



Research Article

Received: February 15, 2023

Accepted: February 24, 2023

ISSN 2658-5553  
Published: March 02, 2023

# The lower limit of natural frequency and the oscillation spectrum of a planar truss

Kirsanov, Mikhail Nikolaevich<sup>1</sup> Fernando, Marcelino Julio<sup>1</sup> Vorobev, Oleg Vladimirovich<sup>1</sup> <sup>1</sup> Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation; [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru) (K.M.N.); [themarcfernando98@outlook.com](mailto:themarcfernando98@outlook.com) (F.M.J); [olvarg@mail.ru](mailto:olvarg@mail.ru) (V.O.V)

## Keywords:

Truss; Natural oscillation frequency; induction; Maple; planar beam truss; Dunkerley method; oscillation spectrum

## Abstract:

**The object of research** is the frequency characteristics of a statically determined flat truss on two supports with a complex lattice and rectilinear horizontal chords. It is assumed that the mass of the truss is distributed uniformly over the nodes, and the stiffnesses of the elastic rods are the same. **Method.** According to the Dunkerley formula, an analytical estimate of the fundamental frequency of its natural oscillations is found. The vibrations of the masses are vertical. The forces in the rods are found by cutting out the knots. The rigidity of the structure is calculated by the Maxwell-Mohr formula. The generalization of a series of particular solutions for trusses with a successively increasing number of panels is carried out by induction using the Maple computer mathematics system. The common terms of the sequence of coefficients are determined from the solution of linear homogeneous recursive equations. To verify the solution, the fundamental frequency is calculated numerically as the first frequency of the spectrum. **Results.** Comparison of the analytical solution with the numerical one shows that the accuracy of the analytical estimate from below is quite high and increases with the number of panels. Spectral constants and isolines are found in the frequency spectra of a family of regular trusses.

## 1 Введение / Introduction

Расчет строительных конструкций на прочность, деформации на практике производится методом конечных элементов. В [1] рассмотрены теория, математические модели и алгоритмы метода конечных элементов в виде классического смешанного метода строительной механики. Эффективность этого метода обсуждается в работе [2]. Устойчивость пространственных ферм в нелинейной постановке с использованием метода конечных элементов рассмотрена в [3]. В последнее время также развиваются и аналитические методы расчета. В справочнике [4] собраны аналитические решения для плоских балочных ферм, арок, рам и консолей. Расчет прогиба внешне статически неопределимой фермы дан в [5]. Формула для прогиба трапециoidalной плоской балочной фермы получена в [6]. Расчет зависимости прогиба составной регулярной фермы от ее порядка (числа панелей) методом индукции выполнен в [7]. Общие вопросы существования регулярных статически определимых стержневых конструкций изучали Hutchinson R.G. и Fleck N.A. в [8,9]. Решения задач о прогибе пространственных ферм и оценки первой собственной частоты в аналитическом виде с использованием системы компьютерной математики Maple были получены в [10,11]. Метод Бубнова – Галеркина применен в [12] для анализа параметрических колебаний изотропной вязкоупругой пластинки переменной толщины в нелинейной постановке. В [13] методами Донкерлея и Рэлея найдена двухсторонняя оценка первой частоты плоской фермы. Иваницкий А.Д. [14] получил

Kirsanov, M.; Fernando, M.; Vorobev, O.

The lower limit of natural frequency and the oscillation spectrum of a planar truss; 2023; *AlfaBuild*; Volume 26 Article No 2602. doi: 10.57728/ALF.26.2



аналитическую зависимость прогиба плоской рамы от числа панелей. Аналитические оценки первой частоты колебаний консольной пространственной фермы получены в [15]. Тиньков Д.В. в [16], используя метод индукции, решил задачу оптимизации регулярной фермы с учетом ползучести материала. Аналитические методы для решения задачи деформаций строительных конструкций в системе компьютерной математики Maple применялись в [17,18]. Значительный вклад в развитие теории регулярных систем, их классификацию, оптимизацию и методы расчета внес Kaveh A. [19,20]. Нелинейный анализ регулярных ферм проведен в работах Галишниковой В.В. [21]. Обзор некоторых работ, использующих индуктивный вывод аналитических решений для плоских регулярных ферм содержится в [22].

