

УДК 624.04:531.391.3

Формулы для расчета деформаций и собственной частоты свободных колебаний шестигранной башни

М.Н. Кирсанов¹

*Национальный исследовательский университет «МЭИ»
Россия, г. Москва*

*¹Д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин,
тел.: (495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru*

Постановка задачи. Предлагается схема шестигранной призматической статически определимой пространственной фермы. Ставится задача методом индукции вывести формулы зависимости прогиба конструкции и нижней границы основной частоты собственных колебаний от числа панелей по высоте призмы.

Материалы и методы: Усилия в стержнях одновременно с реакциями опор находятся в аналитической форме методом вырезания узлов с использованием системы символьной математики Maple. Один из узлов в основании фермы имеет сферическую опору, один — цилиндрическую, остальные четыре опоры — стойки. Прогиб вершины определяется по интегральной формуле Максвелла – Мора. Из анализа последовательностей коэффициентов в формулах решений для отдельных конструкций с различным числом панелей определяются их общие члены, входящие в искомую расчетную формулу. Для аналитической оценки первой частоты свободных колебаний используется приближенный метод Донкерлея.

Результаты: Для различных типов нагрузок получены формулы зависимости прогибов фермы от числа панелей. Коэффициенты в решении имеют форму полиномиальную по числу панелей. Выведенная аналитическая зависимость первой частоты от числа панелей в сравнении с численным решением задачи о спектре имеет небольшую погрешность, уменьшающуюся с ростом числа панелей.

Выводы. Разработана конструкция осесимметричной статически определимой фермы башенного типа, допускающая аналитические решения задачи о прогибе и задачи о первой собственной частоте при произвольном числе панелей. Полученные формулы можно использовать для оценки точности численных решений и для предварительных расчетов моделей сооружений подобного типа.

Ключевые слова: шестигранная призма, пространственная ферма, прогиб, индукция, Maple, собственная частота, метод Донкерлея, аналитическое решение

Введение. Для расчета деформаций и собственных частот пространственных строительных конструкций в инженерной практике используются численные методы, основанные на методе конечных элементов [2, 6, 18]. В расчетах сложных систем, содержащих большое число элементов, возникает неизбежная погрешность накопления ошибок округления, приводящая к потере точности [2, 21]. Если рассчитываемая конструкция регулярная, то к ней можно применить индуктивные методы получения аналитических зависимостей исследуемой величины от порядка системы, например, от числа панелей или от периодически повторяющихся групп стержней. Этим методом в системе компьютерной математики Maple [23, 24] получены некоторые решения задачи о прогибе для плоских решетчатых [9, 11, 15],

арочных [10, 20] и пространственных ферм [14, 17]. Формулы для нижней границы первой собственной частоты по методу Донкерлея при произвольном числе панелей выведены в [16, 19].

Аналитические методы с использованием вариационных принципов в системе символической математики применялись в [3–5]. Вариационный метод применим для расчета регулярных и произвольных конструкций. Метод индукции для расчета конструкций используется для регулярных систем с периодически повторяющимися группами стержней (например, панелями) и дает, как правило, простые расчетные формулы [1]. В основе метода лежит обобщение серии сравнительно простых аналитических решений задачи о прогибе ферм на произвольный порядок их регулярности. Метод индукции используется в основном для статически определимых систем. Проблемой существования статически определимых регулярных конструкций впервые занялись *Hutchinson R. G., Fleck N.A. Zok, F. W., Latture R. M., Begley M. R.* [7, 8, 22]. Схемы плоских статически определимых регулярных ферм и формулы для расчета их прогибов в случае действия различных нагрузок приведены в справочниках автора [12, 13].

В настоящей работе предлагается схема статически определимой пространственной фермы башенного типа (рис. 1, 2), состоящая из шести одинаковых граней с крестообразной решеткой. Ферма имеет n ярусов высотой h , кроме верхнего куполообразного высотой $h/2$. Опорами конструкции являются четыре стойки, сферическая шарнирная опора A и цилиндрическая B .

