

DOI 10.36622/2219-1038.2024.42.3.001

УДК 624.04:531.391.3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕШЕТЧАТОЙ ФЕРМЫ ПОЛУРАСКОСНОГО ТИПА

М. Н. Кирсанов

Национальный исследовательский университет «МЭИ»
Россия, г. Москва

Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин,
тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

Балочная регулярная ферма с параллельными поясами имеет сложную раскосную решетку. Методом, основанным на упрощенной формуле Донкерлея, получена аналитическая зависимость первой (низшей) частоты свободных колебаний конструкции от количества панелей. Предполагается, что стержни фермы массы не имеют, а вся масса равномерно распределена по узлам. Рассмотрены только вертикальные колебания узлов. Жесткость конструкции рассчитывается по интегральной формуле Мора. Сравнение аналитического решения с численным показывает высокую точность полученной зависимости. Все преобразования выполнены в системе компьютерной математики. Обобщение серии частных решений на произвольное число панелей выполняется методом индукции. Численно анализируется спектр собственных частот, выявляются спектральные константы и зоны резонансной безопасности.

Ключевые слова: статически определимая ферма, основная собственная частота, аналитический метод, формула Мора, индукция, спектр частот, спектральные константы, зона резонансной безопасности.

Введение. Для расчета частот собственных колебаний конструкции на практике применяют численные методы с использованием стандартных программ с применением метода конечных элементов [1-3]. Наиболее востребована в динамических инженерных расчетах первая собственная частота. Для ее приближенного вычисления известны различные методы, среди которых наиболее распространен метод Донкерлея для оценки первой частоты снизу, и метод Рэлея, дающий верхнюю оценку [4-6]. Этими методами возможен поиск аналитических решений, так как они не требуют составления и решения характеристического уравнения частот, порядок которого определяется числом степеней свободы системы конструкции. В [7] предложен метод, основанный на методе Донкерлея, дающий более точное и сравнительно компактное аналитическое решение. Аналитическое решение методом Донкерлея получено в [8] для основной частоты собственных колебаний плоской модели составной конструкции фермы. Формула зависимости частоты колебаний консольной фермы регулярного типа от числа панелей выведена в [9] методом индукции. Первая частота колебаний плоской решетчатой фермы балочного типа и весь спектр собственных частот проанализированы в [10]. Низшая частота собственных колебаний плоской шпренгельной фермы и прогиб в аналитическом виде найдены в [11]. В [12] выполнен численный расчет частот большепролетной стальной фермы покрытия здания велодрома. Аналитическая оценка частоты собственных колебаний фермы Финка в системе Maple получена в [13]. В этой же системе выполнен расчет частоты колебаний простой

плоской модели фермы двухпролетного моста [14]. Нижняя оценка частоты собственных колебаний фермы типа Больмана найдена в [15]. Аналитические возможности системы Maple и метод индукции использованы в [16] для определения прогиба плоской фермы с произвольным числом панелей. Сравнение трех приближенных аналитических метода (по Рэлею, Донкерлею и упрощенному методу Донкерлея) для расчета простой плоской балочной фермы с треугольной решеткой выполнено в [17]. В [18] для аналогичной фермы показана эффективность упрощенного метода Донкерлея. Этот же метод используется и в настоящей работе применительно к ферме полураскосного типа.

Конструкция фермы. Плоская ферма с двумя опорами имеет полураскосную решетку. Ферма состоит из $2n+2$ панелей длиной a . Высота фермы равна $3h$. Инерционные свойства конструкции моделируются равными массами m , распределенными по ее узлам. Предполагается, что массивные узлы совершают колебательные движения только по вертикали (рис. 1).

