

**ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ДЕФОРМАЦИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ
МОДЕЛИ ФЕРМЫ Г – ОБРАЗНОЙ ОПОРЫ**

М. Н. Кирсанов

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Россия, г. Москва

Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин,
тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

Предлагается математическая модель пространственной статически определимой фермы для крепления дорожных знаков. Приводится индуктивный алгоритм вывода формул для расчета прогиба конструкции под действием вертикальной и боковой нагрузки в зависимости от числа панелей. Дается картина распределения усилий по стержням фермы. Для расчета прогибов используется формула Максвелла – Мора. Вывод общих формул основан на обобщении серии решений для отдельных ферм на произвольное число панелей в стойке конструкции и консольной ее части. Решение системы уравнений равновесия узлов для нахождения усилий в стержнях и аналитические преобразования производятся в системе символьной математики Maple. Найдены нелинейные асимптотики решений.

Ключевые слова: пространственная ферма, кронштейн, индукция, Maple, асимптотика, прогиб

Введение. Для крепления дорожных знаков, указателей, освещения над проезжей частью дороги используются либо фермы рамного типа над всей проезжей частью, либо Г - образные кронштейны на обочине [1]. В последнем случае жесткость конструкции вполне может обеспечивать пространственная ферма. Плоская модель кронштейна позволяет с достаточной точностью рассчитать прогиб консольной части от нагрузки, действующей в плоскости фермы, например, вертикальной нагрузки. Для расчета боковых смещений от горизонтальной (ветровой) нагрузки плоская модель не предназначена. В настоящей работе предлагаются пространственная статически определимая модель кронштейна и формулы для определения ее деформаций. Ферма регулярная с двумя независимыми параметрами регулярности — числом панелей в консоли и числом панелей по высоте стойки. В большинстве случаев подобные системы рассчитываются на деформации в численных пакетах на основе метода конечных элементов [2,3]. Однако для регулярных статически определимых конструкций применим и аналитический метод, реализовать который можно в какой-либо системе компьютерной математики. В [4-8] в системе Maple методом индукции получены аналитические решения для расчета деформаций плоских ферм. Формулы зависимости нижней границы первой собственной частоты колебаний ферм от числа панелей выведены в [9, 10]. Основные теоретические вопросы существования регулярных статически определимых ферм и их анализ рассмотрены в статьях Р. Хатчинсона и Н. Флека [11,12]. Плоские схемы регулярных ферм и формулы для расчета прогиба, смещения опор и усилий в некоторых стержнях в зависимости от числа панелей содержатся в справочнике автора [13].

Алгоритмы аналитического расчета строительных конструкций в системе Maple с применением разложений решений в ряды приведены в [14,15].

Схема конструкции. Конструкция опоры состоит из стойки с m панелями по высоте и консольной части с n панелями по длине (рис. 1). Вертикальные панели в стойке — четырехгранные пирамиды с основанием $2h \times 2b$ и высотой a , (рис. 2). При $a=h$ из таких же панелей состоит консоль. В основании конструкции одна опора A — сферический шарнир, моделируемый тремя взаимно перпендикулярными стержнями, опора B — шарнир цилиндрический (два стержня), третья опора — вертикальная стойка C .

