

## **Аналитический расчет величины прогиба балочной фермы со сложной решеткой под действием нагрузки по нижнему поясу**

*Кирсанов Михаил Николаевич*  
*НИУ «МЭИ»*  
*Профессор*

*Арутюнян Виктория Борисовна*  
*НИУ «МЭИ»*  
*студент*

### **Аннотация**

Статически определимая плоская ферма равномерно загружается по узлам нижнего пояса. Ставится задача вывода аналитической зависимости вертикального перемещения среднего узла фермы от числа панелей. Усилия в стержнях определяются методом вырезания узлов, перемещение — по формуле Максвелла-Мора. Для обобщения решения на произвольное число панелей используется индуктивный метод. Даны формулы для усилий в наиболее опасных стержнях. Найдено смещение подвижной опоры. Все преобразования выполнены в системе компьютерной математики Maple.

**Ключевые слова:** ферма, интеграл Мора, прогиб, индукция, Maple

## **Analytical calculation of the deflection of a beam truss with a complex lattice under the action of a load along the lower belt**

*Kirsanov Mikhail Nikolaevich*  
*NRU «MPEI»*  
*Professor*

*Arutyunyan Victoria Borisovna*  
*NRU «MPEI»*  
*Student*

### **Abstract**

A statically determinate flat truss is evenly loaded along the nodes of the lower belt. The problem is set to derive the analytical dependence of the vertical displacement of the central node of the truss on the number of panels. Forces in the rods are determined by the method of cutting out the knots, displacement is carried out using the Maxwell-Mohr's formula. To generalize the solution to an arbitrary number of panels, an inductive method is used. The formulas for the forces in the most dangerous rods are given. The displacement of the mobile support is found. All transformations are performed in the system of computer mathematics Maple.

**Keywords:** truss, Mohr's integral, deflection, induction, Maple

В [1] жесткость фермы (рис. 1) рассчитана на нагрузку по верхнему поясу. Ферма высотой  $2h$  имеет  $n$  панелей длиной  $a$  в половине пролета. Число стержней –  $k = 12n + 6$ , включая три опорные стержня. Ставится задача дополнить решение [1] расчетом на нагрузку по нижнему поясу. Как и ранее, используем программу [2], позволяющую получать усилия в стержнях в символьном виде.

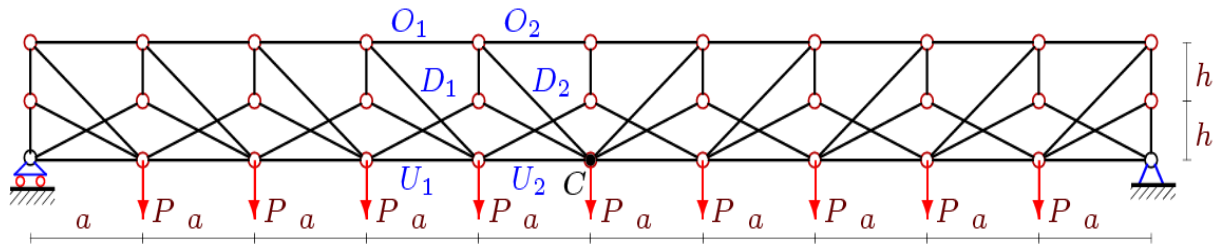


Рисунок 1 — Ферма при нагрузке снизу,  $n=5$

Приведем фрагмент программы, в которой заполняется матрица **G** уравнений равновесия узлов.

```
> m0:=12*n+6:
> for i to m0 do
>     Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]]:
>     Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]]:
>     L[i]:=subs(a^2+h^2=c^2,a^2+4*h^2=d^2,
>               sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2));
>     for j to 2 do
>         jj:=2*N[i][2]-2+j:
>         if jj<=m0 then G[jj,i]:=-Lxy[j]/L[i]:fi;
>         jj:=2*N[i][1]-2+j:
>         if jj<=m0 then G[jj,i]:= Lxy[j]/L[i]:fi;
>     od;
> od:
```

Здесь **Lxy[1]** – проекция стержня **i** (с условно выбранным направлением) на ось  $x$ , **Lxy[2]** – проекция на ось  $y$ . Оператор замены **subs** используется для более компактной записи результата. Ввод координат описан в [1].

