DOI: 10.17117/na.2016.06.02.232 **http://ucom.ru/doc/na.2016.06.02.232.pdf**
Поступила (Received): 16.06.2016

Китаев С.С.
Пример нестабильности нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

Kitaev S.S.
An example of constancy of nonlinear ordinary differential equation of the second order

Приведен пример нестабильности уравнения, как явления вырождения связи между приращениями производных функции различных порядков. С помощью системы компьютерной математики Maple получено численное решение начальной задачи. Использован оператор dsolve с опцией numeric

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, стабильность, начальная задача, Maple*

Китаев Сергей Сергеевич
Студент
Национальный исследовательский университет «МЭИ»
г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

The example of constancy of the equation, as a phenomenon of degeneration of relationships between the increments of the derivatives of functions of various orders is presented. Using the computer algebra system Maple numerical solution of the initial problem is obtained with use of operator dsolve and numeric option

Key words: *differential equation, initial value problem, theory of constancy, Maple*

Kitaev Sergey Sergeevich
Student
National research university "MPEI"
Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

Теория стабильности динамических процессов, описываемых дифференциальными уравнениями [1], имеет широкие идо конца еще не изученные приложения в технике. В частности, эффект нестабильности обнаружен и экспериментально доказан применительно к процессу резания металлов [2-4], в задаче о движения поршня с учетом заклинивания [5] и в задачах теории выпучивания конструкций в условии ползучести [6-11]. Теория применима и для уравнений в частных производных, например в проблемах распределения напряжений в неоднородном упругом теле [12,13].

Хотя степень опасности точек нестабильности (особых точек начальной задачи) еще в полной мере не исследована, изучение приложений на наличие таких сочетаний начальных условий, значений функций (места), и характеристик движения (скорости) при которых происходит неограниченный рост приращений одних переменных при как угодно малых заданных других, имеет практический смысл. Весьма интересно, например, приложение изучения этого

· http://ucom.ru/na · ISSN 2411-7609 · Science Almanac ·

явления в динамике микромеханических гироскопов [14], где определяющую роль играет нелинейность (в основном кубического типа) определяющих уравнений процесса.

Рассмотрим дифференциальное уравнение некоторого одномерного процесса с обобщенной координатой x

$$a\ddot{x} + b\dot{x}^2 + cx\dot{x} = 0 \ , \qquad (1)$$

где a, b и c – некоторые произвольные вещественные константы. Найдем условие нестабильности порядка (0/3). Проварьируем уравнение (1):

$$a\Delta\ddot{x} + 2b\dot{x}\Delta\dot{x} + cx\Delta\dot{x} + c\dot{x}\Delta x = 0 \ . \qquad (2)$$

Дифференцируем (2) по времени:

$$a\Delta\dddot{x} + 2b\ddot{x}\Delta\dot{x} + 2b\dot{x}\Delta\ddot{x} + 2c\dot{x}\Delta\dot{x} + cx\Delta\ddot{x} + c\ddot{x}\Delta x = 0 \ . \qquad (3)$$

Условие нестабильность ищем по отношению к возмущениям нулевой и третьей производной приращения Δx, $\Delta\dddot{x}$. Выразим приращение функции $\Delta\dot{x}$ и $\Delta\ddot{x}$ через эти величины. Соответствующую систему запишем в матричной форме

$$\begin{vmatrix} 2b\dot{x} + cx & a \\ 2b\ddot{x} + 2c\dot{x} & 2b\dot{x} + cx \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\ddot{x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{vmatrix} ,$$

где для правых частей, содержащих приращения Δx, $\Delta\dddot{x}$, введены обозначения α_1, α_2. Равенство определителя нулю есть условие нестабильности и означает вырождение связи между производными. Таким образом, если определитель равен нулю, то по заданным начальным приращениям задачу поставить нельзя. Она не сведется к классической начальной задаче. Из равенства определителя нулю получаем условие нестабильности уравнения порядка (0/3): $4b^2\dot{x}^2 + 4bcx\dot{x} + c^2x^2 - 2ab\ddot{x} - 2ac\dot{x} = 0$. Вторую производную подставим сюда из самого уравнения: $\ddot{x} = -\dot{x}(b\dot{x} + cx)/a$ В результате получаем условие $6b^2\dot{x}^2 + 6bcx\dot{x} + c^2x^2 - 2ac\dot{x} = 0$.