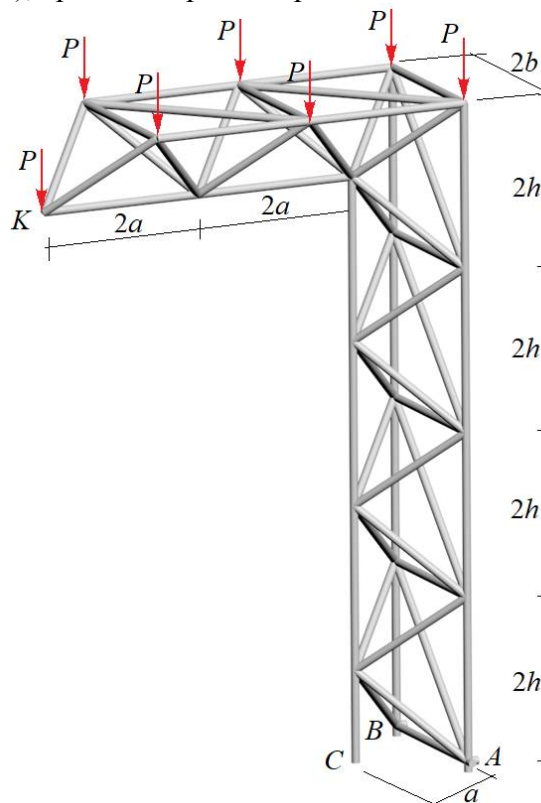


Рис. 1. Равномерно распределенная узловая вертикальная нагрузка, $n=2$, $m=4$

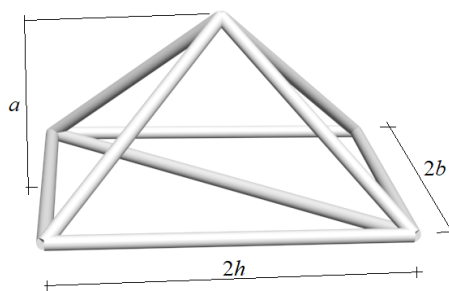


Рис. 2. Панель конструкции

В конструкции содержится $n_s = 9(n + m) + 6$ стержней, включая шесть стержней опорных связей. Расчет усилий проводится в системе Maple в символьной форме методом вырезания узлов.

Расчет усилий. Начало координат выбирается в основании конструкции в плоскости симметрии (на середине стержня AB). Для расчета усилий используется программа [16], написанная на языке Maple. В программу вводятся координаты узлов и списки Φ_i , $i = 1, \dots, n_s$, содержащие номера концов стержней.

Значения элементов матрицы коэффициентов системы линейных уравнений равновесия узлов \mathbf{G} вычисляются по спискам концов стержней и данным координат узлов:

$$g_{x,i} = (x_{\Phi_{i,1}} - x_{\Phi_{i,2}}) / l_i, \quad g_{y,i} = (y_{\Phi_{i,1}} - y_{\Phi_{i,2}}) / l_i, \quad g_{z,i} = (z_{\Phi_{i,1}} - z_{\Phi_{i,2}}) / l_i, \quad i = 1, \dots, n_s,$$

где обозначено: $l_i = \sqrt{(x_{\Phi_{i,1}} - x_{\Phi_{i,2}})^2 + (y_{\Phi_{i,1}} - y_{\Phi_{i,2}})^2 + (z_{\Phi_{i,1}} - z_{\Phi_{i,2}})^2}$ — длина стержня с номером i .

В число стержней входят и шесть опорных стержней, моделирующие опоры A, B, C . Элементы матрицы \mathbf{G} вводятся по строкам. В трех последовательных строках матрицы расположены проекции на оси x, y, z единичных векторов усилий в стержнях, соединенных в узле i :

$$\begin{aligned} G_{3\Phi_{i,1}-2,i} &= g_{x,i}, & G_{3\Phi_{i,1}-1,i} &= g_{y,i}, & G_{3\Phi_{i,1},i} &= g_{z,i}, \\ G_{3\Phi_{i,2}-2,i} &= -g_{x,i}, & G_{3\Phi_{i,2}-1,i} &= -g_{y,i}, & G_{3\Phi_{i,2},i} &= -g_{z,i}. \end{aligned}$$

Система уравнений равновесия узлов записывается в матричном виде: $\mathbf{GS} = \mathbf{T}$, где \mathbf{S} вектор длиной n_s всех неизвестных усилий, включая и шесть реакций опор. Такую же длину имеет вектор нагрузок \mathbf{T} . Проекции внешних сил, приложенных к узлу i , на ось x записываются в элементы вектора T_{3i-2} , на ось y — в элементы T_{3i-1} . Проекции сил на вертикаль записываются в элементы T_{3i} , $i = 1, \dots, K$. Решение системы уравнений $\mathbf{GS} = \mathbf{T}$ находится методом обратной матрицы: $\mathbf{S} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{T}$ в символьной форме.

Картина распределения усилий в стержнях фермы в случае равномерной вертикальной узловой нагрузки по консольной части фермы дана на рисунке 3.