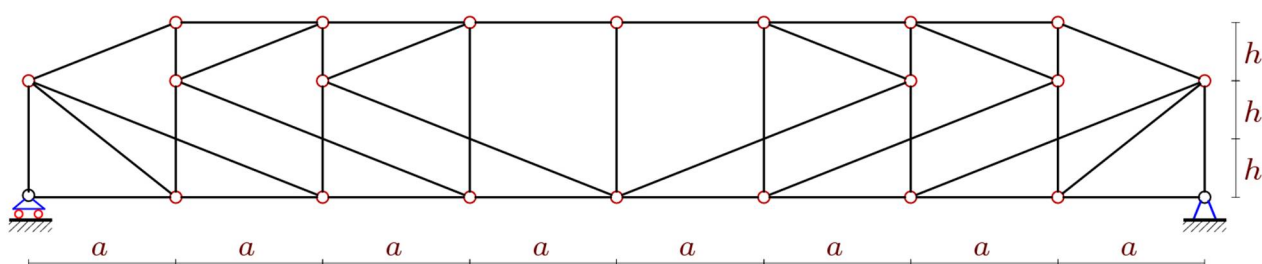


Рис. 1. Модель фермы, $n=3$

Таким образом, число степеней свободы рассматриваемой системы масс равно числу узлов конструкции: $K = 6n + 4$. С учетом трех опорных стержней ферма содержит $\nu = 12n + 8$ стержней.

Расчет усилий в стержнях. Из условия равновесия узлов в системе Maple рассчитываются усилия, необходимые для нахождения жесткости фермы. Для составления уравнений равновесия узлов в аналитическом виде $\mathbf{GS} = \mathbf{R}$ при произвольном числе панелей вычисляются направляющие косинусы усилий. Обозначено: \mathbf{R} — вектор узловых нагрузок, \mathbf{G} — матрица направляющих косинусов размером $\nu \times \nu$, \mathbf{S} — вектор неизвестных усилий в стержнях. В число неизвестных включаются и три опорные реакции. Элементы матрицы \mathbf{G} рассчитываются по координатам концов стержней, соединенных в соответствующих узлах. Для этого в программу вводятся координаты узлов. Стержни и узлы фермы нумеруются (рис. 2). Фрагмент программы ввода координат в системе Maple имеет вид:

```
> for j to 2*n+3 do x[j]:=j*a-a; y[j]:=0; end;
> for j to 2*n+1 do x[j+2*n+3]:=j*a; y[j+2*n+3]:=3*h; end;
> for j to n do x[j+4*n+4]:=a*j-a; y[j+4*n+4]:=2*h;
> x[j+5*n+4]:=a*j+n*a+2*a; y[j+5*n+4]:=2*h; end;
```

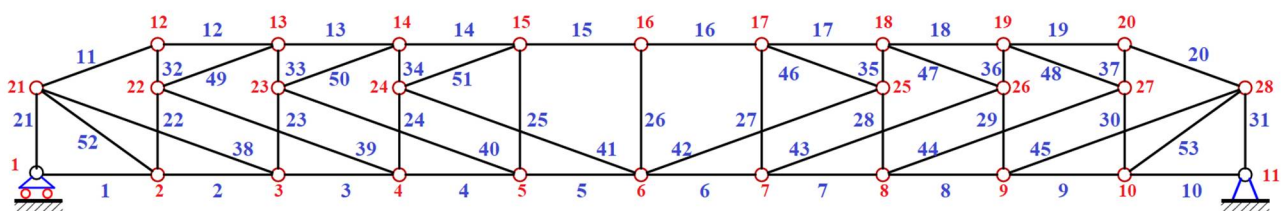


Рис. 2. Номера узлов и стержней, $n = 4$

Решение системы ищется в системе Maple. Рассмотрена для примера равномерно распределенная по узлам вертикальная нагрузка. Решение системы линейных уравнений дает распределение усилий по стержням. На рисунке 3 изображена схема распределения усилий в стержнях фермы с тремя панелями ($n = 3$), $a = 3\text{ м}$, $h = 2\text{ м}$. Синим цветом выделены стержни с отрицательными усилиями (сжатые), растянутые — красным. Тонкие черные линии — это ненапряженные стержни. Толщина отрезков условно пропорциональна модулям усилий в соответствующих стержнях. Значения усилий (кН) от действия узловых сил $P=1\text{ кН}$ округлены до двух значащих цифр.

