УДК 539.3

Осесимметричная задача о нелинейной деформации упругой среды сферическим телом

М. Н. Кирсанов, И. В. Меркурьев*

Определено поле перемещений в нелинейной упругой среде, согласованное с вращением сферы вокруг оси, при условии, что из трех компонент поля перемещений отлична от нуля только окружная компонента, зависящая от радиальной и зенитной координат. При этом потенциал напряжений принят в форме Муни.

Ключевые слова: точное решение, сферические координаты, упругая среда, нелинейные деформации.

Механические системы, подверженные внешним нагрузкам (силам, крутящим моментам), часто крепятся на массивных нелинейно-упругих резиноподобных основаниях. Такие основания призваны не только гасить возникающую вибрацию, но и страховать систему на случай перегрузок. Одним из новых конструкторских решений является закрепление механической системы с помощью жесткой шаровой опоры, погруженной в нелинейно-упругую резиноподобную среду, допускающую некоторое движение шаровой опоры. По экватору шаровой опоры выполняется мелкая насечка, предназначенная, с одной стороны, для сцепления шаровой опоры с внешней нелинейно-упругой средой, с другой — для выполнения роли резца, инициирующего трещину и высвобождающего опору при перегрузках. Так, жертвуя опорой, можно спасти механическую систему от разрушения. Для практических расчетов наиболее важно исследовать напряженное состояние нелинейно-упругой среды в экваториальной области вокруг шаровой опоры. Аналитическое решение задачи о деформации нелинейно-упругой среды при заданном внешнем воздействии может быть использовано для расчетов конструктивных параметров шаровой опоры механической системы.

* MerkuryevIV@yandex.ru

Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу для определения напряженного состояния и деформации нелинейно-упругой среды, взаимодействующей с подвижной шаровой опорой. Пусть y^1, y^2, y^3 — координаты точек нелинейно-упругой среды в деформированном состоянии и x^1, x^2, x^3 — в недеформированном состоянии записаны в сферических координатах:

$$y^1 = r \sin\psi \cos\varphi;$$

$$y^2 = r \sin\psi \sin\varphi;$$

$$y^3 = r \cos\psi;$$

$$x^1 = r \sin\psi \cos(\varphi - u);$$

$$x^2 = r \sin\psi \sin(\varphi - u);$$

$$x^3 = r \cos\psi,$$

где $u = u(r, \psi)$ — угловое смещение, зависящее от зенитного угла ψ и радиуса r и не зависящее от азимутального угла φ. Предполагается, что угловое смещение u вызвано угловым движением сферы, сцепленной на экваторе с нелинейно-упругой средой.

Введем обозначения для криволинейных координат $\theta^1 = r$, $\theta^2 = \psi$, $\theta^3 = \varphi$. Метрические тензоры G_{ij} и g_{ij} в деформированном и недеформированном теле имеют вид [1]:

$$G_{ij} = \frac{\partial y^k}{\partial \theta^i}\frac{\partial y^k}{\partial \theta^j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\psi \end{pmatrix}; \qquad (1)$$

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \theta^i}\frac{\partial x^k}{\partial \theta^j} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + r^2 u_r^2 \sin^2\psi & u_r u_\psi r^2 \sin^2\psi & -u_r r^2 \sin^2\psi \\ u_r u_\psi r^2 \sin^2\psi & r^2(1 + u_\psi^2 \sin^2\psi) & -u_\psi r^2 \sin^2\psi \\ -u_r r^2 \sin^2\psi & -u_\psi r^2 \sin^2\psi & r^2 \sin^2\psi \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Контрвариантные метрические тензоры находим из условий $g^{ik}g_{jk} = \delta_j^i$, $G^{ik}G_{jk} = \delta_j^i$ (δ_j^i — символ Кронекера), обращая матрицы (1) и (2):

$$G^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(r^2\sin^2\psi) \end{pmatrix};$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_r \\ 0 & 1/r^2 & u_\psi / r^2 \\ u_r & u_\psi/r^2 & 1/(r^2\sin^2\psi) + u_\psi^2/r^2 + u_r^2 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Решение краевой задачи

Предположим, что материал нелинейно-упругой среды является несжимаемым, а энергия упругой деформации линейно зависит от инвариантов $I_1 = g^{mn}G_{mn}$, $I_2 = G^{mn}g_{mn}$ тензора деформаций в форме, предложенной Муни:

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3),$$

где C_1, C_2 — постоянные.