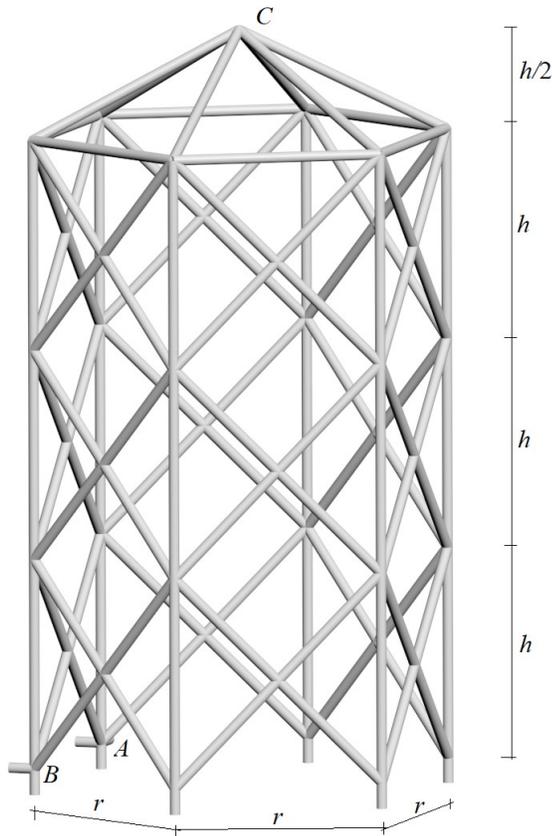


Рис. 1. Ферма, $n = 4$

Раскосы крестообразной решетки имеют длину $d = \sqrt{a^2 + r^2}$. Шестигранный купол высотой $h/2$ опирается на узлы верхнего контура. Стойки ярусов имеют высоту h . В ферме содержится $n_s = 18n + 3$ стержней, включая девять опорных стержней. Ставится задача вывода

аналитических зависимостей прогиба конструкции под действием различных нагрузок от числа панелей и получить формулу для нижней оценки первой частоты ее собственных колебаний.

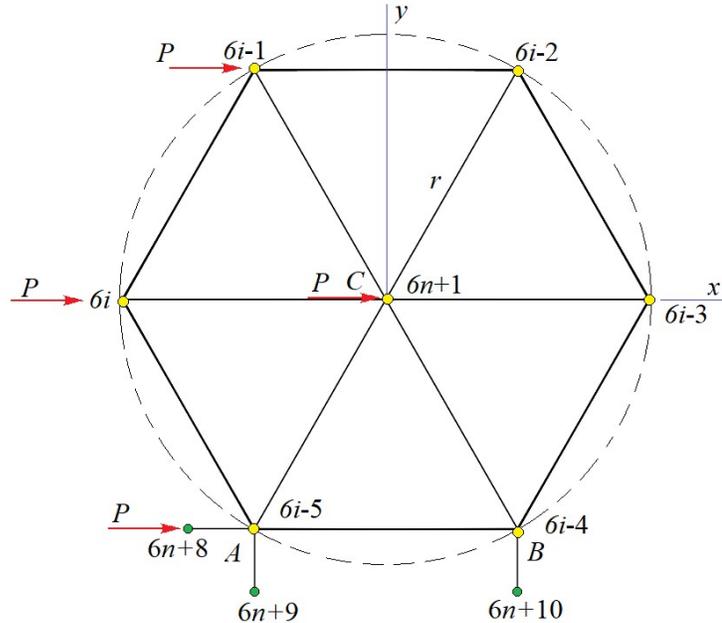


Рис. 2. Нумерация узлов i -го контура

1. Расчет усилий. Расчет усилий в стержнях и все преобразования, необходимые для вывода искомых формул, проведем в системе символьной математики Maple [1, 24].

В программу вводятся координаты узлов. Начало координат выбирается на оси цилиндра радиусом r , описанного вокруг башни (рис. 2). Координаты узлов решетки имеют вид:

$$x_{i+6(j-1)} = r \cos \varphi, y_{i+6(j-1)} = r \sin \varphi, z_{i+6(j-1)+1} = h(j-1), \varphi = \pi i / 3, i = 1, \dots, 6, j = 1, \dots, n.$$

Координаты шарниров стоек на основании:

$$x_{i+6n+1} = r \cos \varphi, y_{i+6n+1} = r \sin \varphi, z_{i+6n+1} = -u, \varphi = \pi i / 3, i = 1, \dots, 6,$$

где u произвольное число, например, 1 (длина опорных стоек). Стойки принимаются жесткими и их длины в решение не входят. Координаты вершины C :

$$x_{6n+1} = 0, y_{6n+1} = 0, z_{6n+1} = h(n-1/2).$$

Структура соединений стержней задается списками $T_i, i = 1, \dots, n_s$, номеров концов соответствующих стержней. Ребра (вертикальные стержни) кодируются, например, так:

$$T_{6n+6(j-1)} = [6j, 6j+1],$$

$$T_{i+6(j-1)} = [i+6(j-1), i+6j+1], i = 1, \dots, 5, j = 1, \dots, n-1.$$

По данным о координатах узлов и порядку соединения стержней в узлы вычисляются коэффициенты уравнений равновесия узлов в проекциях на три оси координат. Система линейных уравнений равновесия имеет вид: $\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{B}$, где \mathbf{A} — матрица коэффициентов (направляющих косинусов усилий в стержнях), \mathbf{S} — вектор всех неизвестных усилий. В число усилий включаются и девять реакций опор. Компоненты вектора \mathbf{B} — это узловые нагрузки. Для узла i выделяются три последовательных элемента вектора \mathbf{B} . В элементы с номерами вида $3i-2$ заносятся внешние горизонтальные усилия в проекции на ось x , в элементы $3i-1$ — на ось y . Вертикальные нагрузки находятся в элементах с номером $3i$.

