

**ДЕФОРМАЦИИ И ДВУХСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ
СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДЕЛИ ТРЕХГРАННОЙ
БАШЕННОЙ ФЕРМЫ**

М. Н. Кирсанов

Национальный исследовательский университет «МЭИ»
Россия, г. Москва

Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин,
тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

Предложены схема и аналитический расчет статически определимой пространственной башенной фермы с полураскосной решеткой. Дается вывод формул для прогиба конструкции от действия боковой равномерно распределенной по узлам нагрузки и двухсторонних оценок первой частоты собственных колебаний фермы. Предполагается, что масса фермы сосредоточена в ее узлах. Зависимость решений от числа панелей фермы разыскивается методом индукции с применением операторов символической математики Maple. Расчет жесткости конструкции выполняется по формуле Максвелла-Мора. Аналитические оценки частоты по методам Донкерлея и Рэлея сравниваются с первой частотой спектра частот, найденной численно. Показана высокая точность верхней оценки частоты, растущая с увеличением числа панелей.

Ключевые слова: число панелей, ферма, прогиб, индукция, Maple, собственная частота, метод Донкерлея, метод Рэлея.

Введение. Легкие стержневые конструкции широко применяются в строительных конструкциях. Самая распространенная модель таких конструкций – ферма с узловой нагрузкой и массой, сосредоточенной в узлах. Расчет ферм на жесткость и собственные частоты колебаний, как правило, производится численно методом конечных элементов [1-3]. Простые статически определимые конструкции в некоторых случаях допускают и аналитические решения. В справочнике [4] собраны различные схемы плоских регулярных ферм с формулами для расчета их прогибов при действии распределенной узловой или сосредоточенной нагрузки. Более сложными объектами для аналитических решений являются пространственные фермы. В [5] получено решение для прогиба шестигранного купола и дана формула для нижней оценки первой частоты собственных колебаний при произвольном числе панелей. В [6] решена задача о нижней границе основной частоты собственных колебаний пространственной трехгранной консольной фермы. Формулы для статической деформации составной пространственной рамы получены методом индукции с применением системы компьютерной математики Maple в [7]. Отдельные формулы для расчета прогибов плоских ферм регулярного типа выведены в [8-10]. Двухсторонняя аналитическая оценка первой частоты собственных колебаний плоской фермы получена для произвольного числа панелей в [11]. В [12] найдена аналитическая оценка первой частоты

плоской регулярной фермы, допускающей при определенном числе панелей кинематическую изменяемость.

Конструкция фермы. Башня представляет собой трехгранную призму с пирамидальным куполом в верхней части конструкции (рис. 1, 2). Грани призмы — полураскосные фермы. Отличительная особенность конструкции — треугольные стержневые элементы в средней части призмы, соединяющие узлы на боковых гранях. В основании конструкции находятся шесть опорных стоек и три дополнительные горизонтальные связи в двух угловых узлах фермы. Таким образом, две горизонтальные связи в узле A вместе с вертикальной стойкой моделируют сферический шарнир.

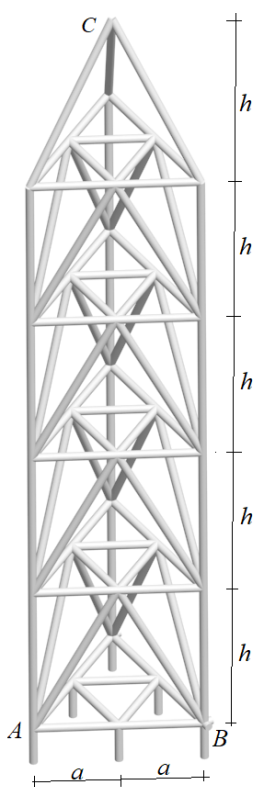


Рис. 1. Схема фермы, $n=4$

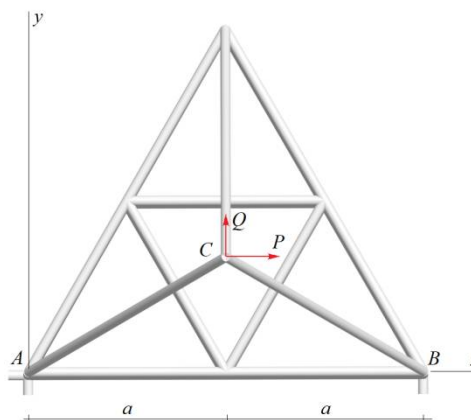


Рис. 2. Нагрузки на вершину

В узле B опорные стержни моделируют шарнир цилиндрический. Общее число внутренних узлов фермы с n панелями высотой h равно $6n+7$. Ферма состоит из $v=18n+21$ стержней, включая девять опорных, шесть из которых — вертикальные стойки.