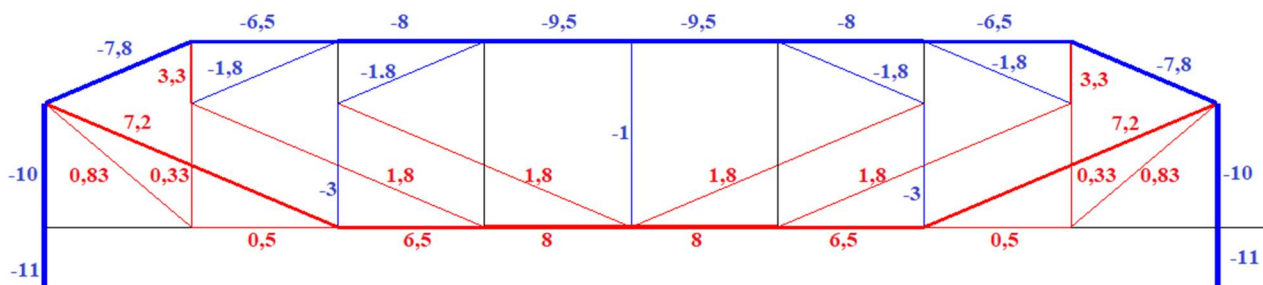


Рис. 3. Распределение усилий в стержнях от действия равномерно распределенной по узлам вертикальной нагрузки, $n = 3$

При такой нагрузке стержни верхнего пояса фермы сжаты, нижнего — растянуты. Основная часть стержней решетки растянута, несколько стержней сжаты небольшими усилиями, их расчет не требует проверки на устойчивость. Положительным качеством предлагаемой схемы решетки является то, что длинные раскосы растянуты, а короткие сжаты. Это повышает устойчивость фермы.

Оценка первой частоты собственных колебаний по упрощенному методу Донкерлея. Расчет первой собственной частоты ω_D выполняется по следующей формуле:

$$\omega_*^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \delta^{\max} K / 2 = m \Delta_n,$$

где δ^{\max} — наибольшее по всем узлам значение прогиба δ_p , $p = 1, \dots, K$ от действия вертикальной единичной силы на узел p . Применительно к рассматриваемой ферме это узел в середине пролета: $p=n+2$. Значение Δ_n рассчитывается по формуле Максвелла — Мора в аналитической форме суммированием по всем стержням конструкции, включая и три опорные:

$$\delta^{\max} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(S_{\alpha}^{(p)} \right)^2 l_{\alpha} / (EF), \quad (1)$$

где $S_{\alpha}^{(p)}$ — усилие в стержне с номером α при действии на узел p единичной вертикальной силы, l_{α} — длина соответствующего стержня. Жесткость EF всех стержней принимается одинаковой. Вертикальные и горизонтальный стержни, моделирующие левую подвижную и правую неподвижную опоры, принимаются длиной h и a .

Вычисление сумм в (1) для ряда ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей в системе Maple [6-10] дает следующие формулы:

$$\begin{aligned}\delta_1^{\max} &= (5a^3 + 22c^3 + 39h^3 + d^3) / (18h^2EF), \\ \delta_2^{\max} &= (18a^3 + 45c^3 + 126h^3 + 9d^3) / (18h^2EF), \\ \delta_3^{\max} &= (75a^3 + 232c^3 + 441h^3 + 25d^3) / (18h^2EF), \\ \delta_4^{\max} &= (236a^3 + 763c^3 + 1740h^3 + 121d^3) / (18h^2EF), \\ \delta_5^{\max} &= (873a^3 + 3294c^3 + 6831h^3 + 441d^3) / (18h^2EF),\end{aligned}$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $d = \sqrt{a^2 + 4h^2}$. Методами системы компьютерной математики Maple с помощью оператора `rgf_findrecur` можно получить выражение общего члена полученной последовательности [18]. Искомая формула имеет вид полинома:

$$\Delta_n = K \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3}{2h^2 EF},$$

где коэффициенты полинома C_1, \dots, C_4 зависят лишь от числа панелей n на половине пролета:

$$\begin{aligned}C_1 &= (18n^3 + 18n^2 - 12(-2)^n + 3n + 204^n - 8) / 486, \\ C_2 &= (27n + 284^n + 7 - 26(-2)^n) / 162, \\ C_3 &= (4(-2)^n + 44^n + 1) / 162, \\ C_4 &= (2(-2)^n + 9n + 204^n + 32) / 54.\end{aligned}$$