При действии равномерной вертикальной (рис. 3) нагрузки на шесть верхних узлов и вершину ненулевые элементы вектора \mathbf{B} имеют вид: $B_{3i} = -G, i = 6n - 5, \dots, 6n + 1$.

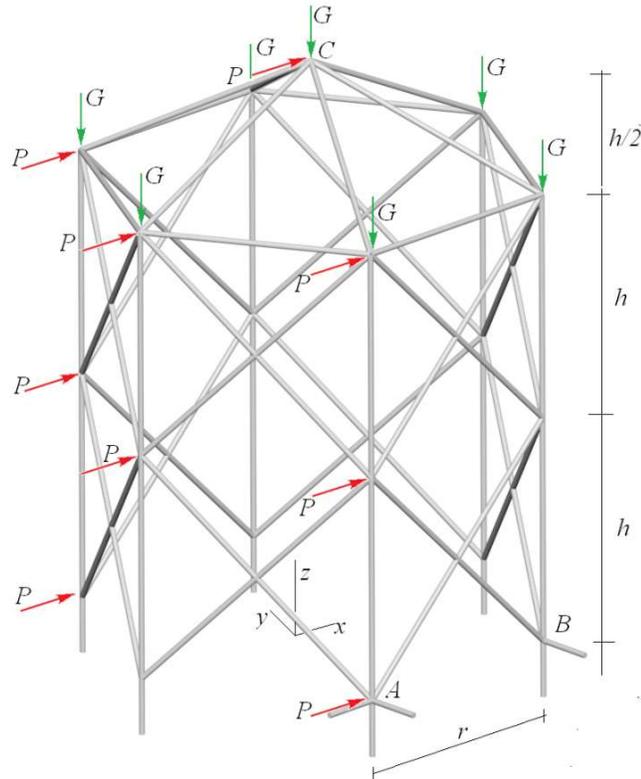


Рис. 3. Боковая (ветровая) нагрузка P и вертикальная G на ферму, $n=3$

2. Прогиб. Вертикальная нагрузка. Для расчета вертикального смещения верхушки C конструкции используется формула Максвелла – Мора $\Delta = \sum_{j=1}^{n-9} \frac{S_j s_j l_j}{EF}$, где E — модуль упругости стержней, F — площадь их поперечного сечения, l_j и S_j — длина и усилие в j -м стержне от действия нагрузки, s_j — усилие от единичной вертикальной силы. Девять опорных стержней приняты недеформируемыми и в сумму не входят.

При разных n получаются следующие выражения для прогиба:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= G(c^3 + 8r^3) / (12h^2 EF), \\ \Delta_2 &= G(c^3 + 14h^3 + 8r^3) / (12h^2 EF), \\ \Delta_3 &= G(c^3 + 28h^3 + 8r^3) / (12h^2 EF), \\ \Delta_4 &= G(c^3 + 42h^3 + 8r^3) / (12h^2 EF), \dots\end{aligned}$$

где $c = \sqrt{4r^2 + h^2}$. Коэффициенты при c^3 и r^3 не меняются. Общий член последовательности коэффициентов при h^3 можно найти средствами Марле. В результате зависимость прогиба от числа панелей примет вид:

$$\Delta = G(C_1 r^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF),$$

где $C_1 = 2/3, C_2 = 1/12, C_3 = 7(n-1)/6$.

3. Горизонтальная нагрузка. Ветровую нагрузку по направлению оси x можно моделировать узловыми силами на три подветренных ребра фермы (рис. 3):

$$B_{3i-2} = P, i = 6n + 1,$$

$$B_{3j-2} = P, j = 6i, 6i - 1, 6i - 5, i = 1, \dots, n - 1.$$

Прогиб вычисляется по горизонтальному смещению вершины C . Вектор правой части системы уравнений равновесия узлов в проекции на оси координат для определения усилий s_j в формуле Максвелла – Мора имеет единственную ненулевую компоненту: $B_{3i-2} = 1, i = 6n + 1$. Последовательность решений получается более сложной:

$$\Delta_1 = P(c^3 + r^3) / (4a^2 EF),$$

$$\Delta_2 = P(21c^3 + 396d^3 + 652h^3 + 164r^3) / (24a^2 EF),$$

$$\Delta_3 = P(18c^3 + 726d^3 + 5112h^3 + 19r^3) / (12a^2 EF),$$

$$\Delta_4 = P(17c^3 + 1040d^3 + 15832h^3 + 140r^3) / (8a^2 EF),$$

$$\Delta_5 = P(33c^3 + 2724d^3 + 71928h^3 + 35r^3) / (24a^2 EF), \dots$$

В общем случае имеем вид решения:

$$\Delta = P(C_1 r^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3) / (r^2 EF). \quad (1)$$

