

Вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы под действием нагрузки в середине пролета

УДК 624.031

Астахов Сергей Владимирович

канд. тех. наук, старший преподаватель кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин» ФГБОУ ВПО Национальный исследовательский университет «МЭИ», член Национального комитета России по теоретической и прикладной механике; 111250 (г. Москва, ул. Красноказарменная, 14); e-mail: nccl@mail.ru

Аннотация: Выведены формулы для прогиба плоской статически определимой фермы. Усилия в стержнях фермы находятся методом вырезания узлов в системе компьютерной математики Maple. Для вычисления прогиба применяется формула Максвелла – Мора. Обобщение решений на произвольное число панелей выполняется методом индукции. Для решения рекуррентных уравнений используются операторы Maple. Найдены формулы для усилий в критических стержнях и реакции опор.

Ключевые слова: Ферма, прогиб, индукция, реакции опор, формула Максвелла- Мора, Maple

THE DERIVATION OF FORMULA FOR DEFLECTION OF STATICALLY INDETERMINATE EXTERNALLY FLAT TRUSS UNDER LOAD AT MIDSPAN

Astakhov Sergey Vladimirovich

Candidate of technic science, assistant of professor of the chair "Robotics, mechatronics, dynamics and strength of machines" National research University "MPEI"; 111250 (Moscow, Krasnokazarmennaya str, 14); e-mail: nccl@mail.ru

Abstract. The derivation of the formula for deflection of the flat statically determinate trusses is given. The forces in the rods are obtained using cut nodes method in the system of computer mathematics Maple. For calculation of deflection the Maxwell – Mohr formula is used. Generalization of the solutions for an arbitrary number of panels is performed by the method of induction. For the solution of recurrent equations the operators of Maple are used. The formulas for forces in the critical rods and the supports reaction are obtained.

Keywords: Truss, deflection, induction, supports reaction, Maxwell- Mohr' formula, Maple

Выведем формулу зависимости прогиба фермы (рис. 1) от ее размеров, нагрузки и числа панелей. Особенность рассматриваемой фермы состоит в ее внешней статической неопределимости. В ферме четыре внешние связи, реакции которых можно найти только из рассмотрения всей системы уравнений равновесия узлов конструкции. В ферме m панелей в боковых частях и $2n$

панелей в ригеле. Всего в ферме с крестообразной решеткой $N= 8(m+n)$ стержней и $4(m+n)$ узлов.

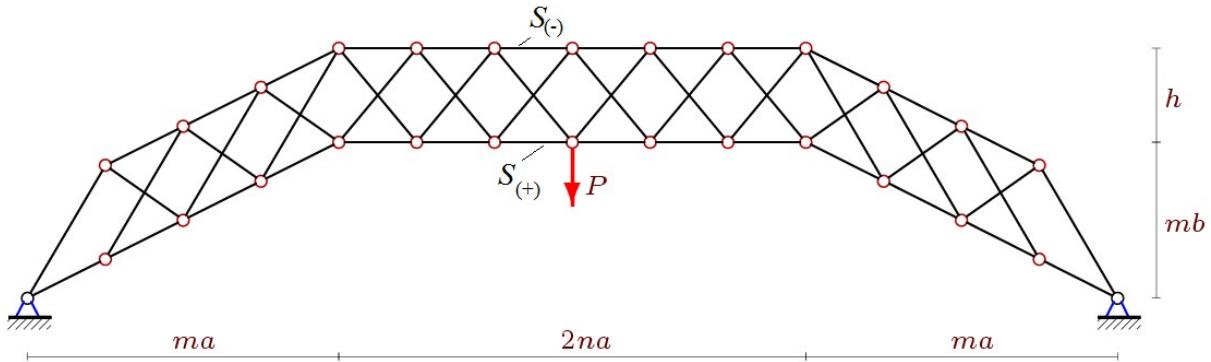


Рис.1. Ферма при $n=3, m=4$

Опишем алгоритм вывода формулы для прогиба фермы под действием вертикальной силы в середине пролета. Согласно формуле Максвелла - Мора

$$EF\Delta = P \sum_{i=1}^{N-4} S_i^2 l_i ,$$

для определения прогиба необходимо знать усилия S_i от действия единичной внешней нагрузки. Здесь обозначено: l_i — длины стержней, EF — жесткость стержней. Жесткость в первом приближении принимается одинаковой для всех стержней. Усилия рассчитываем по программе [1] методом вырезания узлов. Программа написана на языке символьной математики Maple и позволяет получать решение, как в символьном, так и в численном виде. Отметим только, что символьные преобразования в этой системе выполняются значительно медленней. При большом числе стержней скорость преобразований падает настолько, что получить непосредственно аналитическое решение для ферм с 30-40 панелями практически не реально даже на достаточно мощных компьютерах. Единственный известный метод для получения решения — метод индукции, развитый в [2-21] для плоских и в [22-26] для пространственных систем. В [27-29] для получения линий влияния применялся метод двойной индукции, т.е. индукции в два этапа. Сначала для системы, обладающей двумя независимыми натуральными параметрами, задающими геометрию фермы, проводится индукция по одному параметру при

фиксированном другом и выводится формула, в которой второй параметр задан, затем по серии таких решений для разных последовательно увеличивающихся вторых параметрах находится формула, обобщающая серию формул, полученных индукцией по первому параметру.