Прогиб от действия горизонтальной узловой нагрузки. Ветровая нагрузка на конструкцию моделируется сосредоточенными горизонтальными силами, равномерно распределенными по узлам боковой грани конструкции (рис. 3). Узлы фермы нумеруются (рис. 4). Расчет усилий в статически определимой ферме выполняется методом вырезания узлов. Матрица системы уравнений равновесия узлов в проекциях на три оси координат при выводе аналитических соотношений формируется в системе компьютерной математики Maple из направляющих косинусов усилий и реакций опор. Система уравнений решается в символьной форме. В программу на языке Maple [13] вводятся координаты узлов. При $i = 1, \dots, n + 1$ координаты имеют вид:

$$\begin{aligned}
x_i &= 0, y_i = 0, z_i = (i-1)h, \\
x_{i+n+1} &= 2a, y_{i+n+1} = 0, z_{i+n+1} = (i-1)h, \\
x_{i+2n+2} &= a, y_{i+2n+2} = a\sqrt{3}, z_{i+2n+2} = (i-1)h, \\
x_{i+3n+3} &= a, y_{i+3n+3} = 0, z_{i+3n+3} = (i-1)h, \\
x_{i+4n+4} &= 3a/2, y_{i+4n+4} = a\sqrt{3}/2, z_{i+4n+4} = (i-1)h, \\
x_{i+5n+5} &= a/2, y_{i+5n+5} = a\sqrt{3}/2, z_{i+5n+5} = (i-1)h.
\end{aligned}$$

Порядок соединения стержней решетки в узлах формируется специальными векторами с номерами концов стержней. Составляется система уравнений равновесия узлов $\mathbf{GS} = \mathbf{R}$, где \mathbf{G} — матрица системы, \mathbf{S} — вектор неизвестных усилий и реакций опор. При расчете деформаций от ветровой нагрузки вектор правой части \mathbf{R} состоит из усилий, приложенных к ферме. Ненулевые элементы этого вектора имеет вид:

$$\begin{aligned}
R_{3i-1} &= T, \\
R_{3j-1} &= T, j = i + n + 1, \\
R_{3k-1} &= T, k = i + 3n + 3, i = 1, \dots, n + 1.
\end{aligned}$$