Расчетная формула для определения первой частоты имеет вид:

$$\omega_* = h \sqrt{\frac{2EF}{Km(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3)}}. \quad (2)$$

Численное решение. Полученное аналитическое решение надо сравнить с численным, полученным для фермы как дискретной механической системы масс с K степенями свободы. Расчеты выполняются в той же системе Maple, но работающей в численной моде. Для определения собственных чисел матрицы системы уравнений применяется оператор **Eigenvalues**. Приняты размеры панели фермы: $a = 3\text{м}$, $h = 2\text{м}$. Материал стержней — сталь, модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, площадь поперечного сечения стержней $F = 9\text{см}^2$, в узлах расположены массы $m = 200\text{кг}$. Кривая зависимости частоты ω_* от числа панелей по формуле (2) сопоставлена с первой частотой спектра ω_1 , полученной численно с учетом всех степеней свободы грузов, колеблющихся в узлах фермы по вертикали (рис. 4). С ростом числа панелей решения сближаются. Частота колебаний уменьшается. Аналитическое решение ограничивает численное решение снизу.

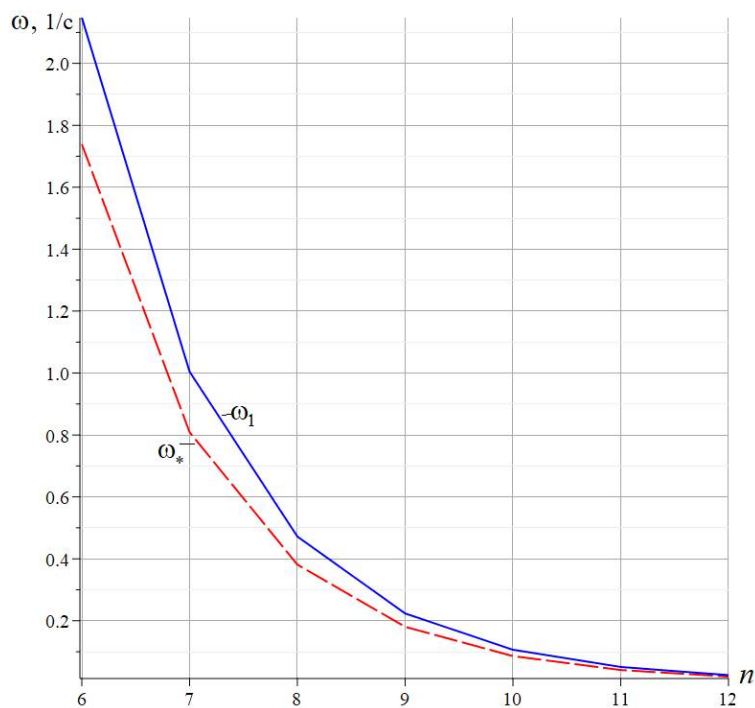


Рис. 4. Аналитическое решение ω_* и численное ω_1

Более наглядную оценку погрешности приближенного метода дает относительная величина: $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_*) / \omega_1$. Зависимости погрешности от числа панелей при $a = 3\text{м}$ для различных значений высоты h представлены на рис. 5.

