

М.Н. КИРСАНОВ, д-р физ.-мат. наук, профессор
 Национальный исследовательский университет «МЭИ», e-mail: c216@ya.ru

СПЕКТР ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ ПЛОСКОЙ МОДЕЛИ КОНСОЛЬНОЙ ФЕРМЫ

Выводится формула зависимости нижней границы основной частоты собственных колебаний статически определимой консольной фермы от числа панелей. Решетка фермы крестообразная. Масса фермы сосредоточена в ее узлах. Рассматриваются вертикальные колебания узлов. Усилия в стержнях для вычисления матрицы жесткости конструкции по формуле Максвелла – Мора находятся методом вырезания узлов. Уравнения равновесия узлов составляются и решаются в символьной форме в системе компьютерной математики Maple. Для определения нижней границы первой собственной частоты конструкции используется метод Донкерлея. Приближенное аналитическое решение сравнивается с наименьшей частотой всего спектра частот колебаний, найденной численно. Сравнение показывает высокую точность полученной формулы. С увеличением числа панелей погрешность приближенного решения уменьшается. Выявлены особенности спектра семейства ферм различного порядка. Обнаружены две спектральные константы.

Ключевые слова: ферма, Maple, индукция, число панелей, первая частота колебаний, нижняя оценка, спектральные константы.

Постановка задачи

Расчет собственных частот конструкций, инерционные свойства которых моделируются сосредоточенными массами, сводится к определению собственных чисел матрицы жесткости системы. Характеристическое уравнение высокого порядка в общем случае в аналитической форме не удается решить, поэтому на практике задача решается численно. Как правило, здесь используется метод конечных элементов [1-3]. Аналитические решения задачи о первой, наиболее важной для практики, частоте получены для некоторых плоских [4, 5] и пространственных ферм [6-8] в постановке Донкерлея как нижняя оценка частоты. Реже используется метод Рэлея, дающий верхнюю оценку [9]. Особенно эффективны аналитические решения применительно к регулярным системам. В этом случае решение применяется к широкому классу подобных ферм, что позволяет не только рассчитать основную частоту колебаний, но и оптимизировать параметры регулярности конструкций [10, 11]. Проблема существования статически определимых стержневых систем регулярного типа рассматривалась в [12-14]. Формулы для зависимости прогиба регулярных ферм от числа панелей методом индукции с применением систем компьютерной математики получены в [15-17]. Консольные регулярные фермы рассчитаны в [8, 16-18]. Аналитические зависимости прогиба регулярных, внешне статически неопределимых ферм получены в [19, 20]. Метод суперпозиции и разложение решения по собственным функциям в системе компьютерной математики Maple использовались в [21, 22] для нахождения аналитических решений задач деформирования элементов строительных конструкций.

В настоящей работе методом индукции выводится аналитическая зависимость первой частоты собственных колебаний плоской консольной фермы от числа панелей. Строится и анализируется спектр множества регулярных ферм различного порядка.

Расчетная модель

Плоская консольная ферма имеет прямолинейные пояса и крестообразную решетку (рис. 1). К вертикальной стенке ферма крепится на подвижном и неподвижном шарнирах. Длина консоли $L = an$, где n — число панелей. Общее число стержней фермы вместе с тремя опорными стержнями $\eta = 4(n+1)$.

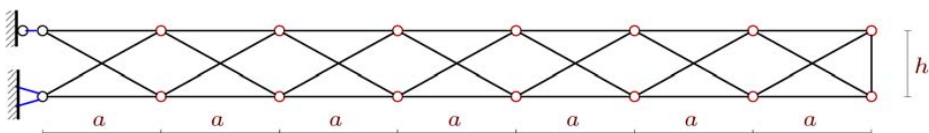


Рисунок 1. Схема консольной фермы, $n = 7$

Стержни конструкции упругие. Усилия в стержнях, необходимые для расчета жесткости конструкции по формуле Максвелла – Мора, находятся в символьной форме из решения системы линейных уравнений равновесия узлов. Для этого в программу [23], составленную на языке символьной математики Maple, вводятся координаты узлов. Узлы нумеруются (рис. 2).