В этом случае известно [1] выражение для напряжений

$$\tau^{ij} = \alpha g^{ij} + \beta B^{ij} + pG^{ij}, \qquad (4)$$

где $\alpha = 2\partial W/\partial I_1$; $\beta = 2\partial W/\partial I_2$; $p = p(r, \psi)$ — неизвестное гидростатическое давление и

$$B^{ij} = I_1 g^{ij} - g^{ik}g^{js}G_{ks}.$$

Из (1) и (3) легко получить:

$$I_1 = g^{mn}G_{mn} = 3 + (r^2u_r^2 + u_\psi^2)\sin^2\psi;$$

$$B^{ij} = \begin{pmatrix} 2 + u_\psi^2 \sin^2\psi & -u_r u_\psi \sin^2\psi & u_r \\ -u_r u_\psi \sin^2\psi & (2 + u_r^2 \sin^2\psi)/r^2 & u_\psi/r^2 \\ u_r & u_\psi/r^2 & \begin{array}{c} 2/(r^2\sin^2\psi) + \\ + u_\psi^2/r^2 + u_r^2 \end{array} \end{pmatrix}.$$

Из (4) следует

$$\tau^{ij} =$$

$$= \begin{pmatrix} \zeta + \beta u_\psi^2 \sin^2\psi + p & -u_r u_\psi \beta \sin^2\psi & u_r\gamma \\ -u_r u_\psi \beta \sin^2\psi & \dfrac{\zeta + \beta u_\psi^2 r^2 \sin^2\psi + p}{r^2} & \dfrac{u_\psi \gamma}{r^2} \\ u_r\gamma & \dfrac{u_\psi\gamma}{r^2} & \begin{array}{c} \dfrac{\zeta(u_r^2 r^2 + u_\psi^2)}{r^2} + \\ + \dfrac{\zeta + p}{r^2\sin^2\psi} \end{array} \end{pmatrix},$$

где $\gamma = \alpha + \beta$; $\zeta = \alpha + 2\beta$. Уравнение равновесия при отсутствии массовых сил имеет вид $\tau^{ij}\|_i = 0$, где двойной вертикальной чертой обозначено ковариантное дифференцирование с помощью метрических тензоров G_{ij} и G^{ij}. В сферической системе координат имеем уравнение в проекции на радиус:

$$\tau_r^{11} + \frac{\tau_\psi^{12}}{r} + \frac{\tau_\varphi^{12}}{r\sin\psi} + \frac{2\tau^{11} - \tau^{22} - \tau^{33} + \tau^{12}\psi}{r} = 0,$$

откуда следует дифференциальное уравнение в частных производных для перемещения u:

$$u_{rr}r^2 + 4ru_r + u_{\psi\psi} + 3u_\psi\psi = 0.$$

Решение этого уравнения находится в виде $u = f(r)h(\psi)$, откуда получаем

$$f = e^{-r^2} r^{-1/2}(C_1 M_{\lambda,\mu}(2r^2) + C_2 W_{\lambda,\mu}(2r^2)),$$

где $M_{\lambda,\mu}(2r^2)$, $W_{\lambda,\mu}(2r^2)$ — функции Уиттекера [2]; $\lambda = -1/4$; $\mu = \sqrt{1 - 4C}/4$.

Решение для координатной функции $h(\psi)$ выражается через гипергеометрические функции:

$$h = C_3F(a_1, b_1, 1/2, \cos^2\psi) +$$

$$+ C_4F(a_2, b_2, 3/2, \cos^2\psi), \qquad (5)$$

где $a_1 = (3 + \sqrt{9+4C})/4$; $b_1 = (3 - \sqrt{9+4C})/4$; $a_2 = (5 + \sqrt{9+4C})/4$; $b_2 = (5 - \sqrt{9+4C})/4$. При $C = 0$ имеем

$$u = (c_1 + c_2\,\mathrm{erf}(r\sqrt{2})) \times$$
$$\times\ \{c_3 + c_4[\cos\psi/\sin^2\psi - \ln(\psi/2)]\}, \qquad (6)$$

где $\mathrm{erf}(r) = (2/\sqrt{\pi})\int\limits_0^r \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ — функция ошибок.

Заметим, что решения (5), (6) в полюсах сферы $\psi = 0$, $\psi = \pi$ расходятся, так как функция $F(a, b, c, z)$ при $a + b - c = 1$ и $z = 1$ представляет собой расходящийся ряд [2].

Рассмотрим решение (6). С учетом недеформируемости среды на бесконечности ($r \to \infty$, $u \to 0$) приравниваем нулю выражение в первой скобке в (6). Используя асимптотическое свойство функции ошибок, получаем $c_1 = -c_2$. Из граничных условий, заданных на экваторе [$u(R, \pi/2) = u_0$, $u_\psi(R, \pi/2) = u'$], находим константы интегрирования и получаем решение

$$u = \frac{\mathrm{erf}(\sqrt{2}r) - 1}{\mathrm{erf}(\sqrt{2}R) - 1}\left(u_0 - \frac{u'}{2}\left(\frac{\cos\psi}{\sin^2\psi} - \ln\frac{1-\cos\psi}{\sin\psi}\right)\right). \qquad (7)$$

На рис. 1 зависимость (7) представлена кривыми при $u = 1$, $u' = 1$ (все линейные величины отнесены к радиусу R) для различных зенитных углов. Заметен существенный эффект затухания. Можно условно считать, что на расстояниях не более радиуса сферы материал остается недеформируемым.