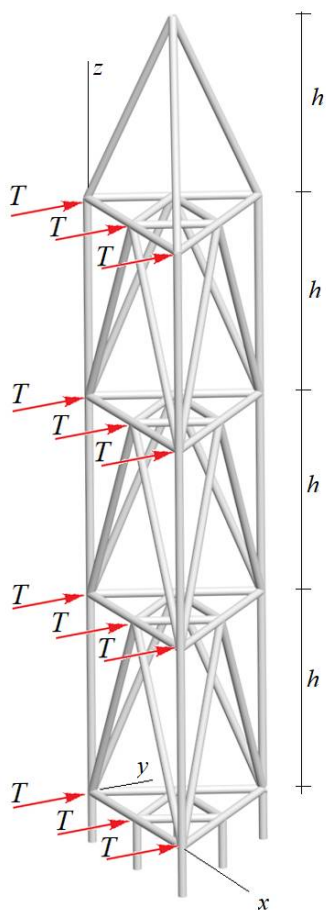


Рис. 3. Схема фермы, $n=3$

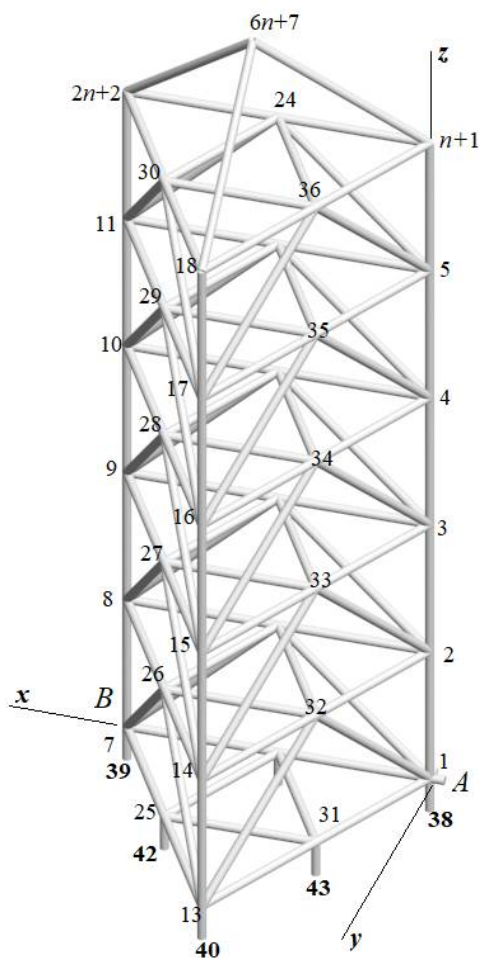


Рис. 4. Номера узлов, $n = 5$

Для расчета прогиба (смещения верхнего шарнира C по оси y) используется интеграл Максвелла – Мора в следующей форме:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n-9} S_i^{(T)} S_i^{(1)} l_i / (EF), \quad (1)$$

где $S_i^{(T)}$ – усилие в стержне i от действия горизонтальной нагрузки интенсивностью T , $S_i^{(1)}$ — усилие от единичной силы, приложенной к узлу C по направлению оси y , E — модуль упругости материала стержней, F — площадь сечения стержней, l_i – длина стержня i . Значения усилий в девяти опорных недеформируемых стержнях не входят в сумму Максвелла – Мора (1). Расчет прогиба фермы при $n = 1, 2, 3, \dots$ дает следующую последовательность аналитических зависимостей:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= T \frac{20a^3 + 9c^3}{9EFa^2}, \\ \Delta_2 &= T \frac{97a^3 + 54c^3 + 54h^3}{18EFa^2}, \\ \Delta_3 &= T \frac{172a^3 + 108c^3 + 297h^3}{18EFa^2}, \\ \Delta_4 &= T \frac{5(53a^3 + 36c^3 + 189h^3)}{18EFa^2}, \dots \end{aligned}$$

Общие члены последовательностей коэффициентов при степенях размеров фермы: a^3 , c^3 , h^3 , где $c = \sqrt{h^2 + a^2}$, находятся методами компьютерной математики Maple [4-8]. Общий вид зависимости прогиба вершины C по направлению оси y от размеров конструкции и числа панелей получается следующий:

$$\Delta = T \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3}{EFa^2}, \quad (2)$$

где

$$C_1 = (9n^2 + 30n + 1) / 18, \quad C_2 = n(n + 1) / 2, \quad C_3 = n(n^2 - 1)(3n + 2) / 16.$$

Аналогично, при нагружении верхнего узла C горизонтальной сосредоточенной силой P по направлению оси x (рис. 2) методом индукции имеем решение:

$$\Delta = P \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3}{EFa^2}, \quad (3)$$

где $C_1 = (6n + 13) / 18$, $C_2 = n / 3$, $C_3 = 1 / 54$, $C_4 = n(n + 1)(2n + 1) / 12$.

Если горизонтальная сосредоточенная нагрузка Q приложена к узлу C по направлению оси y , то результат будет отличаться от (3) только одним коэффициентом C_1 :

$$\Delta = Q \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3}{EFa^2}, \quad (4)$$

где $C_1 = (6n + 11) / 18$, $C_2 = n / 3$, $C_3 = 1 / 54$, $C_4 = n(n + 1)(2n + 1) / 12$.

Линейность задачи по нагрузкам комбинацией решений (2–4) позволяет получать формулы для широкого класса внешних сил. На рис. 5 выведенная зависимость (2)

безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (T_{sum} H)$, от числа панелей представлена для трех размеров $a = 1м, a = 2м, a = 3м$ и высоты $H = (n + 1)h = 50м$. Суммарная нагрузка на ферму фиксирована: $T_{sum} = 3(n + 1)T$. Заметна нелинейная зависимость прогиба от размера a . С увеличением этого размера прогиб резко падает.

