

Кинематический анализ и аналитический расчет прогибов регулярной фермы

М.Н. Кирсанов, д-р физ.-мат. наук, проф., mpei2004@yandex.ru

О.В. Грибова, gribovaov@mail.ru

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Аннотация: Плоская внешне статически неопределимая решетчатая регулярная ферма с четырьмя опорами при определенном числе панелей допускает кинематическую изменяемость. Приводится соответствующая схема возможных скоростей и последовательность недопустимых чисел панелей. Для неизменяемых вариантов фермы методом индукции с применением системы компьютерной математики Maple выводится формула зависимости прогиба и сдвига подвижной опоры от числа панелей. Выявляются асимптотики решений.

Ключевые слова: ферма, Maple, индукция, число панелей, прогиб, кинематическая изменяемость, аналитическое решение, реакции опор.

Для цитирования: Кирсанов М.Н., Грибова О.В. Кинематический анализ и аналитический расчет прогибов регулярной фермы. Строительная механика и расчет сооружений. 2025. № 6. С. 72–78. doi: 10.37538/0039-2383.2025.6.72.78

KINEMATIC ANALYSIS AND ANALYTICAL CALCULATION OF DEFLECTIONS OF A REGULAR TRUSS

M.N. Kirsanov, д-р физ.-мат. наук, проф., mpei2004@yandex.ru

O.V. Gribova, gribovaov@mail.ru

National Research University "MPEI"

Abstract: A planar, externally statically indeterminate lattice regular truss with four supports allows for kinematic variability with a certain number of panels. The corresponding scheme of possible velocities and a sequence of inadmissible numbers of panels are given. For unchangeable truss variants, a formula for the dependence of the deflection and shift of the movable support on the number of panels is derived by the induction method using the Maple computer mathematics system for various nodal loads. The deflection exhibits an abrupt nature. Analytical dependencies of the forces in characteristic rods on the load, dimensions and number of truss panels are found. Asymptotics of solutions are revealed.

Key words: truss, Maple, induction, number of panels, deflection, kinematic variability, analytical solution, support reactions.

For citation: Kirsanov M.N., Gribova O.V. Kinematic analysis and analytical calculation of deflections of a regular truss. Structural mechanics and analysis of constructions. 2025. No. 6. Pp. 72–78 (in Russian). DOI: 10.37538/0039-2383.2025.6.72.78

Постановка задачи

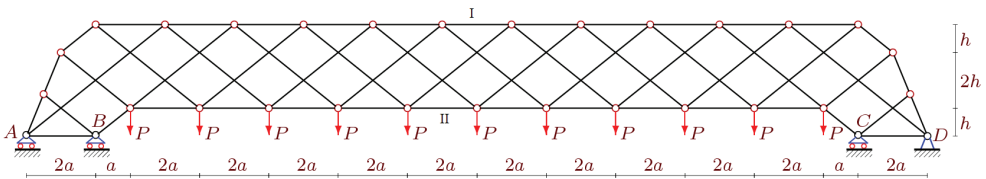
Любая конструкция, используемая в строительстве или машиностроении, должна быть рассчитана не только на деформации, но и на кинематическую изменяемость. Часто внешние надежные статически определимые регулярные конструкции, например, фермы, имеющие периодическую структуру, рассчитанные на прочность и колебания при одном числе панелей, при другом числе панелей оказываются кинематически изменяемыми [1]. Это свойство конструкции может быть скрытым и в численном расчете, допускающем погрешность вычислений, не проявиться. Известные в строительной механике критерии [2] не всегда могут предсказать изменяемость конструкции. Наиболее универсальным и надежным способом выявления скрытых кинематических дефектов конструкции является аналитический расчет. На изменяемость системы указывает вырождение системы уравнений равновесия узлов конструкции, соответствующее равенству нулю определителя системы. Существенный фактор здесь — решение в символьной форме с использованием какой-либо системы компьютерной алгебры (Maple, Mathematica, Derive и др.). Одна и та же система уравнений, решенная численно и аналитически, может давать принципиально разные результаты. В численном решении за счет неизбежной погрешности округления определитель изменяемой системы может оказаться близким к нулю, но не нулем, что в конечном счете приведет к неправильному решению и допустит применение изменяемой конструкции.