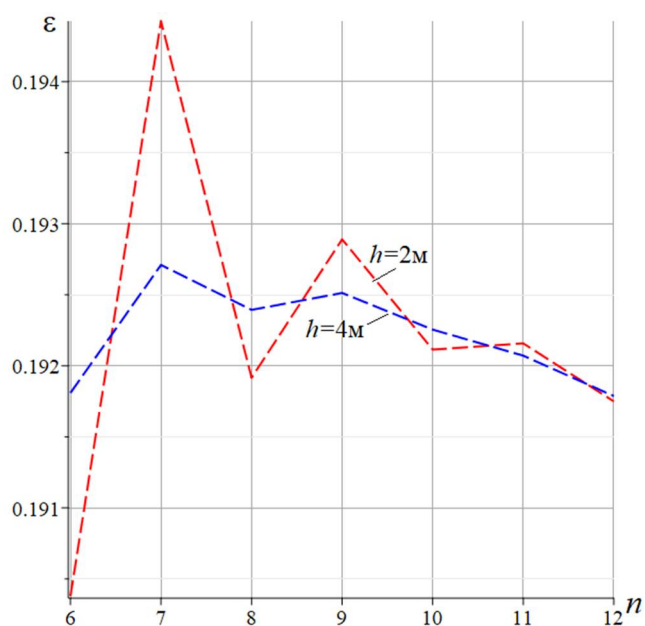


Рис. 5. Погрешность аналитической оценки (2) основной частоты

Спектр регулярных ферм. Первая частота колебаний конструкции наиболее востребована при расчете динамики сооружения. Высшие же частоты используются в инженерной практике реже, для них весьма затруднительно получить аналитические оценки при анализе регулярных систем, однако в общей картине спектров частот семейства регулярных ферм различного порядка есть некоторые полезные для расчетов закономерности.

Отдельные точки на рис. 6 означают частоты спектров собственных колебаний ферм различного порядка, рассчитанных для случая $a=3\text{м}$, $h = 2\text{м}$.

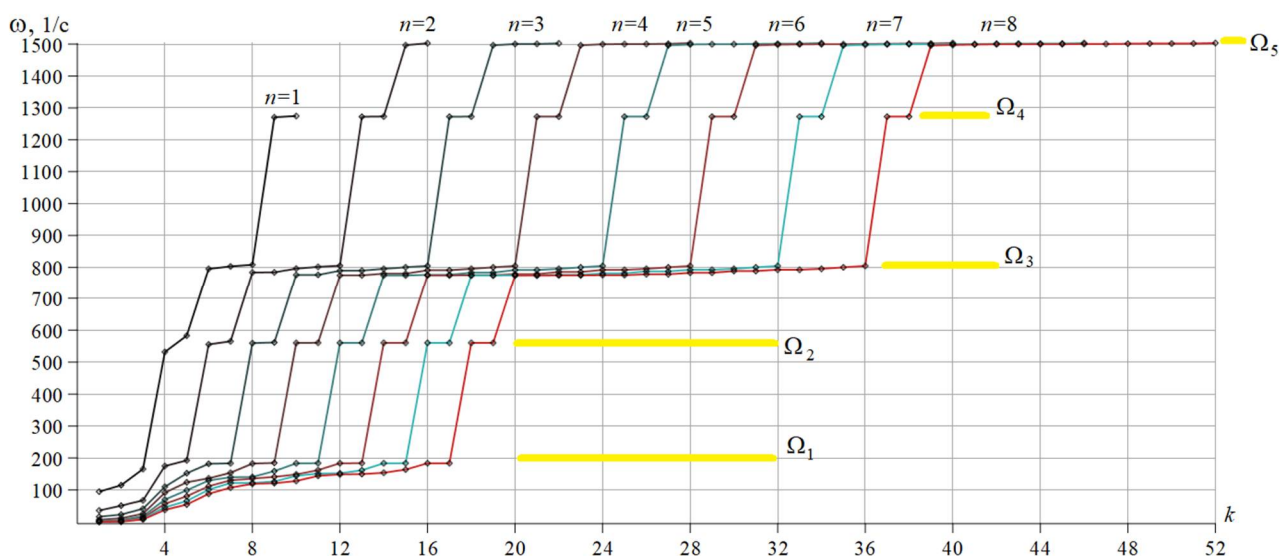


Рис. 6. Спектры семейства регулярных ферм порядков $n=1 - 20$

Расчеты выполнены численно в системе Maple по тому же алгоритму, что и аналитический расчет. Отдельные частоты спектра каждой фермы соединены условными кривыми. На оси абсцисс отложены номера частот в спектре. Сверху соответствующего спектра отмечен порядок фермы (число панелей в половине пролета), $n=1, \dots, 8$.