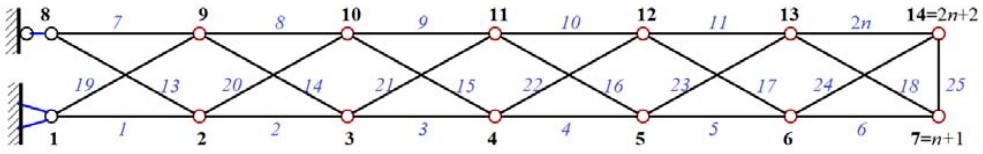


Рисунок 2. Нумерация узлов и стержней, $n = 6$

Координаты узлов для произвольного числа панелей n имеют вид:

$$x_i = x_{i+n+1} = a(i-1), y_i = 0, y_{i+n+1} = h, i = 1, \dots, n+1.$$

Порядок соединения стержней в шарнирные узлы задается списками номеров концов соответствующих стержней. Пояса имеют следующие списки номеров: $\Phi_i = [i, i+1]$, $\Phi_{i+n} = [i+n+1, i+n+2]$, $i = 1, \dots, n$. Восходящие и нисходящие раскосы решетки кодируются списками: $\Phi_{i+2n} = [i+1, i+n+1]$, $\Phi_{i+3n} = [i, i+n+2]$, $i = 1, \dots, n$. Эти данные необходимы для вычисления направляющих косинусов усилий в стержнях при составлении системы уравнений равновесия узлов в проекциях на оси координат.

Расчет первой собственной частоты по методу Донкерля

Так как по сделанному предположению все массы движутся только по оси y , то число степеней свободы системы масс равно числу узлов $N = 2(n+1)$. Нижняя оценка первой частоты колебаний по методу Донкерля имеет вид [4-8]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{k=1}^N \omega_k^{-2}, \quad (1)$$

где ω_k — парциальная частота колебаний массы m в узле фермы. Значения парциальных частот собственных колебаний следуют из уравнения колебаний отдельной массы: $m \ddot{y}_k + d_k y_k = 0$, где d_k — коэффициент жесткости, y_k — смещение массы, \ddot{y}_k — ускорение. Парциальная частота колебаний имеет вид: $\omega_k = \sqrt{d_k / m}$. Коэффициент жесткости вычисляется по формуле Максвелла – Мора в предположении, что продольные жесткости EF всех стержней одинаковы:

$\delta_k = 1 / d_k = \sum_{\alpha=1}^n (\tilde{S}_{\alpha}^{(k)})^2 l_{\alpha} / (EF)$. Суммирование производится по всем стержням фермы. Здесь обозначено: $\tilde{S}_{\alpha}^{(k)}$ — усилия в стержне с номером α от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу, где расположена масса с номером k . Из (1) следует:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{i=1}^N \delta_i = m \Delta_n. \quad (2)$$

Вычисление жесткости фермы по формуле Максвелла – Мора по результатам расчета усилий в стержнях от последовательного действия на узлы фермы единичной нагрузки по направлению оси x показывает, что искомый коэффициент Δ_n имеет вид:

$$\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF). \quad (3)$$

Здесь обозначена длина раскоса: $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Последовательный расчет коэффициента дает следующие результаты:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (8a^3 + 4c^3 + 6h^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_2 &= (40a^3 + 12c^3 + 9h^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_3 &= (120a^3 + 24c^3 + 12h^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_4 &= (280a^3 + 40c^3 + 15h^3) / (h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Обобщение этой последовательности методами Maple дает значения коэффициентов в (3): $C_1 = n(n+1)(n+2)(n+3)/3$, $C_2 = 2n(n+1)$, $C_3 = 3(n+1)$. В результате получается искомая зависимость:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{m(n+1)(n(n+2)(n+3)a^3/3 + 2nc^3 + 3h^3)}}. \quad (4)$$

Оценить точность полученной оценки можно, сравнивая результат с численным, полученным как решение задачи о колебании системы с многими степенями свободы. В системе Maple есть оператор *Eigenvalues* из пакета *LinearAlgebra* для вычисления собственных чисел матрицы.