Для определения коэффициентов в (1), являющихся общими членами последовательности коэффициентов при степенях размеров, привлекаются операторы `rgf_findrecur` и `rsolve` системы Maple. Коэффициенты в (1) имеют вид:

$$C_1 = (8(7(-1)^n + 9)n - 41(-1)^n - 51) / 24,$$

$$C_2 = (5n - 3) / 8, \quad C_3 = (53n^2 - 91n - (-1)^n + 37) / 4, \quad (2)$$

$$C_4 = (950n^4 - 3076n^3 + 3436n^2 - 4(14(-1)^n + 397)n + 17(-1)^n + 239) / 48.$$

Числовой пример. Для построения графиков решения задачи о ветровой нагрузке (1), (2) фиксируется высота конструкции $H = nh$ и общая нагрузка на все узлы боковых ребер $P_{sum} = P(3n + 1)$. Введен безразмерный прогиб вершины C : $\Delta' = \Delta EF / (P_{sum} H)$. Найденная зависимость прогиба от радиуса обнаруживает минимум (рис. 4). Это позволяет выбрать оптимальное по жесткости соотношение радиуса r и высоты H фермы. С увеличением высоты h значение оптимального радиуса r увеличивается.

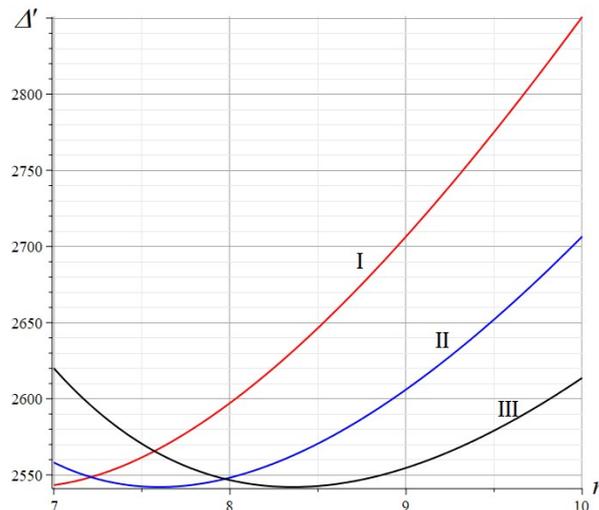


Рис. 4. Зависимость прогиба от радиуса r при горизонтальной нагрузке;

$n = 4$; I — $H = 9$ м; II — $H = 10$ м; III — $H = 11$ м

Кривые прогиба имеют асимптоты, угол наклона которых можно вычислить с помощью оператора `limit` системы Maple. Угол зависит от числа панелей:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta' / r = (954n^3 + 24(7(-1)^n - 31)n^2 - (85(-1)^n + 57)n - 47(-1)^n + 99) / (24H).$$

Оценка первой собственной частоты колебаний фермы. Рассмотрим модель горизонтальных колебаний фермы с массами m , расположенными во всех ее узлах, кроме шести опорных. Число степеней свободы в такой постановке $N = 6n - 5$. Расчет частот колебаний системы с многими степенями свободы возможен лишь в численной форме. Нижнюю оценку первой частоты можно получить аналитически по методу Донкерлея:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{k=1}^N \omega_k^{-2}, \quad (3)$$

где ω_k — частота колебания одной массы m , расположенной в узле фермы. Уравнение колебаний, записанное для одной массы, имеет скалярный вид:

$$m\ddot{x}_k + d_k x_k = 0,$$

где x_k — горизонтальное смещение массы, \ddot{x}_k — ускорение, d_k — коэффициент жесткости. Частота колебаний (парциальная частота) массы: $\omega_k = \sqrt{d_k / m}$. Для определения коэффициента жесткости, обратного коэффициенту податливости, используется формула Максвелла – Мора:

$$\delta_k = 1 / d_k = \sum_{\alpha=1}^{n_s-9} \left(\tilde{S}_\alpha^{(k)} \right)^2 l_\alpha / (EF).$$

Обозначено: $\tilde{S}_\alpha^{(k)}$ — усилия в стержне с номером α от действия единичной горизонтальной силы, приложенной к узлу k , где расположена масса. Согласно (3):