Одни из первых, кто занимался аналитическими расчетами регулярных стержневых конструкций произвольного порядка, были английские исследователи *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* (Cambridge University Engineering Department) [3]. Именно они начали систематический поиск («охоту») статически определимых регулярных стержневых конструкций, для расчета которых применимы аналитические методы [4, 5]. В справочниках [6, 7] собраны различные схемы статически определимых плоских ферм и формулы для расчета их прогибов под действием распределенных и сосредоточенных узловых нагрузок. В [8] в системе Maple выполнен аналитический расчет прогиба плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей. Этот же алгоритм применен в [9, 10] для приближенного аналитического расчета собственной частоты колебаний фермы. Частота колебаний консольной фермы в зависимости от числа панелей рассчитана аналитически в [11]. Вопросам оптимизации регулярных стержневых систем посвящены работы иранского профессора *A. Kaveh* [12, 13]. В [14] получено аналитическое решение для прогиба фермы, обнаруживающей скрытую особенность. При числе панелей, кратном трем, она становится кинематически изменяемой. Приведена соответствующая схема возможных скоростей узлов. Аналитическое решение для собственной частоты колебаний плоской фермы в [15, 16] позволило найти зависимость области резонансно безопасных частот от ее размеров. Аналитические решения для пространственных ферм построить сложнее и они встречаются реже. В [17] получена формула для прогиба стержневой модели каркаса четырехскатного пространственного регулярного покрытия. Оценка по Донкерлею первой частоты колебаний Г-образной пространственной фермы получена в [18]. Частота колебаний консольной пространственной фермы в аналитической форме выведена в [19]. Прогиб внешне статически неопределимых ферм рассчитан в [20, 21].

В настоящей работе рассматривается плоская регулярная ферма с крестообразной решеткой, допускающая кинематическую изменяемость при определенном числе панелей. Исключая из рассмотрения недопустимые числа панелей, разыскиваются аналитические зависимости прогиба середины пролета от числа панелей для различных внешних нагрузок. Используется метод индукции с применением системы компьютерной математики Maple.

Расчетная модель

Плоская ферма с четырьмя опорами по концам имеет прямолинейные пояса, двоянную крестообразную решетку и подъем в средней своей части (рис. 1). Одна из опор — неподвижный шарнир, другие три — шарниры подвижные. Длина пролета $L = 2a(2n + 3)$, где $2n$ — число панелей в средней части фермы. Общее число стержней фермы вместе с пятью стержнями, моделирующими опоры, $\eta = 8n + 17$. Число узлов в ферме равно $K = 4n + 11$.



Координаты узлов для произвольного числа панелей n имеют вид:

$$\begin{aligned} L_0 &= 2a \cdot 2n + 3, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = 2a, \quad y_2 = 0, \\ x_{i+2} &= 2i + 1 \cdot a, \quad y_{i+2} = h, \quad i = 1, \dots, 2n + 1, \\ x_{2n+4} &= L_0 - 2a, \quad y_{2n+4} = 0, \quad x_{2n+5} = L_0, \quad y_{2n+5} = 0, \\ x_{2n+6} &= a / 2, \quad y_{2n+6} = 3h / 2, \quad x_{2n+7} = a, \quad y_{2n+7} = 3h, \\ x_{i+2n+7} &= 2ia, \quad y_{i+2n+7} = 4h, \quad i = 1, \dots, 2n + 2, \\ x_{4n+10} &= L_0 - a, \quad y_{4n+10} = 3h, \quad x_{4n+11} = L_0 - a / 2, \quad y_{4n+11} = 3h / 2. \end{aligned}$$

Структура соединения стержней в узлы определяется списками номеров концов соответствующих стержней. Пояса имеют следующие списки номеров:

$$\Phi_i = [i, i + 1], \quad i = 1, \dots, 2n + 4, \quad \Phi_{i+2n+5} = [i + 2n + 5, i + 2n + 6], \quad i = 1, \dots, 2n + 5.$$

Раскосы решетки кодируются списками:

$$\Phi_{i+4n+11} = [i + 1, i + 2n + 5], \quad \Phi_{i+6n+15} = [i + 2n + 9, i + 2], \quad i = 1, \dots, 2n + 2.$$