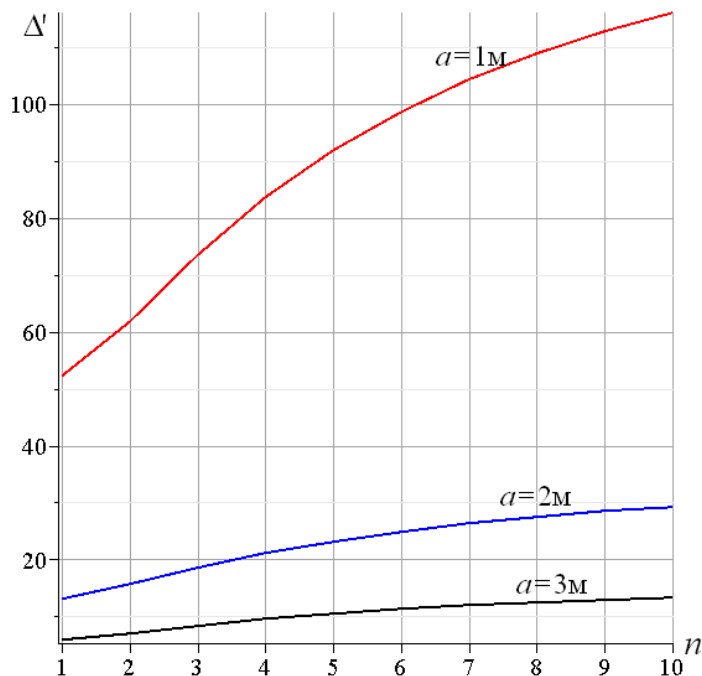


Рис. 5. Зависимость относительного прогиба фермы от числа панелей

Найденные аналитические решения имеют линейную асимптоту по числу панелей, угол наклона которой можно получить средствами Maple: $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = a / (3H)$.

Нижняя оценка первой частоты собственных колебаний по методу Донкерлея. Принимается, что масса фермы распределена по узлам. Рассматриваются горизонтальные колебания масс. В такой постановке задача имеет $K = 6n + 7$ степеней свободы по числу внутренних узлов конструкции. Система уравнений движения масс записывается в матричной форме:

$$mI_k \ddot{Y} + D_k Y = 0, \quad (5)$$

Здесь Y — вектор смещений масс в узлах фермы по оси y , \ddot{Y} — вектор ускорений масс, I_k — единичная матрица, D_k — матрица жесткости. Если выполнить замену $\ddot{Y} = -\omega^2 Y$, справедливую для гармонических колебаний с частотой ω , и умножить уравнение (5) слева на матрицу податливости B_k , то задача сведется к проблеме поиска собственных значений матрицы B_k : $B_k Y = \lambda Y$, где $\lambda = 1 / (\omega^2 m)$ — собственные числа матрицы B_k . Здесь использовано то, что матрица податливости — это матрица, обратная жесткости: $B_k = 1 / D_k$. Элементы матрицы B_k вычисляются по формуле Максвелла – Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF), \quad (6)$$

в которой использованы те же обозначения, что и в формуле (1) и учтены жесткости девяти опор. Как и в задаче о прогибе жесткость всех стержней в ферме одинаковая.

Нижняя граница ω_D основной частоты ω_1 разыскивается по формуле Донкерлея:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}, \quad (7)$$

где ω_p — парциальные частоты массы в узле p , расчет которой основан на уравнении движения отдельной массы:

$$m\ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (8)$$

При вычислении коэффициента жесткости D_p учитывается, что податливость есть величина обратная жесткости и используется формула Максвелла – Мора:

$$\delta_p = 1 / D_p = \sum_{\alpha=1}^{\nu} (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF). \quad (9)$$

Из (8) при $y_p = A_p \sin(\omega t + \varphi)$, где A_p — амплитуда колебаний массы, следует выражение $\omega_p = \sqrt{D_p / m}$. Отсюда и из (7) получается формула для нижней границы первой собственной частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_n. \quad (9)$$