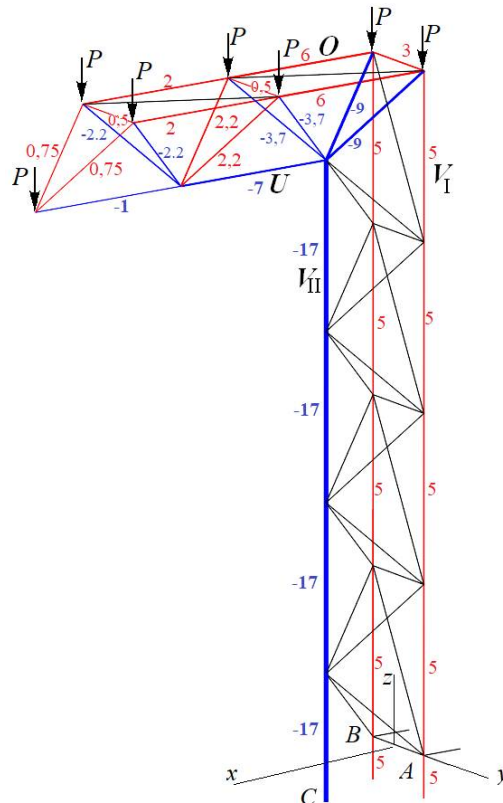


Рис. 3. Распределение усилий в стержнях фермы, $a = h = 2\text{ м}$, $b = 1\text{ м}$, $n = 2$, $m = 4$

Наибольшие сжимающие усилия (выделены синим цветом) приходятся на стержни внутренней стойки, наиболее растянутые (красный цвет отрезков) находятся в основании

консольной части. Раскосы стойки при такой нагрузке оказываются ненагруженными (тонкие черные отрезки). Значения усилий, отнесенные к величине P , даны округленными до двух знаков.

Формулы для усилий в характерных стержнях для произвольного числа панелей выводятся методом индукции по результатам расчетов ряда ферм с различным числом панелей.

Для вертикальной нагрузки усилия V_1 и V_2 в стержнях стоек и усилия O, U от числа панелей m по высоте и размеров конструкции не зависят:

$$U = P(1 - 2n^2), \quad O = 2P, \quad V_1 = 6P, \quad V_2 = -P(2n^2 + 4n + 1)P.$$

Расчет прогиба. Вертикальное смещение узла K консоли от действия вертикальной нагрузки (рис. 1) вычисляется по формуле Максвелла – Мора, учитывающей только продольные усилия в стержнях:

$$\Delta_{m,n} = \sum_{j=1}^{n_s-6} \frac{S_j s_j l_j}{EF}, \quad (1)$$

где S_j — усилие от действия нагрузки интенсивностью P , s_j — усилие от единичной вертикальной силы, приложенной к узлу K консоли, в котором вычисляется прогиб, l_j — длина стержня, EF — жесткость стержней, принятая одинаковой для стержней всей конструкции. Геометрия конструкции зависит от двух независимых параметров регулярности m и n . Индукция в таком случае проводится в два этапа: сначала по одному параметру при фиксированном втором, затем выполняется обобщение полученных формул по второму параметру. Расчет величины прогиба ферм с различным числом панелей n при $m = 1$ дает следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Delta_{1,1} &= P(10a^3 + 2b^3 + 3c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_{1,2} &= 2P(73a^3 + 12b^3 + 15c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_{1,3} &= 12P(46a^3 + 6b^3 + 7c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_{1,4} &= 2P(739a^3 + 80b^3 + 90c^3) / (h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Здесь обозначено $c = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$. Операторы системы компьютерной математики Maple позволяют вычислить общие члены последовательностей коэффициентов в этих формулах при $m=1$:

$$\Delta_{1,n} = P(C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 c^3) / (h^2 EF), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= 3n^4 + 10n^3 + 5n^2 - 4n + 6, \\ C_2 &= 2n^3 + 2n^2, \\ C_3 &= 2n^3 + 3n^2 + n. \end{aligned} \quad (3)$$