По этим данным вычисляются направляющие косинусы усилий в стержнях — коэффициенты системы уравнений равновесия узлов в проекциях на оси координат:

$$GS=B, \quad (1)$$

где G — матрица направляющих косинусов усилий. Вектор неизвестных усилий и реакций опор обозначен как S , вектор нагрузок на узлы — B . Длина этих векторов равна числу узлов фермы K . Каждому узлу фермы соответствует по две последовательные строки матрицы G и два элемента вектора нагрузок с такими же номерами. В нечетные элементы вектора нагрузок B_{2i-1} записываются проекции внешних сил, приложенных к узлу i в проекции на горизонтальную ось x , в четные — проекции сил на вертикальную ось y . Направляющие косинусы векторов усилий на оси координат вычисляются по данным о координатах узлов и структуре решетки:

$$l_{x,i} = (x_{\Phi_{i,1}} - x_{\Phi_{i,2}}) / l_i, \quad l_{y,i} = (y_{\Phi_{i,1}} - y_{\Phi_{i,2}}) / l_i, \quad i = 1, \dots, \eta,$$

где $l_i = \sqrt{l_{x,i}^2 + l_{y,i}^2}$ — длина стержня с номером i . Матрица коэффициентов уравнений равновесия заполняется по строкам. В каждые две строки записываются коэффициенты для одного узла для уравнений проекций на оси x и y :

$$\begin{aligned} G_{2\Phi_{i,1}-1,i} &= l_{x,i} / l_i, \quad G_{2\Phi_{i,1},i} = l_{y,i} / l_i, \\ G_{2\Phi_{i,2}-1,i} &= -l_{x,i} / l_i, \quad G_{2\Phi_{i,2},i} = -l_{y,i} / l_i. \end{aligned}$$

Решение системы разыскивается в программе Maple в аналитической форме методом обратной матрицы.

Анализ мгновенной изменяемости конструкции

Первые же расчеты усилий в стержнях для произвольной нагрузки показали, что для $n=1, 4, 7, 10 \dots$ определитель матрицы B системы уравнений равновесия (1) обращается в нуль для любой внешней нагрузки. Это означает, что при этих значениях ферма приобретает свойства мгновенно изменяемого механизма. Вариант картины распределения соответствующих скоростей узлов представлен на рисунке 3.

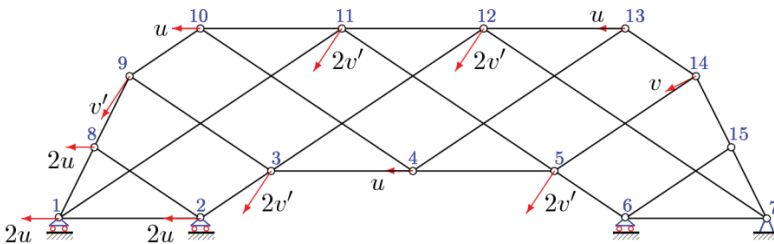


Рисунок 3. Виртуальные скорости узлов фермы при $n=1$

Расчет скоростей начинается с любого узла, направление вектора скорости которого очевидно. В данном случае опорные узлы 6 и 7 неподвижны, откуда следует, что узел 15 также неподвижен (жесткий треугольник), а вектор скорости узла 14, направленный перпендикулярно стержню 14-15, можно задать некоторой величиной v . Вектор скорости узла 5 однозначно определяется по скоростям узлов 6 и 14. Переходя от узлу к узлу, можно получить картину распределения скоростей, выраженных через один параметр u :

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 &= \bar{v}_2 = \bar{v}_8 = -[2u, 0], \\ \bar{v}_4 &= \bar{v}_{10} = \bar{v}_{13} = -[u, 0], \\ \bar{v}_3 &= \bar{v}_5 = \bar{v}_{11} = \bar{v}_{12} = 2\bar{v}' = -[u, ua/h], \\ \bar{v}_{14} &= -[3u/2, ua/(2h)], \\ \bar{v}_9 &= \bar{v}' = -[u/2, ua/(2h)].\end{aligned}$$

Следовательно, при таком числе панелей ферма имеет одну степень свободы. В процессе расчета скоростей используется тот факт, что скорости подвижных узлов 1 и 2 по условию опирания горизонтальны. Правильность построения картины распределения скоростей проверяется теоремой о проекциях векторов скоростей неизменяемого отрезка.