Расчет сумм из формулы (9) для ферм с разным числом панелей дает:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (2721a^3 + 387c^3 + 2d^3 + 594h^3) / (108a^2 EF), \\ \Delta_2 &= (4575a^3 + 1125c^3 + 2d^3 + 2700h^3) / (108a^2 EF), \\ \Delta_3 &= (3390a^3 + 1107c^3 + d^3 + 4050h^3) / (54a^2 EF), \\ \Delta_4 &= (4668a^3 + 1827c^3 + d^3 + 9585h^3) / (54a^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Решение имеет общий вид:

$$\Delta = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3) / (a^2 EF),$$

где с помощью операторов системы Maple вычисляются общие члены последовательностей коэффициентов:

$$\begin{aligned} C_1 &= (117n^2 + 885n + 812) / 240, \\ C_2 &= n(47 + 39n) / 24, \\ C_3 &= 1 / 54, \\ C_4 &= (n + 2)(n + 1)(3n^2 + 5n + 3) / 12. \end{aligned}$$

Таким образом, аналитическое выражение для нижней оценки первой частоты по методу Донкерлея получается в виде:

$$\omega_D^{-2} = m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3) / (a^2 EF). \quad (10)$$

Верхняя оценка первой частоты собственных колебаний по методу Рэля. Формула Рэля для верхней оценки первой частоты следует из равенства максимальных значений кинетической и потенциальной энергий:

$$T_{\max} = \Pi_{\max}. \quad (11)$$

Кинетическая энергия системы K одинаковых масс m , расположенных в узлах конструкции имеет вид:

$$T = \sum_{i=1}^K m v_i^2 / 2.$$

Согласно $y_i = u_i \sin(\omega t + \varphi)$ вертикальная скорость массы i имеет вид:

$$v_i = \dot{y}_i = \omega u_i \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Отсюда, полагая $\max(\cos(\omega t + \varphi_0)) = 1$, что соответствует максимальной кинетической энергии, получаем:

$$T_{\max} = \omega^2 m \sum_{i=1}^K u_i^2 / 2, \quad (12)$$

где амплитуда вертикального смещения u_i вычисляется по формуле Максвелла – Мора:

$$u_i = \sum_{\alpha=1}^{n_s} S_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (EF) = P \sum_{\alpha=1}^{n_s} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (EF) = P \tilde{u}_i.$$

Введены обозначения: $S_{\alpha}^{(P)}$ — усилие в стержне $\alpha = 1, \dots, n_s$ от действия нагрузки P , распределенной по узлам, $\tilde{S}_{\alpha}^{(i)}$ — усилие в этом же стержне от единичной (безразмерной) нагрузки, приложенной к массе в узле с номером i , $\tilde{S}_{\alpha}^{(P)} = S_{\alpha}^{(P)} / P$. Выбор такой нагрузки интуитивный и определяется возможной близостью формы прогиба конструкции форме колебаний системы грузов по первой частоте. Кинетическая энергия (12) приобретает вид:

$$T_{\max} = P^2 \omega^2 \sum_{i=1}^K m \tilde{u}_i^2 / 2, \quad (13)$$

где $\tilde{u}_i = u_i / P = \sum_{\alpha=1}^v \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (EF)$ — относительная амплитуда смещений массы в узле i при действии распределенной нагрузки.

Соответствующая потенциальная энергия деформации стержней фермы имеет вид:

$\Pi_{\max} = \sum_{\alpha=1}^v S_{\alpha}^{(P)} \Delta l_{\alpha} / 2 = \sum_{\alpha=1}^v (S_{\alpha}^{(P)})^2 l_{\alpha} / (2EF)$. С учетом линейности задачи по нагрузкам:

$S_{\alpha}^{(P)} = P \sum_{i=1}^N \tilde{S}_{\alpha}^{(i)}$. Следовательно,

$$\Pi_{\max} = P^2 \sum_{\alpha=1}^{n_s} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \sum_{i=1}^K \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (2EF) = P^2 \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha}^{n_s} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (2EF) = P^2 \sum_{i=1}^N \tilde{u}_i / 2. \quad (14)$$

Из (11), (12) и (14) следует формула для верхней оценки первой частоты колебаний фермы по Релею:

$$\omega_R^2 = \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i / \sum_{i=1}^K m \tilde{u}_i^2. \quad (15)$$

