, то есть именно в тех случаях, где требуются значительные вычислительные ресурсы и наиболее вероятно накопление ошибок в численных расчетах.

4 Заключение / Conclusions

Основные результаты работы:

1. Предложена схема статически определимой фермы пространственной осесимметричной конструкции башенного типа с формой правильной шестигранной призмы и с произвольным числом панелей по высоте.
2. Выведена аналитическая зависимость первой частоты собственных колебаний от размеров фермы и числа панелей.
3. В спектрах собственных частот семейства ферм различного порядка обнаружены упорядоченные изолинии, выявляющие область сгущения высших частот и спектральные константы.

5 Благодарности / Acknowledgements

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ 22-21-00473.

References

1. Ignatiev, V.A., Ignatiev, A.V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Publishing House ASV. Moscow, 2022.
2. Ignatyev, A. V., Ignatyev, V.A. On the Efficiency of the Finite Element Method in the Form of the Classical Mixed Method. *Procedia Engineering*. 2016. 150. Pp. 1760–1765. DOI:10.1016/J.PROENG.2016.07.167.
3. Vatin, N., Havula, J., Martikainen, L., Sinelnikov, A.S., Orlova, A. V., Salamakhin, S. V. Thin-walled cross-sections and their joints: Tests and FEM-modelling. *Advanced Materials Research*. 2014. 945–949. Pp. 1211–1215. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMR.945-949.1211.
4. Goloskokov, D.P., Matrosov, A. V. Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates. *AIP Conference Proceedings*. 2018. 1959. DOI:10.1063/1.5034687.
5. Matrosov, A. V. An exact analytical solution for a free-supported micropolar rectangle by the method of initial functions. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*. 2022. 73(2). DOI:10.1007/S00033-022-01714-Y.
6. Liu, M., Cao, D., Zhu, D. Coupled vibration analysis for equivalent dynamic model of the space antenna truss. *Applied Mathematical Modelling*. 2021. 89. Pp. 285–298. DOI:10.1016/J.APM.2020.07.013.

Kirsanov, M.

Model of a hexagonal prismatic truss. Oscillation frequency spectrum;

2023; *Construction of Unique Buildings and Structures*; **106** Article No 10601. doi: 10.4123/CUBS.106.01



7. Kirsanov, M. *Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020.
8. Ovsyannikova, V.M. Dependence of deformations of a trapezous truss beam on the number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2020. 26(3). Pp. 13–20. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44110286> (date of application: 11.03.2021).
9. Ilyushin, A.S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame. *Structural mechanics and structures*. 2019. 22(3). Pp. 29–38. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=41201106> (date of application: 27.02.2021).
10. Dai, Q. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. *AlfaBuild*. 2021. 17. Pp. 1701. DOI:10.34910/ALF.17.1.
11. Sviridenko, O. V., Komerzan, E. V. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101. Pp. 10101. DOI:10.4123/CUBS.101.1.
12. Kirsanov, M.N., Tinkov, D. V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2019. (3). Pp. 284–292. DOI:10.22227/1997-0935.2019.3.284-292.
13. Petrenko, V.F. The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*. 2021. (20). Pp. 2001. DOI:10.34910/ALF.20.1.
14. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. Microarchitected cellular solids - The hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005. 85(9). Pp. 607–617. DOI:10.1002/zamm.200410208.
15. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. 54(4). Pp. 756–782. DOI:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
16. Kaveh, A., Rahami, H., Shojaei, I. Swift Analysis of Civil Engineering Structures Using Graph Theory Methods. 2020. 290. DOI:10.1007/978-3-030-45549-1. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-45549-1> (date of application: 11.03.2022).
17. Kaveh, A., Hosseini, S.M., Zaerrega, A. Size, Layout, and Topology Optimization of Skeletal Structures Using Plasma Generation Optimization. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering* 2020 45:2. 2020. 45(2). Pp. 513–543. DOI:10.1007/S40996-020-00527-1. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s40996-020-00527-1> (date of application: 4.03.2022).
18. Kaveh, A., Zolghadr, A. Meta-heuristic methods for optimization of truss structures with vibration frequency constraints. 229(10). Springer-Verlag Wien, 01-10-2018.
19. Kaveh, A., Dadras, A., Montazeran, A.H. Chaotic enhanced colliding bodies algorithms for size optimization of truss structures. *Acta Mechanica*. 2018. 229(7). Pp. 2883–2907. DOI:10.1007/s00707-018-2149-8.
20. Zok, F.W., Latture, R.M., Begley, M.R. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. 96. Pp. 184–203. DOI:10.1016/j.jmps.2016.07.007. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>.
21. Ufimtsev, E., Voronina, M. Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations. *Procedia Engineering*. 2016. 150. Pp. 1891–1897. DOI:10.1016/J.PROENG.2016.07.188.
22. Ufimtcev, E. Dynamic Calculation of Nonlinear Oscillations of Flat Trusses Part 2: Examples of Calculations. *Procedia Engineering*. 2017. 206. Pp. 850–856. DOI:10.1016/j.proeng.2017.10.562. URL: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.10.562>.
23. Galishnikova V.V. Nonlinear numerical stability analysis of space trusses. EG-ICE 2010 - 17th international workshop on intelligent computing in engineering. 2019. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43274656> (date of application: 6.01.2023).
24. Li, Y., Wei, J., Dai, L. Structural design and dynamic analysis of new ultra-large planar deployable antennas in space with locking systems. *Aerospace Science and Technology*. 2020. 106. DOI:10.1016/j.ast.2020.106082.
25. Wu, Y., Cao, D., Liu, M., Li, Y., Chen, Z. Natural characteristic and vibration analysis of nonlinear articulated multi-beam ring structure for modeling ring truss antenna under base excitation. *Applied Mathematical Modelling*. 2022. 108. Pp. 787–806. DOI:10.1016/J.APM.2022.04.027.
26. Vorobev, O.V. Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. 92(7). Pp. 9204–9204. DOI:10.18720/CUBS.92.4. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2020.92.4> (date of application: 17.04.2021).
27. Vorobyev, O. About methods of obtaining analytical solution for eigenfrequencies problem of trusses. *Structural mechanics and structures*. 2020. 1(24). Pp. 25–38. URL: http://vuz.exponenta.ru/PDF/NAUKA/elibrary_42591122_21834695.pdf.
28. Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N., Serdjuk, D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2020. 4(4). Pp. 510–517. DOI:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.

Kirsanov, M.

Model of a hexagonal prismatic truss. Oscillation frequency spectrum;

2023; *Construction of Unique Buildings and Structures*; **106** Article No 10601. doi: 10.4123/CUBS.106.01



29. Kirsanov, M.N. Trihedral Rod Pyramid: Deformations and Natural Vibration Frequencies. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 105(6). Pp. 10401–10401. DOI:10.4123/CUBS.104.1. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2022.105.1> (date of application: 6.01.2023).
30. Kirsanov, M.N. Deformations and natural frequency spectrum of a planar regular truss with a triangular lattice. *Structural mechanics and structures*. 2022. (1(32)). Pp. 57–68. DOI:10.36622/VSTU.2022.32.1.005.