Индукционный метод, примененный и в настоящей работе, позволяет существенно расширить область применения аналитического решения и определить зависимость прогиба, частот колебаний от порядка регулярной конструкции, например, от числа панелей или периодических групп стержней [23]. Такие решения используются как для оценки точности численных решений, так и для предварительных расчетов проектируемых конструкций, для которых оптимальный вариант может быть выбран расчетом порядка регулярной системы. Особенно эффективны аналитические методы применительно к конструкциям с большим числом элементов, для которых актуальной становится проблема потери точности за счет неизбежного накопления погрешностей.

## 2 Материалы и методы / Materials and Methods

### 2.1 Конструкция фермы и усилия в стержнях

Рассматриваемая ферма представляет собой плоскую балочную конструкцию со сложной решеткой, содержащей как наклонные элементы, так и горизонтальные (рис. 1). Ферма симметрична, средний стержень, соединяющий пояса, вертикальный. Высота фермы  $2h$ , длина  $4a(2n+1)$ , где  $n$  — число панелей в половине пролета. Каждая панель состоит из стержня нижнего пояса длиной  $4a$ , горизонтального стержня длиной  $2a$  и четырех раскосов длиной  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ . Ферма имеет левую подвижную и правую неподвижную шарнирные опоры и содержит  $10n+6$  внутренних узлов. Число стержней, включая три опорные, равно  $v=20n+12$ . Ферма состоит из трех опорных стержней,  $2n$  стержней длиной  $4a$ , одной стойки высотой  $2h$  и  $6(2n+1)$  раскосов длиной  $c$ . Записывая по два уравнения равновесия для каждого узла, включая два опорные, можно получить замкнутую систему уравнений для усилий в стержнях и реакций опор, необходимую для решения задачи.

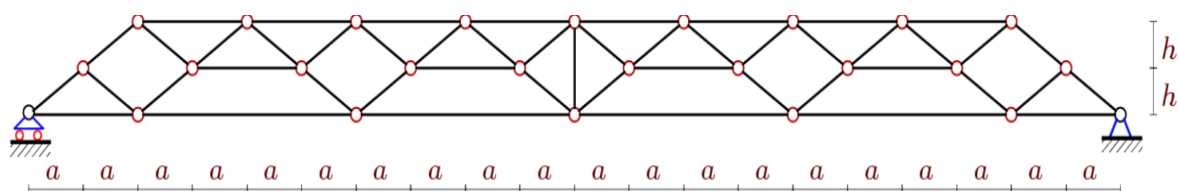


Рис. 1 – Схема фермы,  $n=2$   
Fig. 1 – Truss scheme,  $n=2$

Структура соединений стержней задается в программе, написанной на языке символьной математики Maple [24]. Ввод данных состоит из двух основных частей – ввода координат узлов и ввода порядка соединения стержней поясов и решетки. Стержни и узлы пронумерованы (рис. 2). Порядок соединения стержней задается по аналогии с определением структуры графа в дискретной математике. Вводятся специальные упорядоченные списки номеров вершин концов соответствующих стержней. Начало координат выбирается в левой подвижной опоре. Фрагмент программы ввода координат в системе Maple имеет вид:

```
for i to 2*n+1 do x[i+1]:=4*a*i-2*a:      y[i+1]:=0: end:
x[1]:=0: y[1]:=0: x[2*n+3]:=x[2*n+2]+2*a: y[2*n+3]:=0:
for i to 4*n+2 do x[i+2*n+3]:=2*a*i-a:   y[i+2*n+3]:=-h: end:
for i to 4*n+1 do x[i+6*n+5]:=2*a*i:     y[i+6*n+5]:=-2*h: end:
```

Kirsanov, M.; Fernando, M.; Vorobev, O.

The lower limit of natural frequency and the oscillation spectrum of a planar truss;  
2023; *AlfaBuild*; Volume 26 Article No 2602. doi: 10.57728/ALF.26.2