При выводе зависимости частоты от числа панелей перемещения \tilde{u}_i должны быть получены как функции n . Для этого надо сначала рассчитать перемещения какой-то одной массы, например с номером 1, при различных значениях n и найти аналитическое выражение для общего члена полученной последовательностей $\tilde{u}_1(n)$. Затем следует повторить эти действия для других масс и получить зависимости $\tilde{u}_1(n), \tilde{u}_2(n), \tilde{u}_3(n), \dots$, входящие в суммы $\sum_{i=1}^K \tilde{u}_i$ и $\sum_{i=1}^K \tilde{u}_i^2$. Для регулярных систем вид решения для $\sum_{i=1}^K \tilde{u}_i$ не зависит от n . Отдельно вычислив числитель в (15), получим:

$$\sum_{i=1}^K \tilde{u}_i = (g_a a^3 + g_c c^3 + g_d d^3 + g_h h^3) / (a^2 E F) = \sum_{\alpha=[a,c,d,h]} m g_\alpha \alpha^3 / (a^2 E F),$$

где

$$\begin{aligned} g_a &= (36n^3 + 342n^2 + 705n + 406) / 9, \\ g_c &= n(12n^2 + 24n + 13) / 3, \quad g_d = 1 / 54, \\ g_h &= (n + 2)(n + 1)(54n^3 + 153n^2 + 103n + 15) / 60. \end{aligned} \quad (16)$$

Знаменатель (15) имеет более сложный вид

$$\sum_{k=1}^N m \tilde{u}_k^2 = \sum_{\alpha,\beta=[a,c,d,h]} m f_{\alpha\beta} \alpha^3 \beta^3 / (a^4 E^2 F^2). \quad (17)$$

Для получения общих членов последовательностей коэффициентов приходится составлять и решать сравнительно сложные рекуррентные уравнения, привлекая оператор *rsolve* системы Maple. Например, для коэффициента f_{hh} при h^6 получается следующее однородное уравнение десятого порядка:

$$\begin{aligned} f_{hh,n} &= 10f_{hh,n-1} - 45f_{hh,n-2} + 120f_{hh,n-3} - 210f_{hh,n-4} + 252f_{hh,n-5} - \\ &- 210f_{hh,n-6} + 120f_{hh,n-7} - 45f_{hh,n-8} + 10f_{hh,n-9} - f_{hh,n-10}. \end{aligned}$$

Решения рекуррентных уравнений дают следующие выражения:

$$\begin{aligned} f_{aa} &= (3468n^3 - 2033n^2 + 1782n - 81) / 96, \quad f_{cc} = (7n^2 + 203n - 14) / 54, \\ f_{dd} &= (n - 1)^2 / 2592, \quad f_{hh} = 3(90n^3 + 297n^2 + 507n + 560), \\ f_{ac} &= (180 - 241n + 845n^2) / 36, \quad f_{ad} = (25n + 3)(n - 1) / 144, \\ f_{ah} &= 3(153n^3 + 177n^2 + 122n + 108) / 2, \quad f_{dh} = 5(n - 1) / 2, \\ f_{cd} &= (n + 6)(n - 1) / 108, \quad f_{hc} = 63n^2 + 134n + 83. \end{aligned} \quad (18)$$

В результате верхняя оценка первой частоты фермы в зависимости от числа панелей имеет вид:

$$\omega_R = a \sqrt{\frac{EF \sum_{\alpha=[a,c,d,h]} g_\alpha \alpha^3}{m \sum_{\alpha,\beta=[a,c,d,h]} f_{\alpha\beta} \alpha^3 \beta^3}} \quad (19)$$

с коэффициентами (16) и (18), зависящими только от порядка регулярности фермы n .

Численное решение. Найденные оценки зависимости первой частоты собственных колебаний от числа панелей можно сравнить с численным решением, вычисляя первую частоту всего спектра частот собственных колебаний конструкции с помощью специального оператора *Eigenvalues* из пакета *LinearAlgebra* системы Maple. Оператор *Eigenvalues* предназначен для нахождения собственных чисел и векторов матриц в численной и символьной форме. Примем размеры башни $a = 2\text{м}$, $h = 3\text{м}$. Модуль упругости стали $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, массы в узлах $m = 500\text{кг}$. Площадь поперечного сечения стержней одинаковая $F = 9\text{см}^2$. На рис. 6 даны кривые зависимости нижней (ω_D) и верхней (ω_R) оценки первой частоты колебаний башни по формулам (10) и (19) и первой частоты спектра ω_1 , полученной численно.