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{k=1}^N \delta_k = m \Delta_n. \quad (4)$$

Рассчитывая последовательно суммы Δ_n , находим общий вид решения:

$$\Delta_n = (C_{1,n}r^3 + C_{2,n}c^3 + C_{3,n}d^3 + C_{4,n}h^3) / (r^2EF) \quad (5)$$

и получаем последовательность формул:

$$\Delta_2 = 8(r^3 + d^3 + h^3) / (3r^2EF),$$

$$\Delta_3 = (124r^3 + 23c^3 + 1110d^3 + 6620h^3) / (9r^2EF),$$

$$\Delta_4 = 2(217r^3 + 23c^3 + 1599d^3 + 20778h^3) / (9r^2EF),$$

$$\Delta_5 = (110r^3 + 23c^3 + 2116d^3 + 47740h^3) / (3r^2EF), \dots$$

Для последовательности $8/3, 6620/9, 13852/3, 47740/3 \dots$ коэффициентов при h^3 оператор `gf_findrecur` возвращает рекуррентное уравнение:

$$C_{4,n} = 3C_{4,n-1} - C_{4,n-2} - 5C_{4,n-3} + 5C_{4,n-4} + C_{4,n-5} - 3C_{4,n-6} + C_{4,n-7}.$$

При получении этого уравнения потребовалось выписать аналитические решения для ферм с числом панелей от 2 до 14. Оператор `rsolve` дает решение для коэффициента $C_{4,n}$ в виде:

$$C_{4,n} = (2676n^4 - 12128n^3 + 18934n^2 - 102n(-1)^n - 11974n + 165(-1)^n + 2555) / 36. \quad (6)$$

Таким же образом, но несколько проще, получаются и остальные коэффициенты искомой формулы:

$$\begin{aligned} C_{1,n} &= (102n(-1)^n + 308n - 201(-1)^n - 571) / 18, \\ C_{2,n} &= 23(n-2) / 9, \\ C_{3,n} &= (344n^2 - 1006n - 5(-1)^n + 657) / 6. \end{aligned} \quad (7)$$

Погрешность нижнего приближения решения (4–7) оценим из сравнения с наименьшей частотой спектра, полученной из численного решения задачи о колебании фермы с N степенями свободы. Численное решение получается в системе Maple с использованием оператора Eigenvalues определения собственных чисел матрицы из пакета LinearAlgebra системы Maple.

Кривые зависимости первой частоты ω_1 , полученной численно и ω_D по формуле (4, 5) с коэффициентами (6, 7), сопоставлены на графике 5 при $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $F = 1,6 \cdot 10^{-3}$ м², $m = 600$ кг, $r = 5$ м, $h=3$ м и $h=4$ м. С увеличением числа панелей точность аналитической оценки растет. Это отображено на графике 6 зависимости относительной погрешности $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$ от числа панелей.

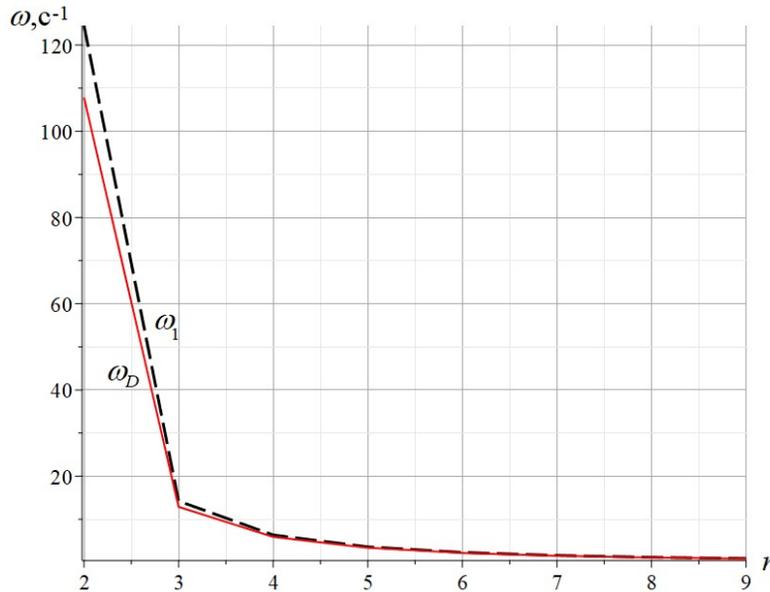


Рис. 5. Зависимость от числа панелей первой собственной частоты ω_D колебания фермы по методу Донкерлея и первой частоты ω_1 спектра, найденной численно при $h=3$ м