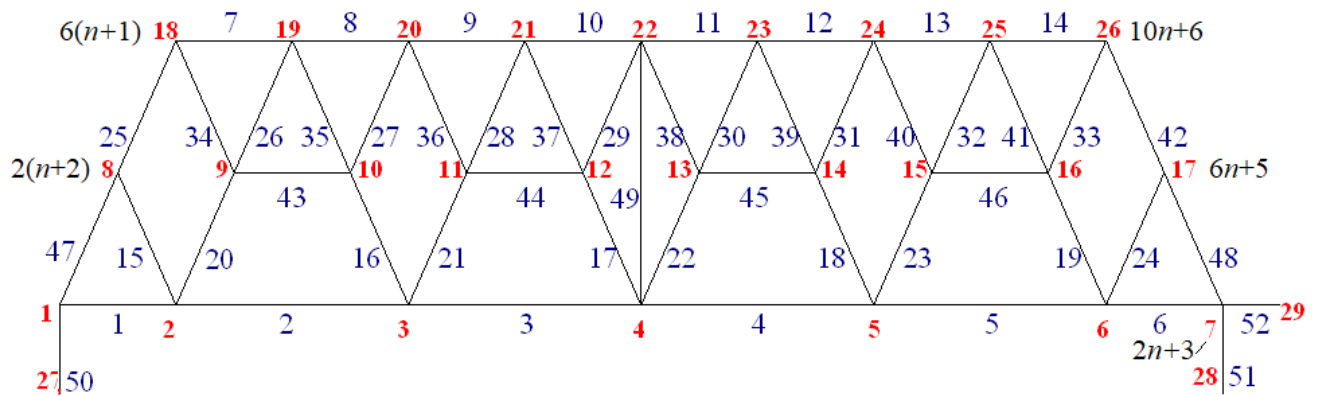


Рис. 2 – Нумерация стержней и узлов,  $n=2$ ,  
Fig. 2 – Numbering of elements and nodes,  $n=2$

Для расчета усилий в стержнях используется метод вырезания узлов. Уравнения равновесия отдельных узлов в проекциях на оси координат составляются в системе Maple. Матрица системы разрешающих уравнений состоит из направляющих косинусов усилий, вычисленных по данным о координатах концевых узлов стержней.

### 3 Результаты и обсуждение / Results and Discussion

#### 3.1 Первая частота собственных колебаний по методу Донкерлея

Инерционные свойства фермы моделируются массами, расположенными в  $K=10n+6$  узлах. Учитывая только вертикальные колебания масс, число степеней свободы конструкции равно  $K$ . Динамические уравнения в матричной форме записываются следующим образом [15]:

$$mI_k \ddot{Y} + D_K Y = 0. \quad (1)$$

Здесь  $Y$  – вектор вертикальных смещений масс в узлах фермы,  $\ddot{Y}$  – вектор ускорений,  $I_k$  – единичная матрица,  $D_K$  – матрица жесткости. В случае гармонических колебаний с частотой  $\omega$  справедлива связь  $\ddot{Y} = -\omega^2 Y$ . Матрицей, обратной к матрице жесткости  $D_K$ , является матрица податливости  $B_K$ . Элементы этой матрицы вычисляются с помощью формулы Максвелла – Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^v S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF). \quad (2)$$

Введены стандартные обозначения:  $b_{i,j}$  – перемещение узла  $i$  от действия единичной вертикальной безразмерной силы, приложенной к узлу  $j$ ,  $S_{\alpha}^{(i)}$  – усилия в стержнях с номерами  $\alpha$  от действия вертикальной единичной силы, приложенной к узлу  $i$ , где расположена масса  $m$ ,  $l_{\alpha}$  – длина стержня с номером  $\alpha$ ,  $EF$  – жесткость, принятая для всех стержней одинаковой.

Умножением равенства (1) на матрицу  $B_K$  задача сводится к проблеме собственных чисел матрицы  $B_K$ :  $B_K Y = \lambda Y$ , где  $\lambda = 1/(\omega^2 m)$  – собственные числа матрицы  $B_K$ . Приближенное аналитическое решение для нижней оценки  $\omega_D$  первой частоты  $\omega_1$  разыскивается по формуле Донкерлея [25]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}. \quad (3)$$

где  $\omega_p$  – парциальные частоты.

Для расчета парциальных частот составляется уравнение движения отдельной массы:

$$m \ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (4)$$



Коэффициент жесткости  $D_p$ , обратный к коэффициенту податливости, вычисляется по формуле Максвелла – Мора:

$$\delta_p = 1/D_p = \sum_{\alpha=1}^v (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF) \quad (5)$$

Фактически в такой постановке вычисляются только диагональные элементы матрицы  $B_K$ . Из формулы Донкерлея при  $y_p = A_p \sin(\omega t + \varphi)$  следует  $\omega_p = \sqrt{D_p / m}$ . Отсюда:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_n. \quad (6)$$