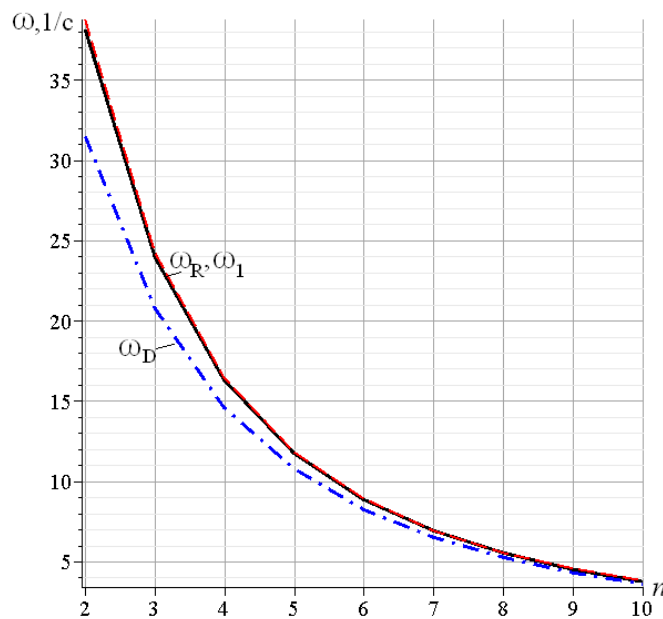


Рис. 6. Сравнение аналитических решений с численным. Первая частота колебаний фермы ω_1 и её нижняя оценка ω_D по Донкерлею (10), ω_R — верхняя оценка по Рэлею (19) при $a = 2\text{м}$, $h = 3\text{м}$

Численное решение занимает среднее значение между аналитическими оценками сверху и снизу, причем верхняя оценка почти совпадает с численным решением. С увеличением числа панелей высота фермы увеличивается и одновременно уменьшается первая собственная частота. Для того, чтобы оценить погрешность предложенных оценок введем относительные погрешности $\varepsilon_D = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$ и $\varepsilon_R = (\omega_R - \omega_1) / \omega_1$. Зависимость погрешности от количества панелей показано на рис. 7. Аналитическая оценка по методу Донкерлея существенно зависит от числа панелей и в выбранном диапазоне имеет погрешность от 3% до 17%. По методу Рэлея погрешность оценки значительно меньше,

почти не меняется при изменении числа панелей и не превышает 2% . Для больших значений высоты h погрешность по обоим методам меньше.

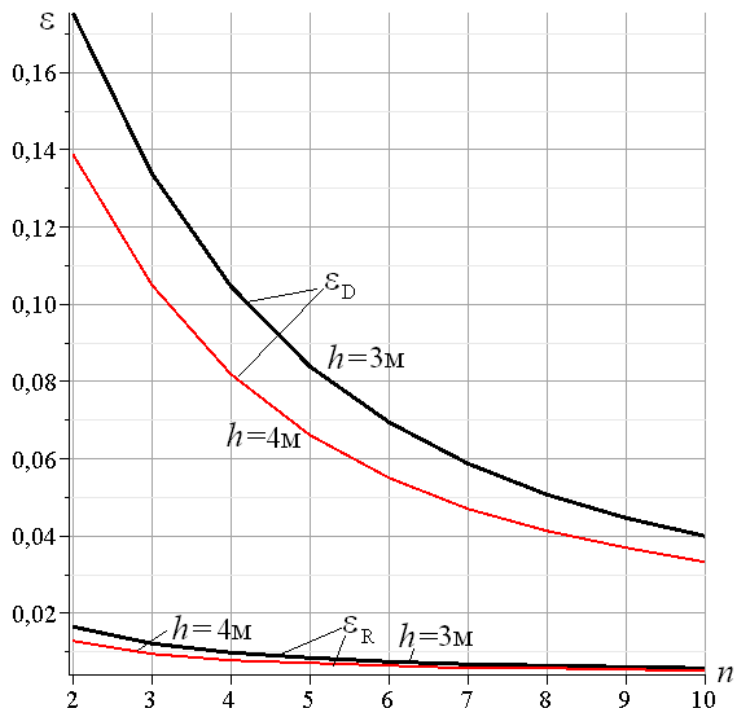


Рис. 7. Погрешность оценки по Донкерлею и Рэлею

Заключение. Предложена схема статически определимой пространственной фермы башенного типа и приведен алгоритм вывода аналитической зависимости прогиба и оценки наименьшей собственной частоты колебаний от числа панелей. Можно сделать следующие выводы:

1. Формула для вычисления частоты по энергетическому методу Рэлея более громоздкая, чем формула Донкерлея, но имеет значительно большую точность.
2. С увеличением числа панелей точность по обоим методам быстро растет.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

Библиографический список

1. Игнатъев В.А., Игнатъев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. 306 с.
2. Коваленко Г. В., Макеев В. Б., Деметьева В. В. Исследование частот собственных колебаний ферм на основе метода конечных элементов (МКЭ) // Молодая мысль: Наука, технологии, инновации. 2015. С. 44-48.
3. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section // Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). Pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 17.04.2021)
4. Kirsanov M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020. 178 с.
5. Кирсанов М.Н. Модель и аналитический расчет фермы пространственного шестигранного купола // Строительная механика и конструкции. 2022. №1(32). С.39-47. doi 10.36622/VSTU.2022.32.1.003
6. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the

- console truss on the number of panels; 2022; Construction of Unique Buildings and Structures; 101Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
7. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Статические деформации фермы составной пространственной рамы. Аналитические решения // Строительная механика и конструкции. 2022. №4(35). С. 40-48. doi 10.36622/VSTU.2022.35.4.005.
 8. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2021. №2 (29). С. 29-37.
 9. Овсянникова В.М. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2020. №4 (27). С. 16-25.
 10. Иваницкий А.Д. Формулы для расчета деформаций плоской рамы // Строительная механика и конструкции. 2022. №3(34). С.90-98.
 11. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
 12. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // Magazine of Civil Engineering. 2022. 111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
 13. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuks D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2020. 4. С. 510–517. doi:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517

References

1. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
2. Kovalenko G. V., Makeev V. B., Dementieva V. V. Investigation of natural frequencies of trusses based on the finite element method (FEM). Young thought: Science, technology, innovation. 2015. pp. 44-48.
3. Vatin, N.I., Sinelnikov, A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section. Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL:<https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 04/17/2021)
4. Kirsanov M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020. 178 p.
5. Kirsanov M. N. Model and analytical calculation of a spatial hexagonal dome truss. Structural mechanics and structures. 2022. No. 1 (32). pp. 39-47. doi 10.36622/VSTU.2022.32.1.003
6. Sviridenko, O.; Komerzan, E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels; 2022; Construction of Unique Buildings and Structures; 101Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
7. Komerzan E. V., Sviridenko O. V. Static deformations of the truss of a composite spatial frame. Analytical solutions. Structural mechanics and structures. 2022. №4(35). pp. 40-48. doi 10.36622/VSTU.2022.35.4.005.
8. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. Structural mechanics and structures. 2021. No. 2 (29). pp. 29-37.
9. Ovsyannikova V.M. Dependence of the deflection of a flat outwardly statically indeterminate truss on the number of panels. Structural mechanics and structures. 2020. No.

- 4 (27). pp. 16-25.
10. Ivanitsky A.D. Formulas for calculating the deformations of a flat frame. Structural mechanics and structures. 2022. No. 3 (34). pp. 90-98.
 11. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2020 Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
 12. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. Magazine of Civil Engineering. 2022.111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
 13. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuk D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. Vestnik MGSU. 2020. 4. pp. 510–517. doi:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517

DEFORMATIONS AND A TWO-SIDED EVALUATION OF THE NATURAL VIBRATIONS FUNDAMENTAL FREQUENCY OF A TRIHEDRAL TRUSS SPATIAL MODEL

M. N. Kirsanov

National Research University «MPEI»

Moscow, Russia

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

A scheme and analytical calculation of a statically determined spatial tower truss with a semi-diagonal lattice is proposed. The derivation of formulas for the deflection of the structure from the action of a lateral load uniformly distributed over the nodes and two-sided estimates of the first frequency of natural oscillations of the truss is given. It is assumed that the mass of the truss is concentrated in its nodes. The dependence of solutions on the number of truss panels in height is found by induction using Maple symbolic mathematics operators. Calculation of structural rigidity is carried out according to the Maxwell-Mohr formula. Analytical frequency estimates by the Dunkerley and Rayleigh method are compared with the first frequency of the frequency spectrum found numerically. A high accuracy of the upper frequency estimate is shown, which increases with the number of panels.

Key words: number of panels, truss, deflection, induction, Maple, natural frequency, Dunkerley method, Rayleigh method.