Усилия в стержнях

Численное решение системы уравнений (1) в случае узловой нагрузки по верхнему поясу с вектором правой части $B_{2i} = -P$, $i = 2n + 6, \dots, 4n + 11$ при $a = 3m$, $h = 2m$ дает картину распределения усилий в стержнях, представленную на рисунке 4. С точностью до двух значащих цифр указаны усилия, отнесенные к узловой нагрузке P . Синим цветом отмечены сжатые стержни, красным — растянутые. Два симметричных раскоса в середине пролета при такой нагрузке не напряжены (черный цвет). Толщины линий условно пропорциональны модулям усилий. Наиболее сжатые оказываются стержни верхнего пояса, а растянутые — в середине нижнего пояса.

Для усилий в отдельных стержнях и реакций опор методом индукции можно получить аналитические выражения. Например, последовательность значений усилий в среднем стержне I верхнего пояса (рис. 1) от действия на ферму сосредоточенной силы P на средний узел $n+3$ (рис. 2) имеет вид $S_i = -Pa/h, -2Pa/h, -2Pa/h, -3Pa/h, -3a/h, -4Pa/h, \dots$. Оператор `rgf_findrecur` системы Maple дает общий член этой последовательности: $S_i = -Pa(3 + 2k + (-1)^k)/(4h)$. Аналогично при этой же нагрузке определяется аналитическая зависимость усилия в стержне II середины нижнего пояса от числа панелей: $S_{II} = Pa(1 + 2k - 3(-1)^k)/(4h)$ и реакции опор $Y_A = Y_D = P(3 - 2(-1)^k)/4$, $Y_B = Y_C = P(2(-1)^k - 1)/4$. Здесь следует отметить, что для нечетных значений k внутренние опоры B и C выполняют роль удерживающих от смещения вверх связей, так как $Y_B < 0$, $Y_C < 0$.

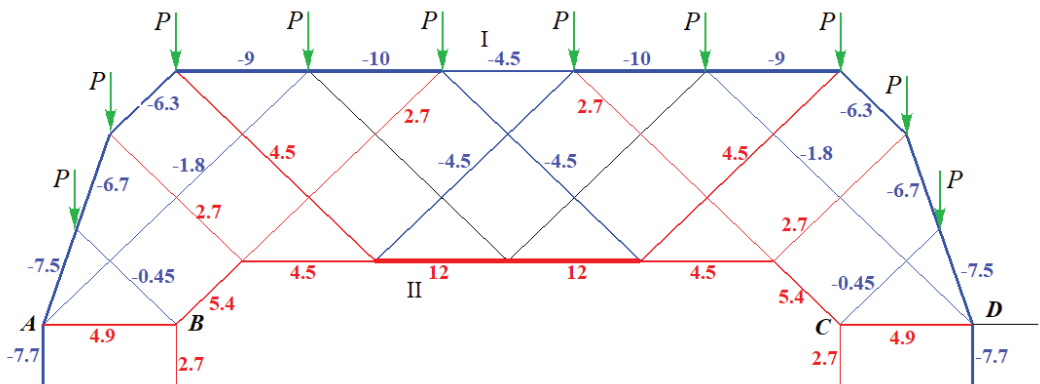


Рисунок 4. Распределение усилий в стержнях фермы при $n = 2$, $k = 1$

Для нагрузки по верхнему поясу (рис. 4) усилия в этих же стержнях имеют вид:

$S_i = -Pa(11 + (-1)^k(6k + 5) + 6k^2 + 18k)/(8h)$, $S_{II} = Pa(6k^2 + 18k + 19 - (-1)^k(10k + 11))/(8h)$,
реакции опор:

$$Y_A = Y_D = P(33 + (18 - 4(-1)^k)k - 7(-1)^k)/8, \quad Y_B = Y_C = P((4(-1)^k - 6)k + 5(-1)^k - 7)/8.$$

