

УДК 624.04

## Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы

М. Н. Кирсанов\*

Определяется прогиб статически определимой упругой пространственной фермы. С помощью системы компьютерной математики Maple отыскивается точное решение для произвольного числа панелей. Анализируются условия минимизации прогиба для стержней одинаковой и различной жесткости при условии постоянства массы конструкции.

Ключевые слова: пространственная ферма, система Maple, оптимизация, точное решение, прогиб.

---

### Введение

---

С увеличением числа специализированных программ расчета конструкций, основанных, как правило, на численных методах, и расширением их возможностей ценность точных аналитических решений не уменьшается, а только возрастает. Во-первых, для простого прикидочного расчета на этапе конструирования обращаться к тяжеловесным пакетам не имеет смысла. Во-вторых, полного доверия к результатам численного счета у инженера никогда не бывает, и поэтому требуются какие-то тестовые решения. И в-третьих, как это было уже показано в [1—3], в аналитических решениях можно обнаружить некоторые неувидимые и неочевидные особенности конструкции, невидимые в численных методах. Не отвергая необходимость приближенных расчетов (метод конечных элементов и др.), рассмотрим на примере расчета пространственной фермы возможности получения точных решений, открывшиеся с появлением систем компьютерной математики. Выбор системы Maple [4] из множества аналогичных программ является произвольным и определяется только пристрастием автора. С таким же успехом можно использовать и другие

системы. В частности, стоит рекомендовать бесплатную систему Maxima [5].

---

### Конструкция

---

Пространственная ферма состоит из трех плоских ферм, соединенных по длинным сторонам. Высота фермы  $h$ , ширина в основании  $b$ , длина одной панели  $a$ . Ферма нагружена уравновешенной системой пяти вертикальных сил. Сила  $P$  приложена в середине пролета (не умаляя общности, предполагаем четное число панелей), четыре одинаковых силы  $P/4$ , имитирующих реакции вертикальных опор, приложены по углам основания (рис. 1).

Число панелей равно  $2n$  (на рис. 1 четыре панели,  $n = 2$ ). Стержни предполагаются упругими. Возможность потери устойчивости и исчерпание прочности здесь не изучаются. Шарниры, соединяющие стержни, идеальные. Ферма представляет собой статически определимую конструкцию.

---

### Расчет

---

Усилия в стержнях будем определять методом вырезания узлов. Ось  $x$  направляем по ширине

---

\* C216@Yandex.ru

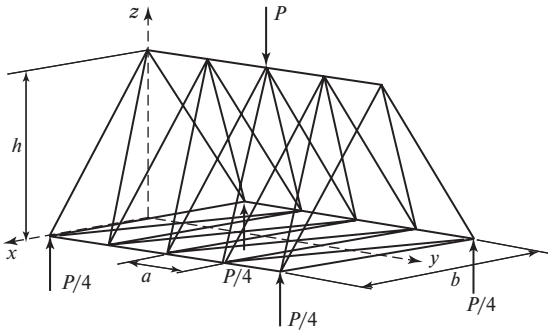


Рис. 1

фермы, ось  $y$  — по длине,  $z$  — по высоте (см. рис. 1). Сначала задаем координаты узлов:

$$\begin{aligned} x_k &= b/2, x_{k+1} = -b/2, x_{k+2} = 0, \\ y_k &= y_{k+1} = y_{k+2} = a(i-1), z_k = x_{k+1} = 0, \\ z_{k+2} &= h, \end{aligned}$$

где  $k = 3i - 2$ ,  $i = 1, \dots, 2n + 1$ . Затем указываем номера узлов по концам стержней, условно представляя их векторами  $\vec{V}$ . Направления этих векторов выбираем произвольно. Номера стержней в поперечных сечениях при  $k = 3i - 2$ ,  $i = 2n + 1$ :

$$\begin{aligned} \vec{V}_i &= [k, k + 2], \quad \vec{V}_{i+2n+1} = [k + 1, k + 2], \\ \vec{V}_{i+4n+2} &= [k, k + 1]; \end{aligned}$$