Пример. Ферма с размерами $a = 4$ м, $h = 3$ м и массами $m = 400$ кг в узлах составлена из стальных стержней с модулем упругости $E = 2,1 \times 10^5$ МПа и площадью сечений $F = 3$ см².

Кривые на графике (рис. 3) иллюстрируют зависимость первой частоты спектра, полученного численно и по формуле (4). При увеличении числа панелей частота собственных колебаний уменьшается. Решение (4) дает нижнюю границу первой частоты. Для оценки точности формулы можно ввести величину относительной погрешности $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D)/\omega_1$ (рис. 4). Высота фермы влияет на величину погрешности, но в любом случае, если не считать небольшие скачки кривых при малом числе панелей, погрешность уменьшается с ростом числа панелей. Другая известная оценка, дающая оценку сверху и также допускающая аналитическое решение — оценка Рэлея [16], имеет значительно большую точность, однако расчетные формулы по этому методу получаются не такими компактными, как (4).

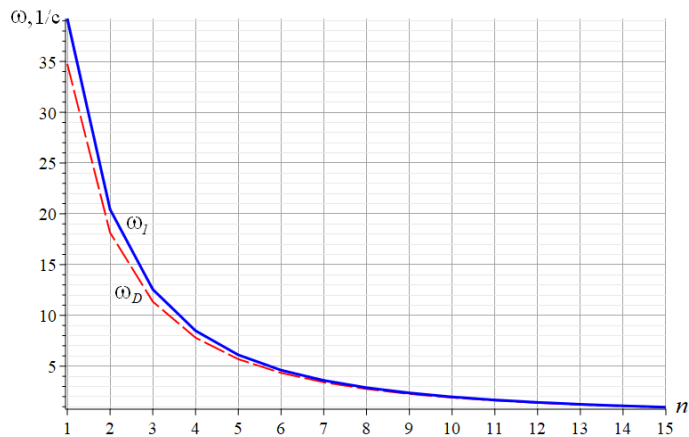


Рисунок 3. Зависимость первой частоты от числа панелей по двум методам

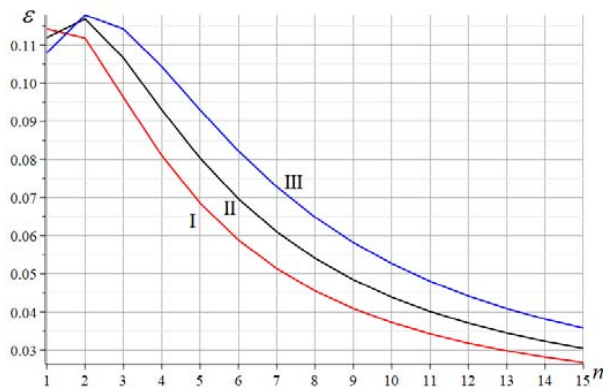


Рисунок 4. Зависимость погрешности оценки Донкерлея от числа панелей.

I — $h = 3$ м; II — $h = 4$ м; III — $h = 5$ м

Помимо первой собственной частоты на практике бывает важно исследовать и высшие частоты. Численные расчеты показывают, что спектр частот рассматриваемой конструкции имеет интересную особенность. Если спектры частот ферм различного порядка отметить на одном графике так, чтобы точки, соответствующие частотам фермы одного порядка, были соединены отдельными линиями (рис. 5), то можно заметить, что для ферм различного порядка существуют совпадающие частоты – спектральные константы. На оси абсцисс k – номер частоты в спектре. В рассматриваемой задаче таких частот по крайней мере две – 287,7 Гц и 402,13 Гц, соответствующие прямым I и II. Наиболее интересна прямая II, означающая, что все фермы семейства независимо от их порядка имеют одну и ту же высшую частоту.