Прогиб

Для вывода формулы искомой зависимости прогиба от числа панелей методами дискретной математики составляется общий член последовательности допустимых чисел панелей, при которых определитель системы (1) в нуль не обращается. Расчет прогиба производится для последовательности $n = (6k - (-1)^k + 1)/4$, $k = 1, 2, \dots$. Вертикальное смещение центрального узла нижнего пояса определяется по формуле Максвелла-Мора:

$$\delta_D = \sum_{j=1}^n \frac{S_j S_j l_j}{EF}, \quad (2)$$

где E — модуль упругости стержней, F — площадь поперечного сечений, S_j и l_j — усилие в j -м стержне от действия узловой нагрузки и его длина, S_j — усилие от единичной вертикальной силы, приложенной к узлу с номером $n+3$ в середине нижнего пояса. Получены следующие выражения для прогиба фермы под действием равномерной узловой нагрузки на нижний пояс при разных k :

$$\begin{aligned} k=1: \delta_C &= P(922a^3 + 211c^3 + 5d^3)/(8EFh^2), \\ k=2: \delta_C &= P(1222a^3 + 353c^3 + 7d^3)/(8EFh^2), \\ k=3: \delta_C &= P(9070a^3 + 851c^3 + 11d^3)/(8EFh^2), \\ k=4: \delta_C &= P(9258a^3 + 1115c^3 + 13d^3)/(8EFh^2), \\ k=5: \delta_C &= P(36210a^3 + 1943c^3 + 17d^3)/(8EFh^2), \dots \end{aligned}$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $d = \sqrt{a^2 + 9h^2}$. Общий член этой последовательности имеет вид:

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3)/(EFh^2), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= (30k^4 + 4(45 - 17(-1)^k)k^3 + 2(243 - 145(-1)^k)k^2 + 124(3 - 2(-1)^k)k - 67(-1)^k + 103)/16, \\ C_2 &= (108k^2 + 2(83 - 26(-1)^k)k - 25(-1)^k + 71)/16, \\ C_3 &= (6k - (-1)^k + 3)/16. \end{aligned}$$

На графике 5 представлены кривые зависимости относительного прогиба $\Delta' = EF\Delta/(L_0 P_{\text{sum}})$ от числа панелей. $P_0 = (2n+1)P$ — суммарная нагрузка на ферму. Кривые имеют квадратичную асимптотику: $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta'/k^2 = 5a^2/(108h^2)$ и весьма существенные скачки, зависящие от четности числа панелей.

В случае нагрузки на верхний пояс коэффициенты в (3) имеют вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= (30k^4 + 4(45 - 17(-1)^k)k^3 + 2(273 - 149(-1)^k)k^2 + 4(152 - 93(-1)^k)k - 121(-1)^k + 173)/16, \\ C_2 &= (108k^2 + 2(107 - 26(-1)^k)k - 47(-1)^k + 107)/16, \\ C_3 &= (6k - (-1)^k + 10)/16. \end{aligned}$$

Коэффициенты в (3) при вычислении прогиба от действия сосредоточенной нагрузки на узел $n+3$ имеют более простой вид и степень полиномов по k на единицу меньше:

$$\begin{aligned} C_1 &= (4k^3 + 2(9 - 5(-1)^k)k^2 - 9(-1)^k + 6(8 - 5(-1)^k)k + 18)/4, \\ C_2 &= (36k - 10(-1)^k + 33)/8, \\ C_3 &= 1/8. \end{aligned}$$

Подвижные опоры под действием нагрузки получают горизонтальные смещения, рассчитать которые можно по той же формуле Максвелла-Мора. В этом случае в формуле (2) S_j — усилие от единичной горизонтальной силы, приложенной к подвижному узлу А. Формула для смещения опоры А имеет вид:

$$\delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3)/(EFah), \quad (4)$$

где в случае нагрузки на верхний пояс коэффициенты следующие:

$$\begin{aligned} C_1 &= (4(9 - 2(-1)^k)k^3 + 2(107 - 39(-1)^k)k^2 + 2(149 - 68(-1)^k)k - 59(-1)^k + 97)/4, \\ C_2 &= (96k^2 + 2(100 - 17(-1)^k)k - 33(-1)^k + 101)/8, \\ C_3 &= (6k - (-1)^k + 10)/8. \end{aligned}$$