Расчет серии ферм с разным числом панелей показал, что коэффициент  $\Delta_n$  имеет вид, не зависящий от параметра  $n$ :

$$\Delta_2 = (24466a^3 + 5434c^3 + 1833h^3) / (25h^2 EF)$$

$$\Delta_3 = (241884a^3 + 22356c^3 + 4698h^3) / (49h^2 EF)$$

$$\Delta_4 = (1317854a^3 + 62606c^3 + 9683h^3) / (81h^2 EF)$$

$$\Delta_5 = (4856040a^3 + 141400c^3 + 17388h^3) / (121h^2 EF)$$

$$\Delta_6 = (14019786a^3 + 277794c^3 + 28413h^3) / (169h^2 EF)$$

$$\Delta_7 = (34302676a^3 + 494684c^3 + 43358h^3) / (225h^2 EF), \dots$$

Свойство сохранения формы решения имеет место для регулярных конструкций. Решение записывается в виде:

$$\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF).$$

Для нахождения общих элементов полученных последовательностей с помощью операторов системы Maple находятся рекуррентные уравнения, которым они удовлетворяют. В рассматриваемой задаче потребовалось рассчитать четырнадцать ферм с числом  $n=2, \dots, 15$ . Решение рекуррентных уравнений даёт выражения для коэффициентов:

$$C_1 = 2(5n+3)(64n^5 + 160n^4 - 248n^3 - 580n^2 + 1042n + 435) / (3(2n+1)^2),$$

$$C_2 = (5n+3)(32n^3 + 40n^2 + 16n - 30) / (2n+1)^2,$$

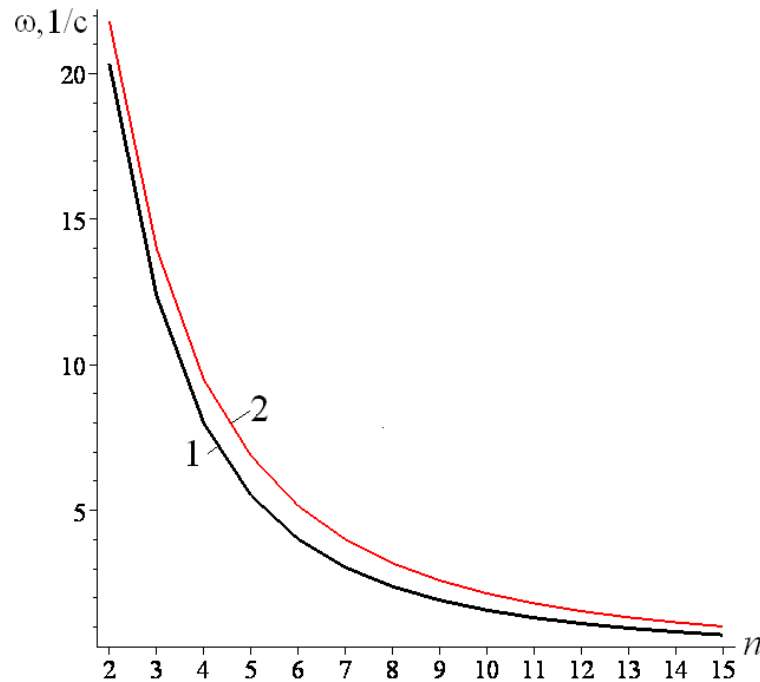
$$C_3 = (5n+3)(20n^2 + 20n + 21) / (2n+1)^2.$$

Окончательно получается аналитическая нижняя оценка для первой частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF). \quad (7)$$

### 3.2 Численное решение

Для иллюстрации найденной зависимости частоты собственных колебаний от числа панелей и оценки точности аналитического решения требуется найти численно первую частоту из спектра частот собственных колебаний конструкции с помощью специального оператора Eigenvalues из пакета LinearAlgebra в системе Maple, используемого для нахождения собственных чисел и векторов матрицы. Пусть ферма имеет размеры:  $a = 1\text{ м}, h = 2\text{ м}$ . Площадь поперечного сечения стержней решетки и опорных стержней одинакова:  $F = 5,9\text{ см}^2$ . Модуль упругости стали:  $E = 2,1 \cdot 10^5\text{ МПа}$ , массы в узлах:  $m = 300\text{ кг}$ . На рис. 3 показаны кривые зависимости первых частот от числа панелей, полученные аналитически и численно.