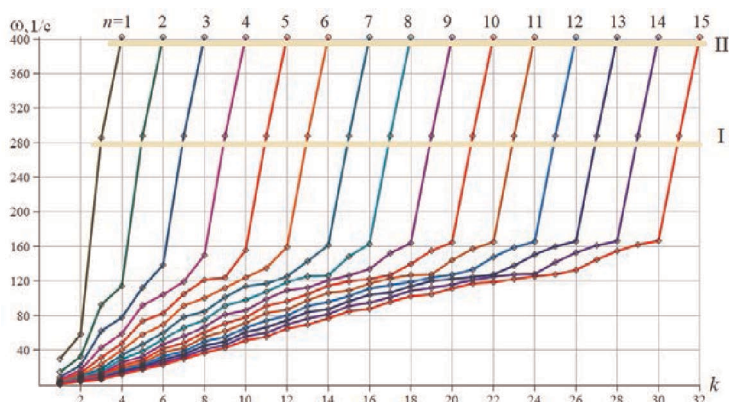


Рисунок 5. Спектры частот фермы

Заключение

Методом индукции в системе компьютерной математики выведена аналитическая зависимость первой собственной частоты фермы от числа панелей. Формула зависимости получилась достаточно простой и с хорошей точностью. Более того, разница между аналитическим решением и численным, полученным для системы с многими степенями свободы, уменьшается с увеличением числа панелей. Построен и спектр частот конструкции. Обнаружены две спектральные константы, одна из которых – верхняя граница частот ферм с произвольным числом панелей. Точность полученной нижней границы первой частоты позволяет использовать найденную оценку для предварительного расчета проектируемой конструкции и тестирования численных решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

Список литературы

- Игнатъев А.В. Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Часть 3 // Вестник МГСУ. – 2015. – № 1. – С. 16-26.
- Жиделёв А.В., Игнатъев А.В. Сравнительный анализ расчетов на устойчивость геометрически нелинейных стержневых систем в статической и динамической постановках на примере фермы Мизеса // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2009. – №. 15. – С. 52-54.
- Abdikarimov R., Vatin N., Normuminov B., Khodzhaev D. Vibrations of a viscoelastic isotropic plate under periodic load without considering the tangential forces of inertia. Journal of Physics: Conference Series. 2021. No. 1 (1928). DOI:10.1088/1742-6596/1928/1/012037.
- Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты двухпролётной фермы с учётом жесткости опор // Строительная механика и конструкции. – 2021. – № 4 (31). – С. 16-25.
- Petrenko V.F. The natural frequency of a two-span truss. AlfaBuild. 2021. No. 20. Pp. 2001. DOI:10.34910/ALF.20.1.
- Кирсанов М.Н. Деформации и собственная частота колебаний фермы пространственной модели многоэтажного здания // Вестник МГСУ. – 2022. – Т. 17. – Вып. 5. – С. 580-588. – DOI: 10.22227/1997-0935.2022.5.580-588.
- Kirsanov M. N. Model of a spatial dome cover. Deformations and oscillation frequency. Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. V. 99. No. 4. Article no. 9904. Pp. 39-44. DOI: 10.4123/CUBS.99.4.
- Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. Iss. 3 (101). Article No. 10101. 50 p. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.

9. Vorobev O.V. Bilateral analytical estimation of the first frequency of a plane truss. Construction of unique buildings and structures. 2020. No. 7 (92). Pp. 9204–9204. DOI:10.18720/CUBS.92.4.
10. Kaveh A. Optimal Analysis of Structures by Concepts of Symmetry and Regularity. Vienna: Springer, 2013. 463 p. DOI: 10.1007/978-3-7091-1565-7.
11. Kaveh A. Truss optimization with natural frequency constraints using a hybridized CSS–BBBC algorithm with trap recognition capability. Computers & Structures. 2012. Vol. 102-103. Pp. 14–27. DOI: 10.1016/J.COMPSTRUC.2012.03.016.
12. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. No. 85 (9). Pp. 607–617. DOI: 10.1002/zamm.200410208.
13. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures. J. Mech. Phys. Solids. 2003. 51. Pp. 383–391.
14. Zok F. W., Latture R. M., Begley M. R. Periodic truss structures. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. Vol. 96. Pp. 184–203. DOI: 10.1016/j.jmps.2016.07.007
15. Комерзан Е.В. Аналитический расчет прогиба плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей / Е.В. Комерзан, Н.А. Лушнов, Т.С. Осипова // Строительная механика и конструкции. – 2022. – №2 (33). – С. 17–25.
16. Терзе С.В. Аналитический расчет зависимости деформаций консольной стойки от числа панелей в системе Maple // Строительная механика и конструкции. – 2020. – №2 (25). – С. 16–24.
17. Пережилова Е.Д. Формула для прогиба консольной фермы под действием распределенной нагрузки по верхнему поясу // Постулат. – 2018. – 12.
18. Ильин И.А. Прогиб консольной фермы с крестообразной решеткой под действием равномерной нагрузки // Вестник научных конференций. – 2016. – № 6-4 (10). – С. 52–54.
19. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. – 2021. – №2 (29). – С. 29–37.
20. Овсянникова В.М. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // Строительная механика и конструкции. – 2020. – № 4 (27). – С. 16–25.
21. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle. Applied Mathematical Sciences. 2016. No. 10 (54). DOI: 10.12988/ams.2016.67211. URL: www.m-hikari.comhttp://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211 (date of application: 06/17/2020).
22. Goloskokov D.P., Matrosov A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015. Proceedings. 2015. Pp. 382–385. DOI: 10.1109/SCP.2015.7342169.
23. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuk D.O. Calculation of deformations of a cantilever frame planar truss model with an arbitrary number of panels. Vestnik MGSU. 2020. No. 4 (4). Pp. 510–517. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.