Координаты узлов зададим в циклах. Расположим начало координат в левой опоре. Ввод выглядит так:

```
> for i to m do y[i]:=(i-1)*b: y[i+m+2*n+1]:=m*b-(i-1)*b-
b: od:
> for i to 2*n+1 do y[i+m]:=m*b; od:
> for i to r do x[i]:=(i-1)*a: od:
> for i to r-2 do
> x[i+r]:=i*a: y[i+r]:=y[i+1]+h;
> od:
```

Здесь обозначено $r:=2*m+2*n+1$. Решетка фермы задается специальными векторами q , соответствующими стержням, и содержат номера концов этих стержней:

```
> for i to r-1 do q[i]:=[i,i+1];od:
> for i to r-3 do q[i+r-1]:=[i+r,i+1+r]; od:
> for i to m do
  q[i+2*r-4]:=[i,i+r];
  q[i+2*r-4+m]:=[i+2*n+m+1,i+3*m+4*n];
od:
> for i to m-1 do
  q[i+2*r-4+2*m]:=[i+2,i+r];
  q[i+2*r-5+3*m]:=[i+2*n+m,i+3*m+4*n+1];
od:
> for i to 2*n do
> q[i+2*r-5+4*m-1]:=[i+m,i+3*m+2*n+1];
> q[i+2*r-5+4*m-1+2*n]:=[i+m+1,i+3*m+2*n];
```

> od:

Далее составляется система уравнений равновесия методом вырезания узлов. Элементами матрицы являются направляющие косинусы стержней. В нечетные строки матрицы записаны косинусы с горизонтальной осью x , в четные – косинусы с осью y . В правой части системы содержатся компоненты внешней нагрузки.

Пусть $h=b$, $m=2$. Результаты расчетов показывают, что формула для прогиба имеет один и тот же вид при всех n

$$EF\Delta = P(A_n a^3 + C_n c^3 + U_n u^3) / (8h^2), \quad (1)$$

где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $u = \sqrt{a^2 + (b+h)^2}$ — длины раскосов. Расчет 16 ферм дает следующую последовательность коэффициентов при a^3 : 18, 16, 148, 128, 518, 464, 1256, 1152, 2490, 2320, 4348, 4096, 6958, 6608. Воспользуемся оператором системы Maple `rgf_findrecur` из пакета `genfunc`. Этот оператор возвращает рекуррентное уравнение, которому удовлетворяют члены последовательности:

$$A_n = A_{n-1} + 3A_{n-2} - 3A_{n-3} - 3A_{n-4} + 3A_{n-5} + A_{n-6} - A_{n-7}.$$

С помощью оператора `rsolve` найдем решение:

$$A_n = 8n^3 / 3 + (1 - 5(-1)^n)n^2 - (-1)^n n / 2 + 35n / 6 - 3((-1)^n / 2 - 1) / 2.$$

Аналогично получаем и другие коэффициенты

$$C_n = 4n + 2(-1)^n + 6, U_n = (1 - (-1)^n) / 2.$$

Рекуррентные уравнения для этих коэффициентов оказались намного проще, а необходимая для выявления закономерности длина последовательности меньше. Проверкой решения является численный счёт по этой же программе в численной (значительно более быстрой) моде. Полученное решение легко обобщить на случай разных жесткостей стержней. Так, если жесткость стержней длиной a обозначить $EF_1 = k_1 EF$, жесткость

стержней длиной с $EF_2 = k_2 EF$, а раскосов длиной u $EF_3 = k_3 EF$, то искомая формула приобретает вид

$$EF\Delta = P(A_n a^3 / k_1 + C_n c^3 / k_2 + U_n u^3 / k_3) / (8h^2).$$

Кривые полученного решения (рис. 2) при фиксированной длине пролета $L=2an=100$ м показывают, что решение заметно зависит от четности числа панелей. Обозначен безразмерный прогиб $\Delta' = \Delta EF / (PL)$. С увеличением числа панелей прогиб немонотонно растет. Имеется наклонная асимптота, тангенс угла которой дает следующий предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = b / 2$.