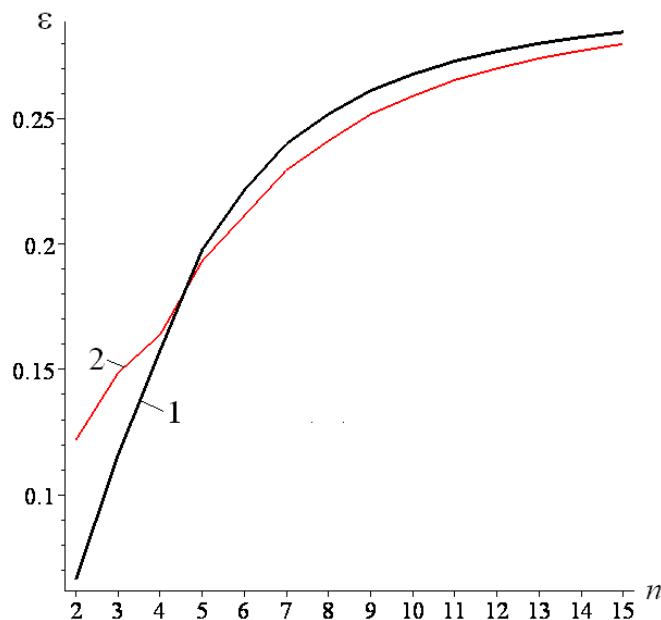


**Рис. 3 – Сравнение аналитического решения с численным. 1 – нижняя оценка  $\omega_D$  по Донкерлею при  $a=1\text{м}$ ,  $h=2\text{м}$ ; 2 – частота  $\omega_1$ , полученная численно**

**Fig. 3 – Comparison of the analytical solution with the numerical one. 1 – lower estimate  $\omega_D$  according to Dunkerley at  $a=1\text{m}$ ,  $h=2\text{m}$ ; 2 – frequency  $\omega_1$  obtained numerically**

С увеличением количества панелей длина фермы увеличивается и, как видно из графика, частота собственных колебаний монотонно уменьшается. Погрешность аналитической оценки невелика, однако по мере увеличения количества панелей она незначительно увеличивается.

Для уточнения погрешности решения вводится относительная величина  $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$ . Изменение этого значения в зависимости от количества панелей показано на рисунке 4.



**Рис. 4 – Относительная погрешность оценки частоты колебаний по Донкерлею, 1—  $h=2\text{м}$ ; 2—  $h=3\text{м}$**

**Fig. 4 – Relative error in estimating the oscillation frequency according to Donkerley, 1—  $h=2\text{m}$ ; 2—  $h=3\text{m}$**

Другая возможная аналитическая оценка первой частоты колебаний регулярной системы с многими степенями свободы — это метод Рэлея [26]. Он дает заметно большую точность решения, но расчетные формулы, полученные этим методом, как правило, весьма громоздки.

### 3.3 Спектры регулярных ферм

Обычно спектр частот собственных колебаний находят для конкретных конструкций при определенном выборе их параметров. Если же на одном графике разместить спектры нескольких регулярных ферм, отличающихся только порядком, то в полученной общей картине распределения собственных частот, несмотря на внешнюю хаотичность картины, можно обнаружить некоторые закономерности.

На рисунке 5 частоты собственных колебаний отдельных ферм порядка  $n=2, \dots, 15$  собраны на одном графике. Точки, означающие частоты спектра каждой фермы, условно соединены соответствующими кривыми. Порядок регулярности фермы обозначен цифрой у высшей частоты собственных колебаний этой фермы в верхней точке кривой спектра. На оси абсцисс  $k$  соответствует номеру собственной частоты в спектре. Обнаружены спектральные константы — совпадающие частоты ферм различных порядков. Для данных ферм наиболее четко просматриваются пять горизонтальных отрезков, соединяющих точки, изображающие значения собственных частот. Это спектральные константы, обозначенные на рисунке C, D, E, F и G. Таким образом, в данном случае существует верхняя граница частот G, принадлежащая всем спектрам ферм. Кроме спектральных констант в общей картине спектров обнаруживаются по крайней мере две спектральные изолинии A и B. Это кривые, соединяющие частоты, имеющие один относительный номер в спектре (рис. 6). Кривая A соединяет четные номера частот:  $2n$ ,  $n=2, 3, \dots$  в каждом спектре фермы порядка  $n$ . На кривой B лежат частоты с номерами  $2n+1$ , где  $n$  — порядок регулярности фермы. Спектральные изолинии асимптотически стремятся к некоторому значению. Изолинии A и B не единственные в этой задаче. Другие изолинии скрыты в множестве точек, соответствующих частотам, и относятся к нереально большому (звуковому) частотам колебаний. Практического смысла анализа таких частот, вероятно, нет. Возможное практическое применение обнаруженным спектральным константам и изолиниям — это расчет конструкции на резонанс на высших частотах. Эти частоты найдены для регулярных ферм большого порядка по значениям частот, полученных для ферм первых порядков, для расчета которых объем вычислений значительно меньше.