FREQUENCY SPECTRUM OF NATURAL OSCILLATIONS AND PLANAR MODEL CONSOLE TRUSS FIRST FREQUENCY ANALYTICAL EVALUATION

M.N. Kirsanov, National Research University “MPEI”; e-mail: c216@ya.ru

Abstract. A formula is derived for the dependence of the lower limit of the main natural frequency of a statically determined cantilever truss on the number of panels. The lattice of the truss is cruciform. The mass of the truss is concentrated in its nodes. Vertical vibrations of nodes are considered. The forces in the bars for calculating the stiffness matrix of the structure according to the Maxwell–Mohr formula are found by cutting out the nodes. Equilibrium equations for nodes are compiled and solved in symbolic form in the Maple computer mathematics system. To determine the lower limit of the first natural frequency of the structure, the Dunkerley method is used. The approximate analytical solution is compared with the lowest frequency of the entire spectrum of oscillation frequencies found numerically. The comparison shows the high accuracy of the resulting formula. As the number of panels increases, the error of the approximate solution decreases. Features of the spectrum of a family of trusses of different orders are revealed. Two spectral constants are found.

Key words: truss, Maple, induction, number of panels, first oscillation frequency, lower estimate, spectral constants

References

1. Ignatiev A.V. Basic formulations of the finite element method in problems of structural mechanics. Part 3. Bulletin of MGSU. 2015. No. 1. Pp. 16–26 (in Russian).
2. Zhidelev A.V., Ignatiev A.V. Comparative analysis of calculations for the stability of geometrically nonlinear rod systems in static and dynamic formulations on the example of the mises truss. Bulletin of the Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Construction and architecture. 2009. No. 15. Pp. 52–54 (in Russian).
3. Abdikarimov R., Vatin N., Normuminov B., Khodzhaev D. Vibrations of a viscoelastic isotropic plate under periodic load without considering the tangential forces of inertia. Journal of Physics: Conference Series. 2021. No. 1 (1928). DOI:10.1088/1742-6596/1928/1/012037.
4. Petrenko V.F. Evaluation of the natural frequency of a two-span truss, taking into account the rigidity of the supports. Structural mechanics and structures. 2021. No. 4 (31). Pp. 16–25 (in Russian).