в продольных и диагональных стержнях при  $k = 3i - 2$ ,  $i = 2n$ :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{i+6n+3} &= [k + 2, k + 3], \\ \vec{V}_{i+8n+3} &= [k + 1, k + 5], \quad \vec{V}_{i+10n+3} = [k, k + 4], \\ \vec{V}_{i+12n+3} &= [k, k + 3], \quad \vec{V}_{i+14n+3} = [k + 1, k + 4], \\ \vec{V}_{i+16n+3} &= [k + 2, k + 5]. \end{aligned}$$

Для уравнений равновесия потребуются проекции стержней-векторов на оси координат:  $l_{x,i} = x_{V_{i,1}} - x_{V_{i,2}}$ ,  $l_{y,i} = y_{V_{i,1}} - y_{V_{i,2}}$ ,  $l_{z,i} = z_{V_{i,1}} - z_{V_{i,2}}$ . Матрица направляющих косинусов  $\mathbf{G}$  имеет компоненты:  $G_{3V_{i,1}-2,i} = l_{x,i}/l_i$ ,  $G_{3V_{i,1}-1,i} = l_{y,i}/l_i$ ,  $G_{3V_{i,1},i} = l_{z,i}/l_i$ ,  $G_{3V_{i,2}-2,i} = -l_{x,i}/l_i$ ,  $G_{3V_{i,2}-1,i} = -l_{y,i}/l_i$ ,  $G_{3V_{i,2},i} = -l_{z,i}/l_i$ ,  $l_i = \sqrt{l_{x,i}^2 + l_{y,i}^2 + l_{z,i}^2}$ . Систему уравнений равновесия узлов представим в векторном виде:

$$\mathbf{GS} = \vec{B}, \quad (1)$$

где  $\vec{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$  — вектор усилий в стержнях;  $m = 18n + 3$  — число стержней;  $\vec{B} = \{P_{x,1}, P_{y,1}, P_{z,1}, \dots$

$\dots, P_{x,m}, P_{y,m}, P_{z,m}\}$  — вектор правых частей (внешних нагрузок, приложенных к узлам). Для получения нагрузок, указанных на рис. 1, прикладываем в середине пролета внешнюю нагрузку  $B_{9(n+1)} = P$ , к угловым точкам основания прикладываем силы  $B_2 = B_6 = B_{18n+3} = B_{18n+6} = -P/4$ . Система (1) состоит из уравнений равновесия узлов. Для каждого узла записываются три уравнения в проекциях на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ . При этом система из  $18n + 9$  уравнений и  $m = 18n + 3$  неизвестных получается переопределенной. Системы компьютерной алгебры, как правило, с такими задачами легко справляются, отбрасывая лишние уравнения. В данном случае таких уравнений шесть — ровно столькокими внешними опорными стержнями необходимо закрепить ферму как твердое тело в пространстве к земле. Однако в статически определимой задаче четыре вертикальные опоры по углам фермы недопустимы. Три точки уже определяют плоскость основания фермы, четвертая опора будет лишней. Именно этот факт вызвал необходимость рассмотрения уравновешенной системы пяти сил, приложенных к свободной (незакрепленной) ферме. Из решения системы получаем усилия в стержнях. В стержнях решетки основания, как и следовало ожидать, усилия оказываются равными нулю (кроме двух крайних стяжек, в которых усилия равны  $Pb/(8h)$  при любом числе панелей). Если для решения системы (1) использовать программу Maple, то усилия можно рассчитать как в численном, так и в аналитическом представлении. Например, усилия в продольных стержнях одной половины пролета верхней грани фермы имеют вид  $O_i = -(2i - 1)Pa/(4h)$ ,  $i = 1, \dots, n + 1$ . В другом пролете усилия симметричны. Заметим, что использование системы компьютерной алгебры существенно упрощает аналитическое решение, особенно для ферм с произвольным числом пролетов.