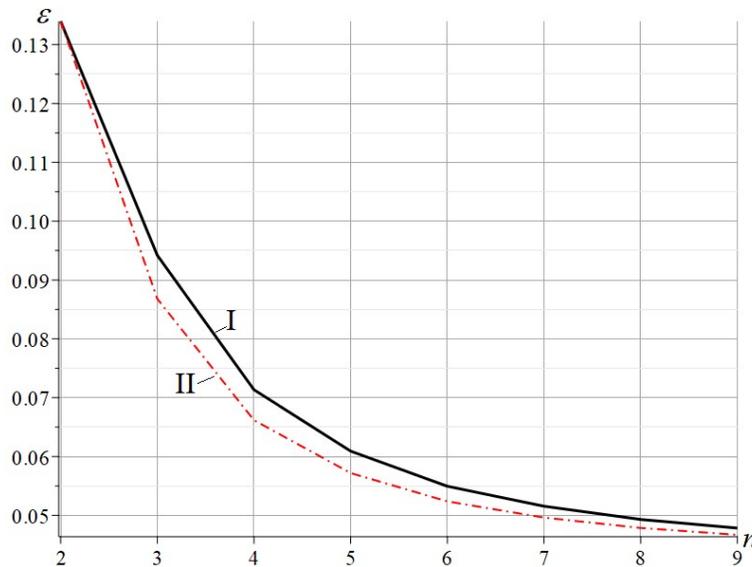


Рис. 6. Зависимость погрешности аналитической оценки нижней границы первой частоты от числа панелей; I — $H = 3$ м; II — $H = 4$ м

Выводы. Рассмотрена схема пространственной статически определимой регулярной конструкции башенного типа. Найдено аналитическое решение задачи о прогибах конструкции под действием различных нагрузок для произвольного числа панелей. Показано, что зависимость горизонтального смещения вершины от радиуса башни имеет минимум. Для соответствующих кривых найдены наклонные асимптоты, угол наклона которых вычислен аналитически. Предложенная конструкция может быть использована в промышленном и гражданском строительстве, а аналитические решения позволяют получить простой предварительный расчет сооружения на этапе проектирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФ 22-21-00473.

Библиографический список

1. **Buka-Vaivade K.** Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels / K. Buka-Vaivade, M. N. Kirsanov, D. O. Serdjuks // Vestnik MGSU. — 2020. — № 4 (4). — P. 510–517.— DOI: 10.22227/1997-0935.2020.4.510-517
2. **Colajanni, P.** FEM analysis of push-out test response of Hybrid Steel Trussed Concrete Beams (HSTCBs) / P. Colajanni, L. La Mendola, M. Latour, A. Monaco, G. Rizzano // Journal of Constructional Steel Research. — 2015. (111). — P. 88–102.
3. **Goloskokov, D. P.** Analyzing simply supported plates using Maple system / D. P. Goloskokov // Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., — 2014. — P. 55–56.
4. **Goloskokov, D. P.** Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack / D. P. Goloskokov, A. V. Matrosov // Materials Physics and Mechanics. — 2018. — № 1 (36). — P. 137–141. — DOI: 10.18720/MPM.3612018_15.
5. **Goloskokov, D. P.** Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates / D. P. Goloskokov, A. V. Matrosov // American Institute of Physics Inc., — 2018.
6. **Han, Q. H.** Failure mechanism of steel arch trusses: Shaking table testing and FEM analysis / Q. H. Han, Y. Xu, Y. Lu, J. Xu, Q.H. Zhao // Engineering Structures. — 2015. (82). — P. 186–198.
7. **Hutchinson, R. G.** Microarchitected cellular solids — The hunt for statically determinate periodic trusses / R. G. Hutchinson, N. A. Fleck // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 2005. — № 9 (85). — P. 607–617. — DOI:10.1002/zamm.200410208.
8. **Hutchinson, R. G.** The structural performance of the periodic truss / R. G. Hutchinson, N. A. Fleck // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2006. — № 4 (54). — P. 756–782.— DOI:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
9. **Ilyushin, A. S.** The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame /

- A. S. Ilyushin // Structural mechanics and structures. —2019. —№ 3 (22). —P. 29–38.
10. **Kazmiruk, I. Y.** On the arch truss deformation under the action of lateral load / I. Y. Kazmiruk // Science Almanac. —2016. —№ 3–3 (17). —P. 75–78.
11. **Kirsanov, M.** Deformation of the transmission towers: analytical solution / M. Kirsanov, V. Khromatov // Construction of Unique Buildings and Structures. —2021.— 96.—Article No 9602.— DOI: 10.4123/CUBS.96.2.
12. **Kirsanov, M. N.** Planar Trusses: Schemes and Formulas. / M. N. Kirsanov — Newcastle upon Tyne, GB: Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, — 2019.— 1–198 p.
13. **Kirsanov, M. N.** Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. / M. N. Kirsanov — Newcastle upon Tyne, GB: Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, —2020. — 1–186 p.
14. **Kirsanov, M.** Model of a spatial dome cover. Deformations and oscillation frequency / M. N. Kirsanov // Construction of Unique Buildings and Structures. —2022.— № 9904 (99).— DOI: 10.4123/CUBS.99.4
15. **Kitaev, S. S.** Derivation of the formula for the deflection of a cantilevered truss with a rectangular diagonal grid in the computer mathematics system Maple / S. S. Kitaev // Postulat. —2018. (5–1). —P. 43.
16. **Petrenko, V. F.** The natural frequency of a two-span truss / V. F. Petrenko // AlfaBuild. —2021.— № 20.— P. 2001. —DOI: 10.57728/ALF.20.1.
17. **Sviridenko, O. V.** The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels / O. V. Sviridenko, E. V. Komerzan // Construction of Unique Buildings and Structures. —2022.— № 3 (102).— P. 10101–10101.
18. **Vatin, N.** Thin-walled cross-sections and their joints: Tests and FEM-modelling / N. Vatin, J. Havula, L. Martikainen, A.S. Sinelnikov, A. V. Orlova, S. V. Salamakhin // Advanced Materials Research. —2014. (945–949). —P. 1211–1215.
19. **Vorobev, O. V.** Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss / O. V. Vorobev // Construction of Unique Buildings and Structures.— 2020.— № 7 (92).— P. 9204–9204.
20. **Voropay, R.A.** The derivation of the general formula for the shift of the movable support of arch type truss using the method of induction on two parameters in the system Maple / R.A. Voropay, E. V. Domanov // Postulat. —2019. —№ 2.
21. **Zhang, D.** Torsional behavior of a hybrid FRP–aluminum space truss bridge: Experimental and numerical study / D. Zhang, Q. Zhao, F. Li, J. Tao, Y. Gao // Engineering Structures. —2018. (157). —P. 132–143.
22. **Zok, F. W.** Periodic truss structures / F. W. Zok, R. M. Latture, M. R. Begley // Journal of the Mechanics and Physics of Solids.— 2016. (96).— P. 184–203. — <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>.
23. **Zotos, K.** Performance comparison of Maple and Mathematica / K. Zotos // Applied Mathematics and Computation. —2007. —№ 2 (188). —P. 1426–1429.
24. Maple software package // Advanced Mathematics for Engineering Students.— 2022. —P. 389–393.

References

1. **Buka-Vaivade K.** Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels / K. Buka-Vaivade, M. N. Kirsanov, D. O. Serdjuk // Vestnik MGSU. — 2020. —№ 4 (4). — P. 510–517.— DOI: 10.22227/1997-0935.2020.4.510-517
2. **Colajanni, P.** FEM analysis of push-out test response of Hybrid Steel Trussed Concrete Beams (HSTCBs) / P. Colajanni, L. La Mendola, M. Latour, A. Monaco, G. Rizzano // Journal of Constructional Steel Research. —2015. (111). —P. 88–102.
3. **Goloskokov, D. P.** Analyzing simply supported plates using Maple system / D. P. Goloskokov // Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., —2014. —P. 55–56.
4. **Goloskokov, D. P.** Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack / D. P. Goloskokov, A. V. Matrosov // Materials Physics and Mechanics. —2018. —№ 1 (36). —P. 137–141. — DOI: 10.18720/MPM.3612018_15.
5. **Goloskokov, D. P.** Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates / D. P. Goloskokov, A. V. Matrosov // American Institute of Physics Inc., —2018.
6. **Han, Q. H.** Failure mechanism of steel arch trusses: Shaking table testing and FEM analysis / Q. H. Han, Y. Xu, Y. Lu, J. Xu, Q.H. Zhao // Engineering Structures. —2015. (82).— P. 186–198.
7. **Hutchinson, R. G.** Microarchitected cellular solids — The hunt for statically determinate periodic trusses / R. G. Hutchinson, N. A. Fleck // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. —2005. —№ 9 (85). —P. 607–617. — DOI:10.1002/zamm.200410208.
8. **Hutchinson, R. G.** The structural performance of the periodic truss / R. G. Hutchinson, N. A. Fleck // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. —2006. —№ 4 (54). —P. 756–782.— DOI:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
9. **Ilyushin, A. S.** The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame / A. S. Ilyushin // Structural mechanics and structures. —2019. —№ 3 (22). —P. 29–38.
10. **Kazmiruk, I. Y.** On the arch truss deformation under the action of lateral load / I. Y. Kazmiruk // Science Almanac.