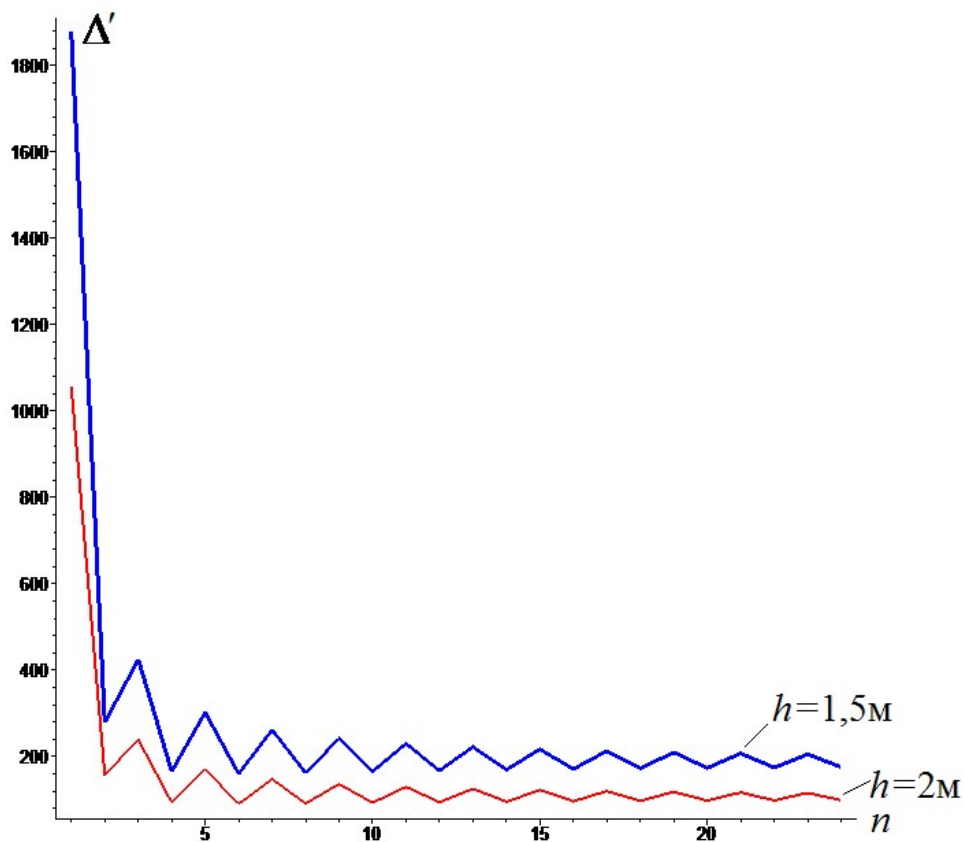


Рис.3. Зависимость прогиба от числа панелей, $L=100$ м

С увеличением высоты фермы прогиб естественным образом уменьшается (рис.4). Зависимость эта оказывается плавной, без экстремумов и асимптот.