На графике можно заметить ряд закономерностей зависимости частот от числа панелей. Замечено, что высшая частота собственных колебаний фермы почти не зависит от порядка регулярной фермы. Это значение равно $\Omega_5 = 1505$ Гц, что близко к частоте ноты соль в третьей октаве (спектральная константа). Аналогично в этой задаче можно выделить еще четыре спектральных константы: $\Omega_4 = 1274$ Гц, $\Omega_3 = 805$ Гц, $\Omega_2 = 560$ Гц, $\Omega_1 = 183$ Гц. Знание констант позволяет оценить границы изменений собственных частот ферм большого порядка, для расчета которых требуются значительные вычислительные ресурсы и время. Интервалы между отмеченными константами образуют четыре зоны резонансной безопасности [4]. Внешние возмущения на частотах из этих областей не вызывают резонанса при любом числе панелей. Изменение размеров фермы не сильно влияет на положение и размеры этих зон.

Заключение. Рассмотрена новая схема статически определимой решетчатой фермы. Получена формула зависимости основной частоты собственных колебаний модели ферменной конструкции от числа панелей. Точность выведенной формулы вполне удовлетворительная и растет с увеличением числа панелей. В спектре собственных частот семейства регулярных ферм с различным числом панелей обнаружены спектральные константы, дающие возможность находить численные решения для ферм высокого порядка регулярности простым перерасчетом ферм с небольшим числом панелей. Спектральные константы образуют четыре зоны резонансной безопасности.

Библиографический список

1. Han Q. H. et al. Failure mechanism of steel arch trusses: Shaking table testing and FEM

- analysis // *Engineering Structures*. — 2015. — Т. — 82. — С.—186–198. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.10.013>
2. Liu H. et al. Study on updating finite element model of steel truss structure based on knowledge-enhanced deep reinforcement learning // *Engineering Structures*. — 2024. — Т. 316. — С. 118576. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.118576>
 3. Игнатъев В.А., Игнатъев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, — 2022. — 306 с.
 4. Льюнг Конг Л. Зависимость области резонансно безопасных частот от размеров статически определимой плоской фермы // *Строительная механика и конструкции*. — 2024. — №2(41). — С.16-26. DOI 10.36622/2219-1038.2024.41.2.002
 5. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. — 2021. — №2 (29). — С. 29-37.
 6. Kirsanov M., Saypulaev G., Saypulaev M. Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss // *AlfaBuild*. — 2023. — 29. — Article No 2902. DOI: 10.57728/ALF.29.2
 7. Кирсанов М.Н. Формула для расчета первой частоты собственных колебаний фермы // *Строительная механика и конструкции*. — 2023. — №4(39). — С. 42-50. DOI 10.36622/VSTU.2023.39.4.005
 8. Комерзан Е. В., Ниналалов И.Г., Свириденко О. В. Расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы // *Строительная механика и конструкции*. — 2023. — №4(39). — С. 27-34
 9. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. — 2022. 101. — Article No 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1
 10. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. — 2022. — 111(3). — Article No. 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14
 11. Манукало А. С. Анализ значения первой частоты собственных колебаний плоской фермы // *Постулат*. — 2023. — №4.
 12. Хазов П. А., Молодушная, Б. Б. Лампси (мл.) и др. Сравнение динамических расчетных моделей при определении частот и форм собственных колебаний большепролетной стальной фермы покрытия здания велодрома // *Приволжский научный журнал*. — 2019. — №. 2. — С. 16-24.
 13. Петриченко Е.А. Оценка частоты собственных колебаний фермы Финка // В книге: *Радиоэлектроника, электротехника и энергетика. Тезисы докладов двадцать седьмой международной научно-технической конференции студентов и аспирантов*. Москва, 2021. — С. 999.
 14. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss // *AlfaBuild*. — 2021. — 20 — Article No 2001. DOI: 10.34910/ALF.20.1
 15. Скулова П.А. Оценка частоты собственных колебаний фермы Больмана // В сборнике: *Механизация и автоматизация строительства. Сборник статей*. Самарский государственный технический университет. Самара, — 2020. — С. 102-107.
 16. Dai Qiao Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // *AlfaBuild*. — 2021. — 17. — Article No 1701. DOI: 10.34910/ALF.17.1
 17. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // *Construction of Unique Buildings and Structures*. — 2023. —109 —Article No 10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12
 18. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a