Для вычисления прогиба используется интеграл Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{k-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$   $d = \sqrt{a^2 + 4h^2}$ . Обозначено:  $S_i^{(P)}$  — усилия в стержнях от заданной нагрузки,  $l_i$  — длины стержней,  $S_i^{(1)}$  — усилия от единичной силы, приложенной к середине нижнего пояса (на рисунке точка выделена),

$EF$  — жесткость стержней фермы. Индукция по 14 фермам дает формулу для прогиба вида

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 h^3 + C_3 c^3 + C_4 d^3) / (8h^2 EF).$$

Для выявления общих членов последовательностей коэффициентов, полученных из расчетов отдельных ферм, применяем специальные операторы `rgf_findrecur` пакета `genfunc` системы компьютерной математики Maple. Для коэффициентов при  $a^3$  получено линейное однородное рекуррентное уравнение седьмого порядка

$$C_{1(n)} = 3C_{1(n-1)} - C_{1(n-2)} - 5C_{1(n-3)} + 5C_{1(n-4)} + C_{1(n-5)} - 3C_{1(n-6)} + C_{1(n-7)}.$$

Для остальных коэффициентов формулы прогиба рекуррентное уравнение имеет одинаковый вид:

$$C_{2,3,4(n)} = C_{2,3,4(n-1)} + 2C_{2,3,4(n-2)} - 2C_{2,3,4(n-3)} - C_{2,3,4(n-4)} + C_{2,3,4(n-5)}.$$

Оператор `rsolve` дает следующие выражения:

$$C_1 = (4(5n^4 + 6n^3 + 4n^2 + 6((-1)^n - 3)n) + 30(1 - (-1)^n)) / 24,$$

$$C_2 = 2n^2 + 1 - (-1)^n,$$

$$C_3 = 2n^2 + 2((-1)^n - 1)n - (-1)^n + 1,$$

$$C_4 = (2n^2 + ((-1)^n - 1)n - (-1)^n + 1) / 2.$$

Аналитические выражения для усилий во всех стержнях получаются в процессе вывода выражения для прогиба. Выпишем формулы для расчета усилий в некоторых (наиболее опасных) стержнях фермы (рис. 1):

$$O_1 = -Pa(n^2 - 2) / (4h), O_2 = -Pan^2 / (4h),$$

$$D_1 = Pd / h, D_2 = Pd / (2h), U_1 = U_2 = Pan^2 / (4h).$$

Стержни верхнего пояса сжаты, их надо рассчитывать на устойчивость. В нижнем поясе стержни растянуты, в таких стержнях проверяется прочность. К деформационным характеристикам фермы относится и смещение подвижной опоры. Рассчитать это значение можно также по формуле Максвелла-Мора. Прикладывая единичную горизонтальную силу подвижной опоре, получаем значения усилий, по которым методом индукции получаем формулу

$$\delta = Pa^2 n(2n^2 + 3n - 5) / (6hEF).$$

Аналогичные решения для плоских и пространственных ферм методом индукции были получены в работах [3-9]. Обзор работ, содержащих выводы аналитических выражений для прогиба ферм, дан в [9-11].

## Библиографический список

1. Кирсанов М.Н., Арутюнян В.Б. Аналитический расчет величины прогиба балочной фермы со сложной решеткой // Постулат. 2018. №2.
2. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во

- Лань, 2012. 512 с.
3. Кирсанов М.Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте, моделируемом фермой // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 560–569.
  4. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61–68.
  5. Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 8 (107). С. 869–875.
  6. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. Pp. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7.
  7. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решётчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 58–65.
  8. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37-43.
  9. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. №12. С. 28.
  10. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247–254.
  11. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.