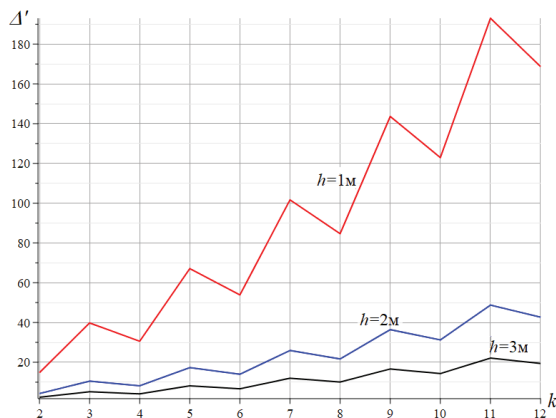


Рисунок 5. Зависимость относительного прогиба от числа панелей в случае нагрузки на нижний пояс

Аналогичный вид имеют коэффициенты (4) для нагрузки по нижнему поясу:

$$C_1 = (4(9 - 2(-1)^k)k^3 + 2(107 - 39(-1)^k)k^2 + 2(83 - 52(-1)^k)k - 31(-1)^k + 45) / 4,$$

$$C_2 = (96k^2 + 2(76 - 17(-1)^k)k - 21(-1)^k + 63) / 8,$$

$$C_3 = (6k - (-1)^k + 3) / 8.$$

Горизонтальное смещение опоры A от действия вертикальной сосредоточенной силы в середине пролета также рассчитывается по формуле (4), но с более простыми коэффициентами:

$$C_1 = ((18 - 4(-1)^k)k^2 + (82 - 42(-1)^k)k - 17(-1)^k + 31) / 4,$$

$$C_2 = (24k - 3(-1)^k + 24) / 4, \quad C_3 = 1 / 4.$$

Заключение

В схеме плоской статически определимой фермы обнаружена конструктивная особенность — кинематическая изменяемость при определенном числе панелей. Эффект изменяемости не зависит от размеров фермы и нагрузок. Выявлена закономерность возникновения этого эффекта. Обнаружена числовая последовательность количества панелей, для которой узлы фермы могут приобретать мгновенную скорость. Для последовательности допустимых чисел панелей найдена общая формула, и построено решение задачи о зависимости прогиба и смещения подвижной опоры от размеров конструкции, нагрузки и числа панелей. Рассчитана асимптотика этих решений.

Список литературы

1. Kirsanov M. N., Komerzan E., Sviridenko O. Inductive analysis of the deflection of a beam truss allowing kinematic variation // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 239. 01012 <https://doi.org/10.1051/mateconf/201823901012>
2. Рабинович И.М. Основы строительной механики стержневых систем. Стройиздат. Москва. 1960. 519 с.
3. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — The hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005.85(9). С. 607–617. DOI:10.1002/zamm.200410208.
4. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures // J. Mech. Phys. Solids. – 2003. 51. – С. 383–391.
5. Zok F. W., Lature R. M., Begley M. R. Periodic truss structures // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. 96. С. 184–203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>
6. Kirsanov M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas Cambridge Scholars Publishing UK. 2024. 186 с.
7. Kirsanov M. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing. UK. 2024. 206 с.
8. Комерзан Е.В., Лушнов Н.А., Осипова Т.С. Аналитический расчет прогиба плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2022. № 2(33). С. 17–25.
9. Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты двухпролётной фермы с учётом жесткости опор // Строительная механика и конструкции. 2021. № 4 (31). С. 16–25.
10. Petrenko V.F. The natural frequency of a two-span truss // AlfaBuild. 2021. № 20. С. 2001. DOI:10.34910/ALF20.1.
11. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 101. Article No 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1
12. Kaveh A. Optimal Analysis of Structures by Concepts of Symmetry and Regularity. Vienna: Springer, 2013. 463 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1565-7>