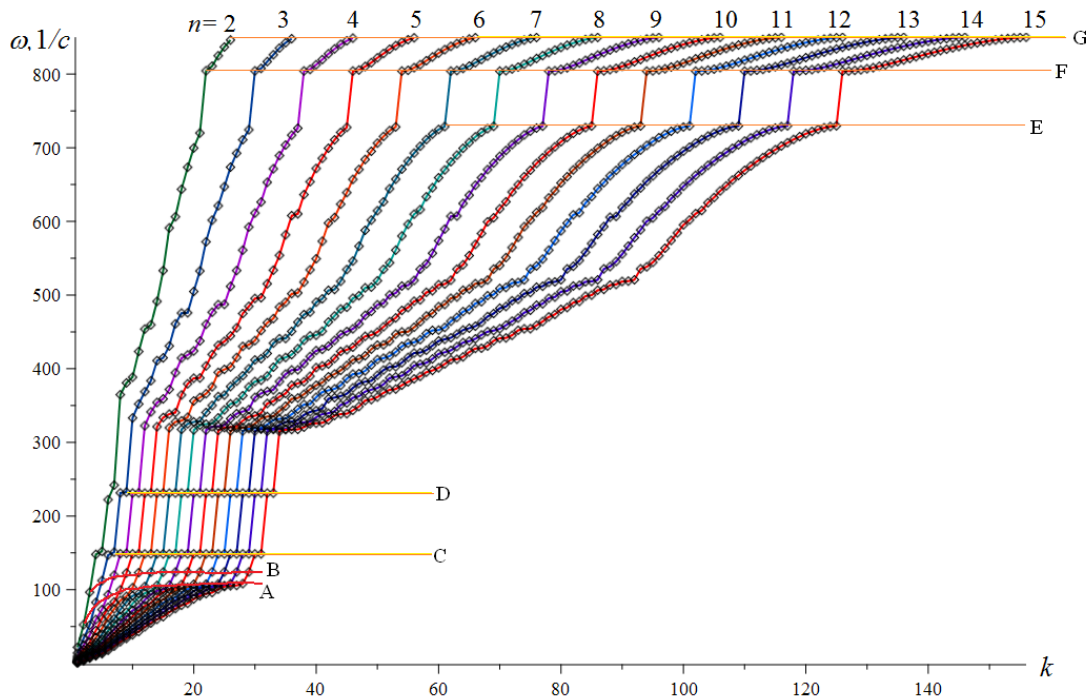


Рис. 5 – Спектры регулярных ферм. Все частоты,  $n=2,3,\dots,15$   
 Fig. 5 – Spectra of regular trusses. All frequencies,  $n=2,3,\dots,15$

Несколько других изолиний, лежащих ниже изолинии А, прослеживаются на укрупненном рисунке 6, построенном по рисунку 5 для низших частот. На этом же рисунке, начиная с пятого порядка фермы, заметны кратные частоты, лежащие на линии спектральной константы С.