5. Petrenko V.F. The natural frequency of a two-span truss. AlfaBuild. 2021. No. 20. Pp. 2001. DOI:10.34910/ALF.20.1.
6. Kirsanov M.N. Deformations and natural oscillation frequency of the farm of a spatial model of a multi-storey building. Bulletin of MGSU. 2022. Vol. 17. Issue. 5. Pp. 580–588. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.5.580-588 (in Russian).
7. Kirsanov M. N. Model of a spatial dome cover. Deformations and oscillation frequency. Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. V. 99. No. 4. Article no. 9904. Pp. 39–44. DOI: 10.4123/CUBS.99.4.
8. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. Iss. 3 (101). Article No. 10101. 50 p. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
9. Vorobev O.V. Bilateral analytical estimation of the first frequency of a plane truss. Construction of unique buildings and structures. 2020. No. 7 (92). Pp. 9204-9204. DOI:10.18720/CUBS.92.4.
10. Kaveh A. Optimal Analysis of Structures by Concepts of Symmetry and Regularity. Vienna: Springer, 2013. 463 p. DOI: 10.1007/978-3-7091-1565-7.
11. Kaveh A. Truss optimization with natural frequency constraints using a hybridized CSS–BBBC algorithm with trap recognition capability. Computers & Structures. 2012. Vol. 102-103. Pp. 14-27. DOI: 10.1016/J.COMPSTRUC.2012.03.016.
12. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. No. 85 (9). Pp. 607-617. DOI: 10.1002/zamm.200410208.
13. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures. J. Mech. Phys. Solids. 2003. 51. Pp. 383-391.
14. Zok F. W., Latture R. M., Begley M. R. Periodic truss structures. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. Vol. 96. Pp. 184-203. DOI: 10.1016/j.jmps.2016.07.007.
15. Komerzan E.V., Lushnov N.A., Osipova T.S. Analytical calculation of the deflection of a flat trussed truss with an arbitrary number of panels. Structural mechanics and structures. 2022. No. 2 (33). Pp. 17-25 (in Russian).
16. Terze S.V. Analytical calculation of dependence of cantilever rack deformations on the number of panels in the Maple system. Structural mechanics and structures. 2020. No. 2 (25). Pp. 16-24 (in Russian).
17. Perezhilova E.D. Formula for deflection of a cantilever truss under the action of a distributed load along the upper chord. Postulate. 2018. No. 12 (in Russian).
18. Ilyin I.A. Deflection of a cantilever truss with a cruciform lattice under the action of a uniform load. Bulletin of scientific conferences. 2016. No. 6-4(10). Pp. 52-54 (in Russian).
19. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. Structural mechanics and structures. 2021. No. 2 (29). Pp. 29-37 (in Russian).
20. Ovsyannikova V.M. Dependence of the deflection of a flat outwardly statically indeterminate truss on the number of panels. Structural mechanics and structures. 2020. No. 4 (27). Pp. 16-25 (in Russian).
21. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle. Applied Mathematical Sciences. 2016. No. 10 (54). DOI: 10.12988/ams.2016.67211. URL: www.m-hikari.comhttp://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211 (date of application: 06/17/2020).
22. Goloskokov D.P., Matrosov A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015. Proceedings. 2015. Pp. 382-385. DOI: 10.1109/SCP.2015.7342169.
23. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuks D.O. Calculation of deformations of a cantilever frame planar truss model with an arbitrary number of panels. Vestnik MGSU. 2020. No. 4 (4). Pp. 510–517. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.

Для цитирования: Кирсанов М.Н. Спектр частот собственных колебаний и аналитическая оценка первой частоты плоской модели консольной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2023. № 4. С. 15–20.
DOI: 10.37538/0039-2383.2023.4.15.20

For citation: Kirsanov M.N. Frequency spectrum of natural oscillations and planar model console truss first frequency analytical evaluation. Structural Mechanics and Analysis of Constructions. 2023. no. 4. pp. 15–20. (In Russian).
DOI: 10.37538/0039-2383.2023.4.15.20

Лаборатория деревянных конструкций ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко

- Разработка нормативно-технической документации по деревянным конструкциям, включая СП (СНиПы), ГОСТы, СТО, Рекомендации;
- Разработка и исследование новых видов конструкций, их соединений и узлов;
- Испытания строительных конструкций из древесины и древесных материалов;
- Обследование деревянных конструкций зданий и сооружений, составление заключений о состоянии и разработка рекомендаций по усилению и реконструкции;
- Проектирование каркасов зданий и сооружений из деревянных конструкций различного назначения пролетами до 150 м на стадиях «П», «КД», «КДД»

Тел.: +7 (499) 174-77-40; +7 (499) 174-77-45
 E-mail: tsniiskldk@yandex.ru, spair23@list.ru
 Сайт: <https://www.cstroy.ru/tsniisk/ldk/>