Уравнение (1) аналитического решения не имеет. Численное же решение можно получить средствами Maple [15,16], записав уравнение в форме Коши. При a=3, b=2 и c=1 имеем следующее численное решение:

```
>sys1:= diff(dx(t),t)=(-2*dx(t)^2-x(t)*dx(t))/3,
diff(x(t),t)=dx(t);
>F:={x(t),dx(t)};
>InC:=x(0)=-1.757359314,dx(0)=1;# начальные условия
>Sol:=dsolve({sys1,InC},F,numeric,output=listprocedure);
>X:=subs(Sol,x(t));
>plot(X,-2..6,thickness=2);
```

На рисунке 1 приведена соответствующая кривая:

· http://ucom.ru/na · ISSN 2411-7609 · Science Almanac ·

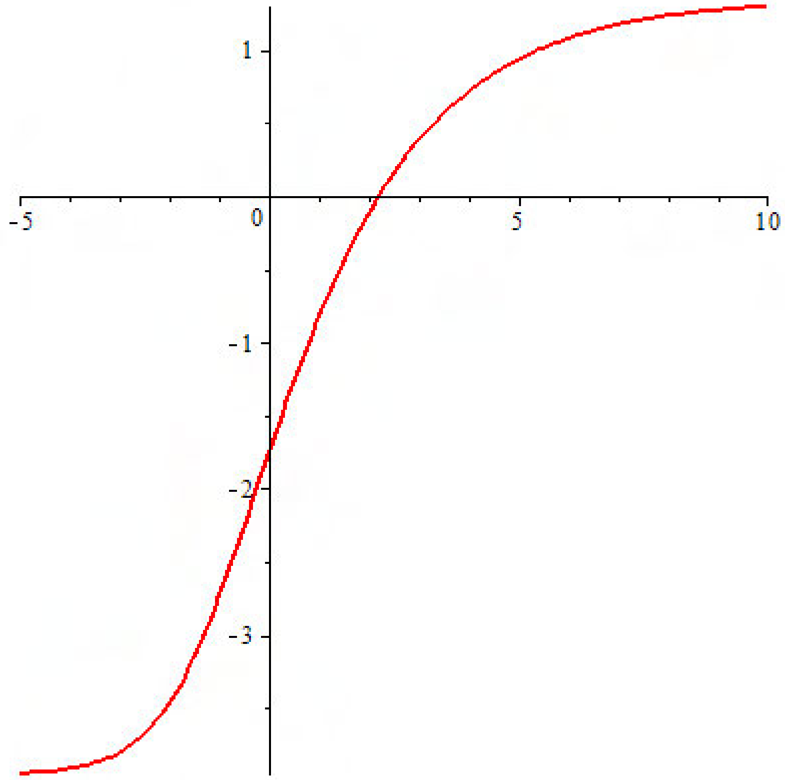

Рис. 1. Решение дифференциального уравнения (1) при условии: $x(0) = -1.757359314 \; \dot{x}(0) = 1$

Список используемых источников:

1. Кирсанов М.Н. Определение и анализ стабильности движения с использованием Maple // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2004. № 3-4 (7-8). С. 134-137.

2. Ивахненко А.Г., Куц В.В., Еренков О.Ю., Олейник А.В., Сарилов М.Ю. Методология структурно-параметрического синтеза металлорежущих систем. Комсомольск-на-Амуре, 2015. 282 с.

3. Еренков О.Ю., Куц В.В., Сарилов М.Ю. Токарная обработка полимерных композиционных материалов. Комсомольск-на-Амуре, 2016. 278 с.

4. Еренков О.Ю. Комбинированные способы токарной обработки полимерных композиционных материалов. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2015. 228 с.

5. Сафронов В.М., Кирсанов М.Н. Оценка возможности заклинивания поршня в пневмоприводах // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2006. №10. С. 37-40.

6. Кирсанов М.Н. Начальное закритическое поведение сжатого стержня в условиях ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 1993. № 2. С. 152.

7. Кирсанов М.Н. Стабильность элементов конструкций в условии ползучести. Ч. 1. Стержни. М.: ИНФРА-М., 2015. 184 с.

8. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column // Int.J.Eng.Sci. 1997. Volume. 5. No.3. Pp. 221-227.

9. Kirsanov M. N. Effect of the choice of the instability criterion in creep on the solution of the rod structure optimization problem//Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1992. Volume 33, No. 4. Pp. 573-576.

10. Кирсанов М.Н., Клюшников В.Д. Определение особых точек процесса деформирования сжатого стержня в условиях ползучести // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1993. № 3. С. 144.

11. Кирсанов М.Н. Неустойчивость цилиндрической оболочки при ползучести//Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1986. №6. С. 126-129.

12. Кирсанов М.Н. Нестабильность распределения напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 3 (319). С. 166-169.

13. Кирсанов М.Н. Эволюция кривых нестабильности напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я.
14. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 2 (12). С. 124-128.
15. Воробьев В.А., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Погрешности волнового твердотельного гироскопа при учете нелинейности колебаний резонатора // Гироскопия и навигация. 2005. № 1 (48). С. 15-21.
16. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
17. Голоскоков Д. П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.