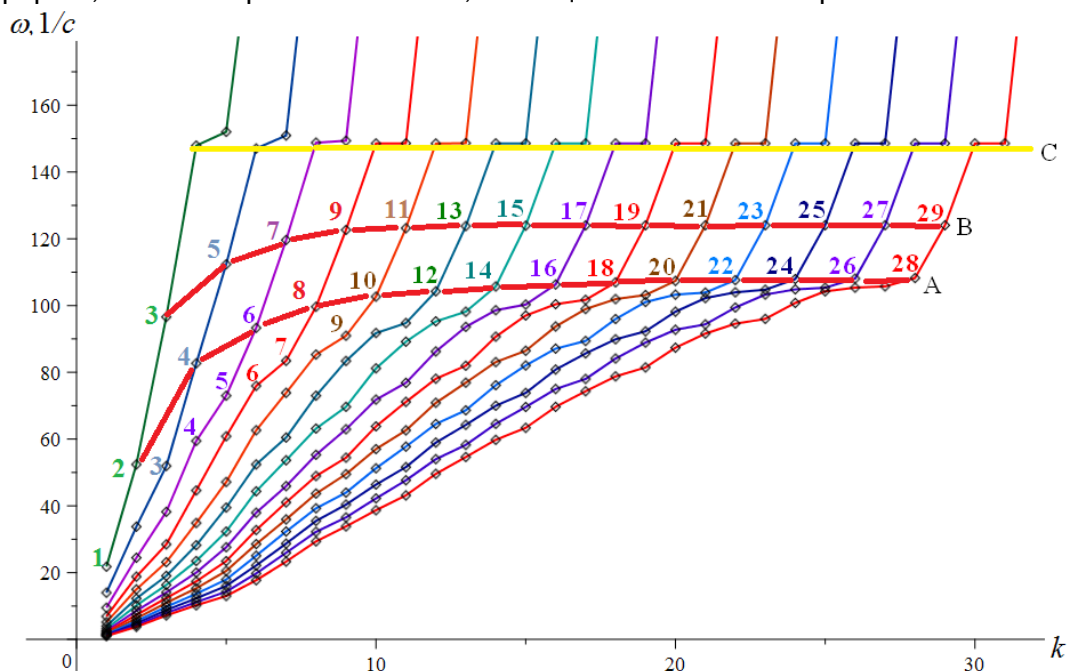


Рис. 6 – Спектры регулярных ферм. Низшие частоты. Спектральная константа и изолинии  
Fig. 6 – Spectra of regular trusses. Low frequencies. Spectral constant and isolines

## 4 Выводы/ Conclusions

Предложена схема статически определимой плоской балочной фермы с решеткой, содержащей внутренние горизонтальные связи. Разработана математическая модель конструкции для расчета собственной частоты колебаний в аналитической форме при произвольном числе панелей. Нижняя оценка собственной частоты колебаний получена по методу Донкерлея. В спектрах частот семейства регулярных ферм различного порядка замечены спектральные константы и изолинии. Можно сделать следующие выводы:

1. Оценка Донкерлея для произвольного количества панелей компактна и обеспечивает приемлемую точность.
2. В рассматриваемой балочной ферме погрешность аналитического решения незначительно растет с увеличением числа панелей, асимптотически приближаясь к 28%.

## 5 Acknowledgements / Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

## References

- 1 Ignatiev, V.A., Ignatiev, A.V. (2022) Finite Element Method in the Form of a Classical Mixed Method of Structural Mechanics (Theory, Mathematical Models and Algorithms). Publishing House ASV, Moscow. <https://iasv.ru>.
- 2 Ignatyev, A. V. and Ignatyev, V.A. (2016) On the Efficiency of the Finite Element Method in the Form of the Classical Mixed Method. *Procedia Engineering*, Elsevier Ltd, **150**, 1760–1765. <https://doi.org/10.1016/J.PROENG.2016.07.167>.
- 3 Galishnikova V.V. (2019) Nonlinear Numerical Stability Analysis of Space Trusses. *EG-ICE 2010 - 17th international workshop on intelligent computing in engineering*. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43274656>.
- 4 Kirsanov, M. (2020) Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, GB. <https://www.cambridgescholars.com/product/978-1-5275-5976-9>.

Kirsanov, M.; Fernando, M.; Vorobev, O.

The lower limit of natural frequency and the oscillation spectrum of a planar truss; 2023; *AlfaBuild*; Volume 26 Article No 2602. doi: 10.57728/ALF.26.2