Прогиб середины пролета (вертикальное перемещение точки приложения силы  $P$ ) определяем по формуле Максвелла—Мора, принимая жесткость  $EF$  стержней одинаковой:  $\Delta = P \sum_{i=1}^m S_i^2 l_i / (EF)$ , где  $S_i$  — усилия в стержнях от единичной силы. Подставляя сюда значения длин и усилий, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} &= \left( n(b^2 + 4h^2)^{3/2} + n(b^2 + 4h^2 + 4a^2)^{3/2} + \right. \\ &\quad \left. + 8a^3 n^3 + b^3 \right) / (32h^2), \quad (2) \end{aligned}$$

где  $\tilde{\Delta} = EF\Delta/P$ . Пусть задана  $L = na$  — длина половины пролета фермы. Зависимость прогиба от числа панелей (рис. 2, 3) обнаруживает минимум. На рис. 2 зависимости найдены при  $L = 10$ ,  $h = 2$  (все размеры в метрах), на рис. 3  $L = 10$ ,  $b = 2$ . Заметим, что для

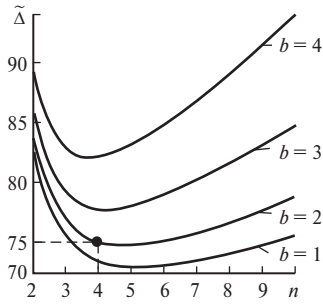


Рис. 2

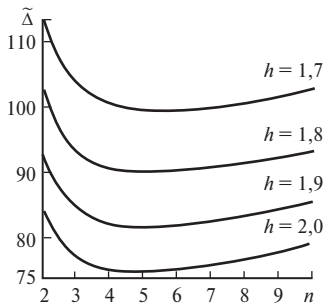


Рис. 3

более широких ферм ( $b = 4$ ) зависимость имеет более острый минимум, а сам прогиб больше.

**Пример.** Ферма с четырьмя панелями в половине пролета ( $n = 4$ ), длиной пролета 20 м ( $L = 10$  м,  $a = 2,5$  м), высотой  $h = 2$  м, шириной основания  $b = 2$  м из труб алюминиевого сплава Д16Т. Наружный диаметр труб 70 мм, толщина стенки 5 мм. Согласно ГОСТ 18482—79 масса 1 м такой трубы 2,91 кг/м. Общая длина стержней фермы 197,53 м, масса фермы 574,8 кг. Площадь сечения  $F = 1,02 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>, модуль упругости  $E = 0,75 \cdot 10^5$  МПа, жесткость сечения  $EF = 0,76 \cdot 10^8$  Н. Не учитывая массу фермы в прогибе, приложим к ферме (см. рис. 1) силу  $P = 20$  кН и вычислим прогиб  $\Delta = P\tilde{\Delta}/(EF) = 20\,000 \cdot 74,49/(0,76 \cdot 10^8) = 1,95 \cdot 10^{-2}$  м (точка на кривой  $b = 2$ , см. рис. 2). Отношение пролета к прогибу составляет  $2L/\Delta = 1024$ . Наиболее сжатый стержень (верхний пояс, середина пролета) подвергается усилию 47,75 кН, а критическая нагрузка упругого стержня (по Эйлеру)  $S = \pi^2 EF/l^2 = 64,2$  кН, что обеспечивает запас устойчивости с коэффициентом 1,47. Усилие в наиболее растянутом стержне фермы (продольный стержень, середина пролета, нижний пояс) равно 18,75 кН. Напряжение в этом стержне  $\sigma = S/F = 18\,750/(1,02 \cdot 10^{-3}) = 18,38$  МПа, что существенно меньше допустимого по ГОСТ 18482—79 напряжения 275 МПа для сплава Д16Т.

Найдем аналитическое выражение для оптимального (в смысле жесткости фермы) числа панелей. Дифференцируя (2) по  $n$  и приравнявая производную

нулю, получаем уравнение для  $n$ , из которого имеем решение

$$n^* = \left[ 2\sqrt{2} \cdot 3^{-1/4} L(b^2 + 4h^2)^{3/2} / (8b^2h^2 + 16h^4 + b^4) \right]. \quad (3)$$

Квадратными скобками обозначена операция вычисления целой части числа. На рис. 4 приведены зависимости (3) при  $L = 10$ .

График зависимости (2) прогиба от высоты фермы  $h$  при  $L = 10$ ,  $b = 2$  приведен на рис. 5. Простой аналитической зависимости оптимальной высоты фермы, соответствующей минимуму на рис. 5, от ее длины найти не удастся, однако полученное численное значение отношения  $2L/h \approx 3,3$  показывает отличие от традиционно принятого [6] в литературе значения  $2L/h \approx 6$ . С увеличением числа панелей отношение  $2L/h$ , судя по рис. 5, растет.