Расчеты при других значениях m показывают, что коэффициенты C_2, C_3 не зависят от m , а последовательность коэффициентов при других значениях m имеет вид:

$$\begin{aligned} m = 2, \quad C_1 &= 3n^4 + 22n^3 + 29n^2 + 4n + 6, \\ m = 3, \quad C_1 &= 3n^4 + 34n^3 + 53n^2 + 12n + 6, \\ m = 4, \quad C_1 &= 3n^4 + 46n^3 + 77n^2 + 20n + 6, \dots \end{aligned}$$

Обобщением этих решений по m является общее решение:

$$C_1 = 3n^4 + 2(6m - 1)n^3 + (24m - 19)n^2 + 4(2m - 3)n + 6.$$

Горизонтальная нагрузка. Моделируя боковую ветровую нагрузку равномерно распределенной нагрузкой по узлам одной стороны фермы, найдем зависимость горизонтального (по оси y) смещения узла K от числа панелей (рис. 4).

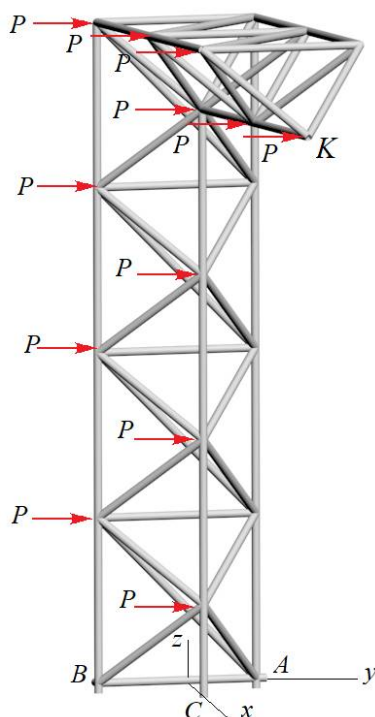


Рис. 4. Равномерно распределенная горизонтальная нагрузка, $n=2$, $m=4$

Как и в случае вертикальной нагрузки для получения общего решения, справедливого при любых m и n , необходимо провести индукцию в два этапа. Расчет горизонтального смещения при $m=1$ дает следующие выражения для смещения при различном числе панелей в консольной части фермы:

$$\begin{aligned} \delta_{1,1} &= P(10a^3 + 9b^3 + 14c^3 + 8d^3) / (b^2 EF), \\ \delta_{1,2} &= P(164a^3 + 99b^3 + 129c^3 + 144d^3) / (2b^2 EF), \\ \delta_{1,3} &= 2P(146a^3 + 73b^3 + 88c^3 + 120d^3) / (b^2 EF), \\ \delta_{1,4} &= 5P(296a^3 + 129b^3 + 149c^3 + 224d^3) / (2b^2 EF), \dots \end{aligned}$$

где $d = \sqrt{a^2 + b^2}$. Обобщая эти решения по числу панелей n в консоли, получаем при $m=1$:

$$\delta_{1,n} = P(C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 c^3 + C_4 d^3) / (b^2 EF), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= n^4 + 20n^3 / 3 + 4n^2 - 5n / 3, \\ C_2 &= 4n^3 + 4n^2 + n / 2 + 1 / 2, \\ C_3 &= 4n^3 + 13n^2 / 2 + 3n + 1 / 2, \\ C_4 &= 8n^3 + 4n^2 - 4n. \end{aligned}$$

при $m=2$ эти коэффициенты имеют вид:

$$C_1 = n^4 + 32n^3 / 3 + 6n^2 + 13n / 3 + 12,$$

$$C_2 = 12n^3 + 8n^2 - 13n / 2 + 1,$$

$$C_3 = 8n^3 + 29n^2 / 2 + 9n + 2,$$

$$C_4 = 16n^3 + 8n^2 - 12n.$$

Продолжая последовательности этих коэффициентов до $m=10$ и находя их общие члены, получаем в итоге зависимость смещения (4) от m и n с коэффициентами:

$$C_1 = n^4 + 4(3m+2)/3n^3 + 2(m+1)n^2 + (8m^3 - 12m^2 - 2m + 1)/3n + m^4 - m^2,$$

$$C_2 = 4(2m-1)n^3 + 4mn^2 - (4m^2 + 2m - 7)/2n + m/2,$$

$$C_3 = 4mn^3 + (16m-3)/2n^2 + (m^2 + 3m - 1)n + m^2/2,$$

$$C_4 = 8mn^3 + 4mn^2 - 2m(m+1)n.$$

Кривые полученной зависимости смещения от числа панелей в стойке представлены на рисунке 5. Введена безразмерная величина смещения вершины K : $\tilde{\delta} = \delta EF / (P_s L)$, где $P_s = 2P(n+m)$ — суммарная боковая нагрузка, $L = 2na$ — длина консоли.