- 5 Ovsyannikova, V.M. (2020) Dependence of the Deflection of a Planar External Statically Undeterminable Truss on the Number of Panels. *Structural Mechanics and Structures*, **27**, 16–25. [https://www.elibrary.ru/download/elibrary\\_44374443\\_62905709.pdf](https://www.elibrary.ru/download/elibrary_44374443_62905709.pdf).
- 6 Ovsyannikova, V.M. (2020) Dependence of Deformations of a Trapezoidal Truss Beam on the Number of Panels. *Structural Mechanics and Structures*, **26**, 13–20. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44110286>.
- 7 Gorbunova, A.S. and Lepetyukha, V.A. (2017) The Formula for Deflection of a Composite Truss Loaded on the Upper Belt. *Innovative Science*, **1**, 57–59. <https://doi.org/10.17117/cn.2016.01.05>.
- 8 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2005) Microarchitected Cellular Solids - The Hunt for Statically Determinate Periodic Trusses. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **85**, 607–617. <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>.
- 9 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2006) The Structural Performance of the Periodic Truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Pergamon, **54**, 756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>.
- 10 Kirsanov, M. (2021) Deformations And Spatial Structure Vibrations Frequency of The Rectangular Contour Type Cover: Analytical Solutions. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **98**. <https://doi.org/10.4123/CUBS.98.5>.
- 11 Kirsanov, M. (2022) Model of a Spatial Dome Cover. Deformations and Oscillation Frequency. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **99**. <https://doi.org/10.4123/CUBS.99.4>.
- 12 Mirsaidov, M.M., Abdikarimov, R.A., Vatin, N.I., Zhgutov, V.M., Khodzhaev, D.A. and Normuminov, B.A. (2018) Nonlinear Parametric Oscillations of Viscoelastic Plate of Variable Thickness. *Magazine of Civil Engineering*, St-Petersburg State Polytechnical University, **82**, 112–126. <https://doi.org/10.18720/MCE.82.11>.
- 13 Vorobev, O.V. (2020) Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **92**, 9204–9204. <https://doi.org/10.18720/CUBS.92.4>.
- 14 Ivanitskii, A.D. (2022) Formulas for Calculating Deformations of a Planar Frame. *Structural mechanics and structures*, Voronezh State Technical University, **34**, 90–98. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.34.3.007>.
- 15 Sviridenko, O. V and Komerzan, E. V. (2022) The Dependence of the Natural Oscillation Frequency of the Console Truss on the Number of Panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **101**, 10101. <https://doi.org/10.4123/CUBS.101.1>.
- 16 Tinkov, D. V. (2016) The Optimum Geometry of the Flat Diagonal Truss Taking into Account the Linear Creep. *Magazine of Civil Engineering*, St-Petersburg State Polytechnical University, **61**, 25–32. <https://doi.org/10.5862/MCE.61.3>.
- 17 Goloskokov, D.P. and Matrosov, A. V. (2018) Approximate Analytical Approach in Analyzing an Orthotropic Rectangular Plate with a Crack. *Materials Physics and Mechanics*, Institute of Problems of Mechanical Engineering, **36**, 137–141. [https://doi.org/10.18720/MPM.3612018\\_15](https://doi.org/10.18720/MPM.3612018_15).
- 18 Matrosov, A. V. (2019) Computational Peculiarities of the Method of Initial Functions. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, Springer Verlag, **11619 LNCS**, 37–51. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-24289-3\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-24289-3_4).
- 19 Kaveh, A., Hosseini, S.M. and Zaerreza, A. (2020) Size, Layout, and Topology Optimization of Skeletal Structures Using Plasma Generation Optimization. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering 2020 45:2*, Springer, **45**, 513–543. <https://doi.org/10.1007/S40996-020-00527-1>.
- 20 Kaveh, A., Rahami, H. and Shojaei, I. (2020) Swift Analysis of Civil Engineering Structures Using Graph Theory Methods. Springer International Publishing, Cham, **290**. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-45549-1>.
- 21 Galishnikova, V. V and Pahl, P.J. (2018) Analysis of Frame Buckling without Sidesway Classification. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, **14**, 299–312. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-4-299-312>.
- 22 Tinkov, D. V. (2015) Comparative Analysis of Analytical Solutions to the Problem of Truss Structure Deflection. *Magazine of Civil Engineering*, **57**. <https://doi.org/10.5862/MCE.57.6>.
- 23 Petrenko, V.F. (2021) The Natural Frequency of a Two-Span Truss. *AlfaBuild*, 2001. <https://doi.org/10.34910/ALF.20.1>.
- 24 Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N. and Serdjus, D.O. (2020) Calculation of Deformations of a

Kirsanov, M.; Fernando, M.; Vorobev, O.

The lower limit of natural frequency and the oscillation spectrum of a planar truss; 2023; *AlfaBuild*; Volume **26** Article No 2602. doi: 10.57728/ALF.26.2





- Cantilever-Frame Planar Truss Model with an Arbitrary Number of Panels. *Vestnik MGSU*, **4**, 510–517. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.4.510-517>.
- 25 Low, K.H. (2000) A Modified Dunkerley Formula for Eigenfrequencies of Beams Carrying Concentrated Masses. *International Journal of Mechanical Sciences*, Pergamon, **42**, 1287–1305. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00049-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00049-1).
- 26 Vorobev, O.V. (2020) Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **92**, 9204–9204. <https://doi.org/10.18720/CUBS.92.4>.