13. Kaveh A. Truss Optimization with Natural Frequency Constraints Using a Hybridized CSS-BBBC Algorithm with Trap Recognition Capability // *Computers & Structures*. 2012. Vol. 102–103. С. 14–27. <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUC.2012.03.016>
14. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2017. № 2 (271). С. 6–10.
15. Люнг Конг Л. Зависимость области резонансно безопасных частот от размеров статически определимой плоской фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2024. № 2(41). С.16–26. DOI 10.36622/2219-1038.2024.41.2.002
16. Luong, C.L. Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2024. 113. Article No 11304. doi: 10.4123/CUBS.113.4
17. Астахов С. В. Аналитическая оценка прогиба стержневой модели каркаса четырехскатного покрытия // *Строительная механика и конструкции*. 2024. № 4(43). С.34–41.
18. Кומרзан Е.В., Маслов А.Н. Оценка основной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2023. № 2(37). С.35–45. DOI 10.36622/VSTU.2023.37.2.004
19. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101. Article No 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
20. Овсянникова В.М. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2020. № 4 (27). С. 16–25.
21. Кומרзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2021. № 2 (29). С. 29–37.

References

1. Kirsanov M. N., Komerzan E., Sviridenko O. Inductive analysis of the deflection of a beam truss allowing kinematic variation. MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 239, 01012 <https://doi.org/10.1051/mateconf/201823901012>.
2. Rabinovich I. M. Fundamentals of Structural Mechanics of Rod Systems. Stroyizdat. Moscow. 1960. 519 p. (in Russian).
3. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids — The hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005.85(9). Pp. 607–617. DOI:10.1002/zamm.200410208.
4. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures. *J. Mech. Phys. Solids*. 2003. 51. Pp. 383–391.
5. Zok F. W., Latture R. M., Begley M. R. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. Vol. 96. Pp. 184–203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>
6. Kirsanov M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas Cambridge Scholars Publishing UK. 2024. 186 p.
7. Kirsanov M. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing. UK. 2024. 206 p.
8. Komerzan E.V., Lushnov N.A., Osipova T.S. Analytical calculation of the deflection of a flat truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2022. No. 2 (33). - Pp. 17–25. (in Russian).
9. Petrenko V.F. Estimation of the natural frequency of a two-span truss taking into account the rigidity of the supports. *Structural mechanics and structures*. 2021. No. 4 (31). Pp. 16–25. (in Russian).
10. Petrenko V.F. The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*. 2021. No. 20. Pp. 2001. DOI:10.34910/ALF.20.1.
11. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101. Article No. 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
12. Kaveh A. Optimal Analysis of Structures by Concepts of Symmetry and Regularity. Vienna: Springer, 2013. 463 rub. <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1565-7>.
13. Kaveh A. Truss Optimization with Natural Frequency Constraints Using a Hybridized CSS-BBBC Algorithm with Trap Recognition Capability. *Computers & Structures*. 2012. Vol. 102–103. – Pp. 14–27. <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUC.2012.03.016>.
14. Kirsanov M.N., Maslov A.N. Formulas for calculating the deflection of a multi-lattice beam truss. *Structural Mechanics and Analysis of Structures*. 2017. No. 2 (271). Pp. 6–10. (in Russian).
15. Luong Kong L. Dependence of the region of resonant safety frequencies on the dimensions of a statically determinate flat truss. *Structural Mechanics and Structures*. 2024. No. 2 (41). Pp. 16–26. DOI 10.36622 / 2219-1038.2024.41.2.002 (in Russian).
16. Luong C.L. Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2024. 113. Article No 11304. DOI: 10.4123 / CUBS.113.4.
17. Astakhov S. V. Analytical assessment of the deflection of the rod model of the hipped roof frame. *Structural Mechanics and Structures*. 2024. No. 4 (43). Pp. 34–41. (in Russian).
18. Komerzan E.V., Maslov A.N. Estimation of the fundamental oscillation frequency of an L-shaped spatial truss. *Structural Mechanics and Structures*. 2023. No. 2 (37). Pp. 35–45. DOI 10.36622 / VSTU.2023.37.2.004 (in Russian).
19. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101. Article No 10101. doi: 10.4123 / CUBS.101.1.
20. Ovsyannikova V.M. Dependence of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss on the number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2020. No. 4 (27). Pp. 16–25. (in Russian).
21. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2021. No. 2 (29). Pp. 29–37. (in Russian).