—2016. —№ 3–3 (17). —P. 75–78.

11. **Kirsanov, M.** Deformation of the transmission towers: analytical solution / M. Kirsanov, V. Khromatov // Construction of Unique Buildings and Structures. —2021.— 96.—Article No 9602.— DOI: 10.4123/CUBS.96.2.
12. **Kirsanov, M. N.** Planar Trusses: Schemes and Formulas. / M. N. Kirsanov — Newcastle upon Tyne, GB: Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, — 2019.— 1–198 p.
13. **Kirsanov, M. N.** Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. / M. N. Kirsanov — Newcastle upon Tyne, GB: Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, —2020. — 1–186 p.
14. **Kirsanov, M.** Model of a spatial dome cover. Deformations and oscillation frequency / M. N. Kirsanov // Construction of Unique Buildings and Structures. —2022.— № 9904 (99).— DOI: 10.4123/CUBS.99.4
15. **Kitaev, S. S.** Derivation of the formula for the deflection of a cantilevered truss with a rectangular diagonal grid in the computer mathematics system Maple / S. S. Kitaev // Postulat. —2018. (5–1). —P. 43.
16. **Petrenko, V. F.** The natural frequency of a two-span truss / V. F. Petrenko // AlfaBuild. —2021.— № 20.— P. 2001.—DOI: 10.57728/ALF.20.1.
17. **Sviridenko, O. V.** The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels / O. V. Sviridenko, E. V. Komerzan // Construction of Unique Buildings and Structures. —2022.— № 3 (102).— P. 10101–10101.
18. **Vatin, N.** Thin-walled cross-sections and their joints: Tests and FEM-modelling / N. Vatin, J. Havula, L. Martikainen, A.S. Sinelnikov, A. V. Orlova, S. V. Salamakhin // Advanced Materials Research. —2014. (945–949). —P. 1211–1215.
19. **Vorobev, O. V.** Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss / O. V. Vorobev // Construction of Unique Buildings and Structures.— 2020.— № 7 (92).— P. 9204–9204.
20. **Voropay, R.A.** The derivation of the general formula for the shift of the movable support of arch type truss using the method of induction on two parameters in the system Maple / R.A. Voropay, E. V. Domanov // Postulat. —2019. —№ 2.
21. **Zhang, D.** Torsional behavior of a hybrid FRP–aluminum space truss bridge: Experimental and numerical study / D. Zhang, Q. Zhao, F. Li, J. Tao, Y. Gao // Engineering Structures. —2018. (157). —P. 132–143.
22. **Zok, F. W.** Periodic truss structures / F. W. Zok, R. M. Latture, M. R. Begley // Journal of the Mechanics and Physics of Solids.— 2016. (96).— P. 184–203. — <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>.
23. **Zotos, K.** Performance comparison of Maple and Mathematica / K. Zotos // Applied Mathematics and Computation. —2007. —№ 2 (188). —P. 1426–1429.
24. Maple software package // Advanced Mathematics for Engineering Students.— 2022. —P. 389–393.

Formulas for calculating deformations and natural frequency of free vibrations

of a hexagonal tower

M.N. Kirsanov

*National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI),
Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines,
14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation*

Statement of the problem. A scheme of a six-sided prismatic statically determinate spatial truss is proposed. The task is set by induction to derive formulas for the dependence of the deflection of the structure and the lower limit of the main frequency of natural vibrations on the number of panels along the height of the prism.

Materials and methods: The forces in the rods along with the reactions of the supports are found in an analytical form by the method of cutting nodes in the Maple symbolic mathematics system. One of the nodes at the base of the truss has a spherical support, one has a cylindrical support, the remaining four supports are racks. The top deflection is determined by the Maxwell-Mohr formula. From the analysis of the sequences of coefficients in the formulas for individual structures with a different number of panels, their common members are determined, which are included in the desired calculation formula. The Dunkerley method is used to estimate the first frequency of free oscillations.

Results: For various types of loads, formulas for the dependence of truss deflections on the number of panels are obtained. The coefficients in the solution are polynomial in the number of panels. The derived analytical dependence of the first frequency on the number of panels in comparison with the numerical solution has a small error, which decreases with increasing number of panels.

Conclusions. A design of an axisymmetric statically determinate tower-type truss has been developed, which allows analytical solutions to the problem of deflection and the problem of the first natural fre-

quency for an arbitrary number of panels. The resulting formulas can be used to assess the accuracy of numerical solutions and for preliminary calculations of models of structures of this type.

Keywords: hexagonal prism, spatial truss, deflection, induction, Maple, natural frequency, Dunkerley method, analytical solution