References

1. Han Q. H. et al. Failure mechanism of steel arch trusses: Shaking table testing and FEM analysis. *Engineering Structures*. 2015. V. 82. P. 186-198. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.10.013>.
2. Liu H. et al. Study on updating finite element model of steel truss structure based on knowledge-enhanced deep reinforcement learning. *Engineering Structures*. 2024. V. 316. P. 118576. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.118576>
3. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p. (in Russian).
4. Luong Kong L. Dependence of the region of resonantly safe frequencies on the dimensions of a statically determinate flat truss. *Structural Mechanics and Structures*. 2024. No. 2 (41). P. 16-26. DOI 10.36622/2219-1038.2024.41.2.002 (in Russian).
5. Komerzan E.V., Sviridenko O. V. Analytical calculation of the deflection of a plane external statically undetermined truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and Structures*, 2021. 2(29). 29-30. (in Russian).
6. Kirsanov, M., Saypulaev, G., Saypulaev, M. Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss. *AlfaBuild*. 2023. 29 Article No 2902. doi: 10.57728/ALF.29.2
7. Kirsanov M.N. Formula for calculating the first frequency of natural oscillations of a truss. *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 4 (39). P. 42-50. DOI 10.36622 / VSTU.2023.39.4.005. (in Russian).
8. Komerzan E. V., Ninalalov I. G., Sviridenko O. V. Calculation of the fundamental frequency of natural oscillations of a flat model of a composite truss // *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 4 (39). P. 27-34 (in Russian).
9. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101. Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
10. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. *Magazine of Civil Engineering*. 2022. 111(3). Article 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
11. Manukalo A.S. Analysis of the value of the first frequency of natural oscillations of a flat truss. *Postulate*. 2023. No. 4. (in Russian).
12. Khazov P. A., Molodushnaya, B. B. Lampsii (Jr.), et al. Comparison of dynamic calculation models for determining the frequencies and modes of natural vibrations of a large-span steel truss of the velodrome building roof. *Privolzhsky Scientific Journal*. - 2019. No. 2. P. 16-24. (in Russian).
13. Petrichenko E.A. Estimation of the natural oscillation frequency of the Fink truss. In the book: *Radio electronics, electrical engineering and power engineering. Abstracts of reports of the twenty-seventh international scientific and technical conference of students and postgraduates*. Moscow, 2021. P. 999. (in Russian).
14. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*. 2021. 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
15. Skulova P.A. Estimation of the natural oscillation frequency of the Bohlmann truss. In the collection: *Mechanization and automation of construction. Collection of articles*. Samara State Technical University. Samara, 2020. Pp. 102-107. (in Russian).

16. Dai Qiao Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. AlfaBuild. 2021. 17. Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
17. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution. Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 109 Article No 10912. doi: 10.4123/CUBS.109.12
18. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 108. Article No 10801. doi: 10.4123/CUBS.108.1

ANALYTICAL ASSESSMENT OF THE FIRST FREQUENCY OF NATURAL OSCILLATIONS OF A SEMI-DISPATCH TYPE LATTICE TRUSS

M. N. Kirsanov

National Research University «MPEI»

Russia, Moscow

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

The beam regular truss with parallel chords has a complex diagonal lattice. The formula for the dependence of the fundamental oscillation frequency on the number of panels is derived using the method based on the simplified Dunkerley formula. The inertial properties of the structure are modeled by masses concentrated in its nodes. It is assumed that the oscillations of the nodes occur along the vertical axis. The Maxwell-Mohr formula is used to calculate the rigidity of the truss. Comparison of the analytical solution with the numerical one shows the high accuracy of the obtained formula. All transformations are performed in the computer mathematics system. Generalization of a series of particular solutions to an arbitrary number of panels is performed by the induction method. The spectrum of natural frequencies is analyzed numerically and spectral constants and resonance safety zones are identified.

Key words: statically determinate truss, first natural frequency, analytical method, induction, Maxwell-Mohr formula, spectrum of natural frequencies, spectral constants, resonance safety zone.