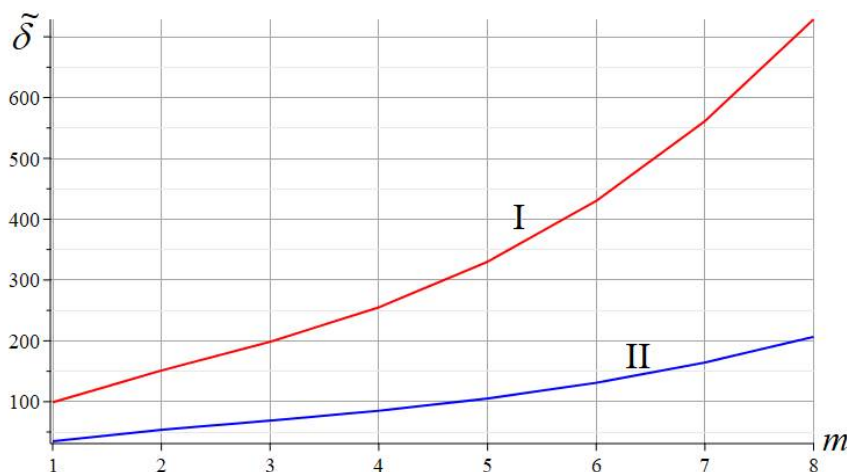


Рис. 5. Зависимость относительного горизонтального смещения узла K от числа панелей в стойке, $a = h = 1m$, $n = 2$; I — $b=0,4m$, II — $b=0,8m$

Эти кривые имеют кубическую асимптотику по числу m , вычислить которую можно средствами Maple: $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\delta} / m^3 = a^2 / (4b^2n)$. Асимптотика этого же решения по числу панелей в консоли квадратичная: $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\delta} / n^2 = a^2 / (4b^2)$. Эта асимптотика не зависит от числа панелей в стойке сооружения.

Заключение. Предложена схема статически определимой регулярной пространственной фермы. В отличие от плоских моделей пространственная схема позволяет производить расчеты конструкции на более широкий класс нагрузок. Выведены формулы для усилий в некоторых стержнях и зависимости вертикального прогиба и горизонтального смещения концевой узла консоли от числа панелей в стойке и консоли.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

Библиографический список

1. Кирсанов М.Н. Расчет Г-образной фермы крепления дорожных знаков и оборудования // Научный журнал строительства и архитектуры. 2019. № 1 (53). С. 84-92.
2. Козлов А.В., Козлов В.А. Напряженно-деформированное состояние составной конструкции с учетом податливости на сдвиг между железобетонной плитой и стальной балкой // Строительная механика и конструкции. 2021. №2 (29). С. 48–61.
3. Ефрюшин С.В., Ефанов А.Р. Оценка эффективности применения легких стальных тонкостенных конструкций в башенных сооружениях // Строительная механика и конструкции. 2021. №3 (30). С. 26–48.
4. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // AlfaBuild. 2021. 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
5. Kitaev, S.S. Derivation of the formula for the deflection of a cantilevered truss with a rectangular diagonal grid in the computer mathematics system Maple // Postulat. 2018. 5–1. Pp. 43. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1477> (date of application: 3.03.2021).
6. Ilyushin, A. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame // Structural mechanics and structures. 2019. 3(22). Pp. 29–38. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_41201106_54181191.pdf.
7. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2021. №2 (29). С. 29–37.
8. Комерзан Е.В., Лушнов Н.А., Осипова Т.С. Аналитический расчет прогиба плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2022. №2(33). С. 17-25. DOI 10.36622/VSTU.2022.33.2.002
9. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss; 2021; AlfaBuild; 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
10. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
11. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. The structural performance of the periodic truss. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. 54(4). Pp. 756–782. doi:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
12. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. Microarchitected cellular solids - The hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. 85(9). Pp. 607–617. doi:10.1002/zamm.200410208.
13. Kirsanov M. N. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing, 2019. 206 p.
14. Goloskokov, D.P., Matrosov, A. V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle. Applied Mathematical Sciences. 2016. 10(54). doi:10.12988/ams.2016.67211. URL: www.m-hikari.com <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211> (date of application: 17.06.2020).
15. Goloskokov, D.P., Matrosov, A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. 2015 International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015 // Proceedings. 2015. Pp. 382–385. doi:10.1109/SCP.2015.7342169.

16. Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N., Serdjuks, D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // Vestnik MGSU. 2020. (4). Pp. 510–517. doi:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517

References

1. Kirsanov M.N. Calculation of the L-shaped truss for fastening road signs and equipment. Scientific journal of construction and architecture. 2019. No. 1 (53). pp. 84-92.
2. Kozlov A.V., Kozlov V.A. Stress-strain state of a composite structure taking into account shear compliance between a reinforced concrete slab and a steel beam. Stroitel'naya Mekhanika i Konstruktsii. 2021. No. 2 (29). pp. 48–61.
3. Efruyshin S.V., Efanov A.R. Evaluation of the effectiveness of the use of light steel thin-walled structures in tower structures. Stroitel'naya mekhanika i konstruktsii. 2021. No. 3 (30). pp. 26–48.
4. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels; 2021. AlfaBuild. 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
5. Kitaev, S.S. Derivation of the formula for the deflection of a cantilevered truss with a rectangular diagonal grid in the computer mathematics system Maple. Postulat. 2018. 5–1. Pp. 43. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1477> (date of application: 3.03.2021).
6. Ilyushin, A. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame. Structural mechanics and structures. 2019. 3(22). Pp. 29–38. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_41201106_54181191.pdf.
7. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a planet externall statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. Stroitel'naya mekhanika i konstruktsii. 2021. No. 2 (29). pp. 29–37.
8. Komerzan E.V., Lushnov N.A., Osipova T.S. Analytical calculation of the deflection of a flat truss truss with an arbitrary number of panels // Stroitel'naya mekhanika i konstruktsii. 2022. No. 2(33). pp. 17-25. DOI 10.36622/VSTU.2022.33.2.002
9. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss; 2021; AlfaBuild; 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
10. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
11. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. Microarchitected cellular solids - The hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. 85(9). Pp. 607–617. doi:10.1002/zamm.200410208.
12. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. The structural performance of the periodic truss. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. 54(4). Pp. 756–782. doi:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
13. Kirsanov M. N. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing, 2019. 206 p.
14. Goloskokov, D.P., Matrosov, A. V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle. Applied Mathematical Sciences. 2016. 10(54). doi:10.12988/ams.2016.67211. URL: www.m-hikari.com<http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211> (date of application: 17.06.2020).

15. Goloskokov, D.P., Matrosov, A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. 2015 International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015 - Proceedings. 2015. Pp. 382–385. doi:10.1109/SCP.2015.7342169.
16. Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N., Serdjuks, D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. Vestnik MGSU. 2020. (4). Pp. 510–517. doi:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517

FORMULAS FOR CALCULATION OF DEFORMATIONS OF THE L-SHAPED SPATIAL SUPPORT TRUSS MODEL

M. N. Kirsanov

National Research University «MPEI»

Moscow, Russia

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

A mathematical model of a spatial statically determinate truss for fixing road signs is proposed. An inductive algorithm for deriving formulas for calculating the deflection of a structure under the action of vertical and lateral loads depending on the number of panels is presented. A picture of the distribution of forces on the truss rods is given. To calculate deflections, the Maxwell – Mohr formula is used. The derivation of general formulas is based on the generalization of a series of solutions for individual trusses to an arbitrary number of panels in the structure post and its cantilever part. The solution of the system of equilibrium equations for nodes to find the forces in the rods and analytical transformations are carried out in the Maple. symbolic mathematics system. Nonlinear asymptotics of solutions are found.

Keywords: spatial truss, bracket, induction, Maple, asymptotics, deflection