Рассмотрим теперь ферму, в которой жесткость сечений стержней  $EF$  разная. Для удобства сравнения с уже полученными результатами перераспределим площади сечений стержней между верхним и нижним поясом. Пусть жесткость боковых продольных  $4n$  стержней нижнего пояса имеет вид  $EF = EF_0(1 + c)$ , жесткость  $2n$  стержней верхнего пояса —  $EF = EF_0(1 - 2c)$ , а остальные стержни имеют прежнюю жесткость  $EF_0$ . Таким образом, объем всей фермы остается прежним. Введен безразмерный коэффициент перераспределения  $1 < c < 0,5$ . Решая задачу последовательно для различного числа панелей, после достаточно очевид-

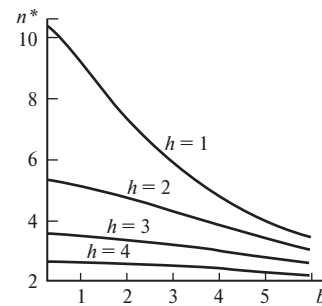


Рис. 4

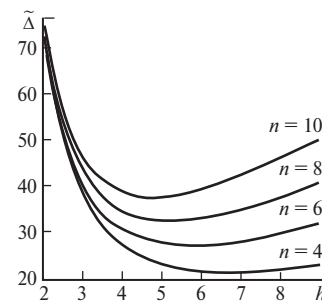


Рис. 5

ного обобщения получаем следующее выражение для прогиба  $\tilde{\Delta} = EF_0\Delta/P$ :

$$\tilde{\Delta} = \frac{\left(n(b^2 + 4h^2)^{3/2} + n(b^2 + 4h^2 + 4a^2)^{3/2} + b^3\right)/4 + na^3(c - 2n^2)/((1+c)(2c-1))}{8 \times \dots} \rightarrow \dots \times h^2.$$

Эта зависимость имеет минимум по коэффициенту  $c$ :

$$c^* = 2n^2 - \sqrt{4n^4 + n^2 - 1}/2. \quad (4)$$

При неограниченном увеличении числа панелей в пределе имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^* = -1/4$ . Коэффициент  $c^*$

получается отрицательным, а это показывает, что в оптимальной ферме (при постоянстве суммарного объема ее стержней) растянутые стержни нижней панели должны быть тоньше, а в верхнем (сжатом) поясе — толще. Интересно отметить, что если уменьшать массу фермы, исходя из условия потери устойчивости стержней, то перераспределение материала будет тем же — в сжатом верхнем поясе имеет смысл ставить стержни большей площади (гибкость меньше), в нижнем — более тонкие стержни. Зависимость (4) достаточно пологая и к своему предельному значению  $-0,25$  приближается быстро. Уже при  $n = 4$  имеем  $c^* = -0,24$ , соответствующий прогиб  $\tilde{\Delta}$  равен

68,27, что немного меньше его значения 74,79 при  $c = 0$  (площади стержней одинаковые).

## Выводы

Полученные аналитические выражения для прогиба пространственной фермы с произвольным числом панелей позволили найти точные выражения для оптимальных характеристик фермы, проследить характер изменения прогиба в зависимости от размеров и жесткости стержней. Использованный прием получения аналитических зависимостей может быть использован и в других задачах строительной механики.

## Литература

1. **Кирсанов М.Н.** Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем. // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5. С. 11—15.
2. **Кирсанов М.Н.** Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6(24). С. 28—34.
3. **Кирсанов М.Н.** Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49—53.
4. **Кирсанов М.Н.** Практика программирования в системе Maple. — М.: Издательский дом МЭИ, 2011.
5. **Ильина В.А., Силаев П.К.** Система аналитических вычислений МАХИМА для физиков-теоретиков. — М.: РХД, 2009.
6. **Металлические конструкции:** учебник для вузов / Ю.И. Кудишин, Е.И. Беленя, В.С. Игнатъева и др.; под ред. Ю.И. Кудишина. — М: Академия, 2007.

*Статья поступила в редакцию 13.02.12.*