Зависимость азимутального углового смещения от зенитного угла ψ дана на рис. 2 при тех же краевых условиях на различных расстояниях от поверхности сферы.

На рис. 3 зависимость (7) построена для $r = R$ при различных краевых условиях.

Интегрируя моменты касательных напряжений $\sigma_{r\psi}$ относительно оси вращения y_3 по поверхности сферы радиусом R, можно найти значение вращаю-

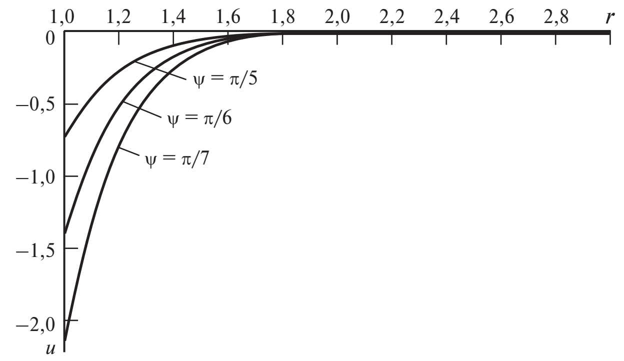

Рис. 1. Зависимость углового смещения u от радиуса r

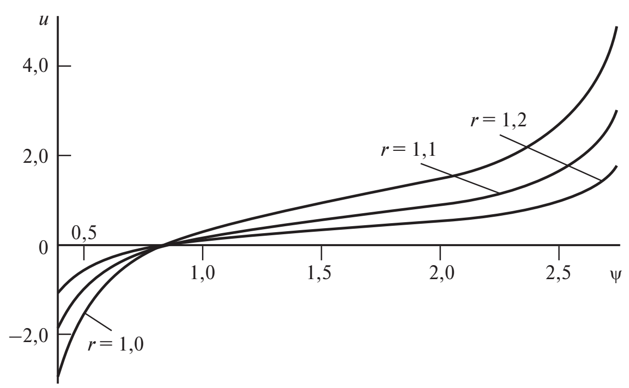

Рис. 2. Зависимость углового смещения u от угла ψ

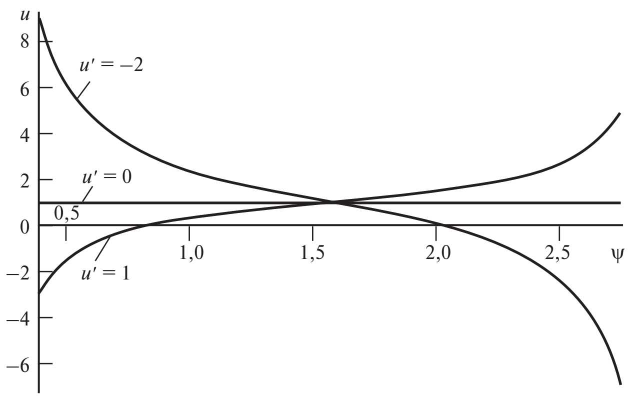

Рис. 3. Зависимость углового смещения u от угла ψ при $r = R$

щего момента. Физические компоненты тензора напряжений σ_{ij} определяются по формуле $\sigma_{ij} = \tau^{ij}\sqrt{G_{jj}/G^{ii}}$ (по i и j не суммировать). Отсюда $\sigma_{r\psi} = r\sin(\psi)\tau^{13} = r\sin(\psi)u_r\gamma$. Плечо ρ окружного касательного усилия относительно оси вращения равно $R\sin\psi$. Имеем

$$M = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sigma_{r\psi}\rho R^2\sin\psi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\psi = \frac{16\gamma\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-2R^2}R^4u_0}{\mathrm{erf}(\sqrt{2}R) - 1}.$$

Заключение

Найдено решение о деформации нелинейно-упругой среды возмущением специального вида в сферических координатах. Точное решение в принятой постановке неизбежно дает особенность в полюсах сферы. Избавиться от этой особенности можно, только если условно ограничить область допустимых решений, исключив небольшие зоны вблизи полюсов. Кроме того, наблюдается «эффект обратного вращения» — материал в верхнем (от экватора сферы $0 < \psi < \pi/2$) и нижнем ($\pi/2 < \psi < \pi$) полупространствах деформируется в разных направлениях (рис. 2, 3). Замечено значительное затухание деформаций в глубь среды. Получена формула для момента, интегрирующего окружные касательные напряжения на сфере, вызывающие деформацию.

Все тензорные преобразования и аналитическое решение уравнения выполнены в системе компьютерной математики Maple [3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-08-01255.

Литература

1. **Грин А., Адкинс Дж.** Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. — М.: Мир, 1965.
2. **Абрамовиц М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
3. **Кирсанов М.Н.** Практика программирования в системе Maple. — М.: Издательский дом МЭИ, 2011.

Статья поступила в редакцию 12.02.13.