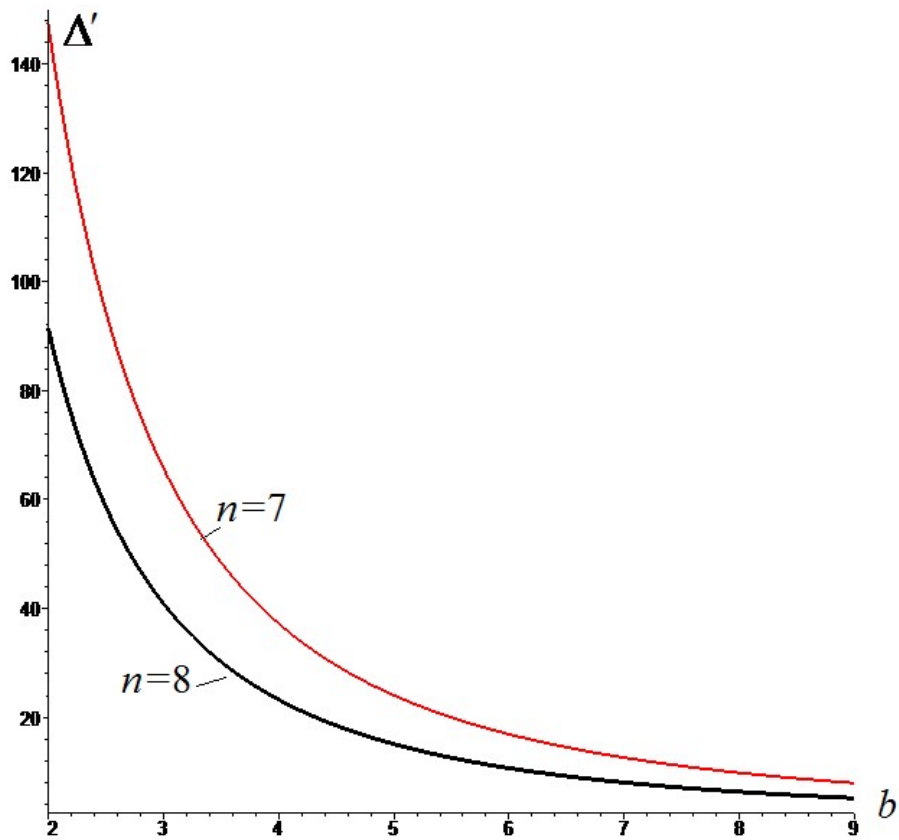


Рис.4. Прогиба фермы как функция высоты b при $L=100\text{м}$

Для расчета фермы на устойчивость и прочность стержней необходимо знать усилия в наиболее растянутых и сжатых элементах. В данной конструкции это средние стержни в нижнем и верхнем поясе. Методом индукции обработкой результатов всего 8 ферм получим выражение для усилия в сжатом стержне (рис. 1)

$$S_{(-)} = -P (2n + 1 - (-1)^n) a / (4b).$$

Усилие в наиболее растянутом стержне

$$S_{(+)} = P(4n - 5 - 3(-1)^n) a / (8b).$$

Заметим, что методом сечений эти усилия найти нельзя. Аналогично находим горизонтальную составляющую реакции опоры

$$X = P(3 + (-1)^n) a / (8b).$$

Вертикальная составляющая очевидно равна $P/2$. Аналитические обзоры решений для прогиба плоских статически определимых ферм методом индукции по программе [1] приведены в [30,31].

Список цитируемой литературы

1. Кирсанов М.Н. Задачи по теоретической механике с решениями в Maple 11 -М.: Физматлит, 2010. -264 с.
2. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы//Строительная механика и расчет сооружений. 2017. 2(271). С. 4-10.
3. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой// Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3. С. 7-11.
4. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа// Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58–65. doi: 10.5862/МСЕ.57.
5. Кирсанов М.Н. Аналитическое моделирование нагружения балочной фермы регулярного типа//Вестник МЭИ. 2016. № 6. С. 108-112.
6. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой//Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7-12. 12
7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с увеличенным подферменным пространством//Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 5 (262). С. 21-25.
8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет, предельный и сравнительный анализ плоской балочной фермы//Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2015. № 3 (39). С. 86-93.
9. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа «Butterfly»//Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 2-5.
10. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба решетчатой фермы от числа панелей//Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 4 (44). С. 150-157.
11. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы//Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61-68.
12. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы//Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
13. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы//Строительная механика и расчет сооружений. 2017. 2(271). С. 4-10.
14. Кирсанов М.Н. Точное решение задачи о прогибе балочной фермы с произвольным числом панелей в системе Maple// Строительство: наука и образование. 2017. Том 7. Выпуск 1 (22). Ст. 1. Режим доступа: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2017.1.1
15. Salimov M. S. The formula for deflection of a composite truss, loaded on the bottom flange//Научн альманах. 2017. N 2-3(28). С. 272-274. DOI: 10.17117/na.2017.02.03.272
16. Smirnova A. A., Rakhmatulina A.R. Analytical calculation of the displacement of the truss support//Научн альманах. 2017. N 2-3(28). С. 275-278. DOI: 10.17117/na.2017.02.03.275
17. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels//Научный альманах. 2017. N 2-3(28). С. 268-271. DOI: 10.17117/na.2017.02.03.268

18. Voropai R.A., Kazmiruk I.Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss//Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). Pp. 10-12.
19. Voropai R. A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice. Научный альманах. 2016. N 4-3(18). С.238-240. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.238
20. Ponomareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load //Научный альманах. 2016. N 4-3(18). С.257-259.
21. Bolotina T. D.The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels//Вестник научных конференций. 2016. № 4-3(8). P.7-8
22. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы //Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 2 (101). С. 165–171.
23. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы пространственного покрытия с крестообразной решеткой//Инженерно-строительный журнал. 2016. № 4 (64). С. 52-58. 2
24. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы//Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
25. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.
26. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость//Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3. С. 48-51.
27. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels//Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
28. Al-Shahrabi A.M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss//Вестник научных конференций. 2016. № 2-1 (6). С. 6-7.
29. Jiang H., Kirsanov M.N. An analytical expression for the influence line of the truss//Вестник научных конференций. 2016. № 1-5 (5). С. 10-11. 25
30. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
31. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.

References

1. Kirsanov M.N. Zadachi po teoreticheskoy mekhanike s resheniyami v Maple 11 [Tasks in theoretical mechanics with solutions in Maple 11] Moscow. Fizmatlit, 2010. 264 p.
2. Kirsanov M.N., Maslov A.N. Formuly dlya rascheta progiba balochnoj mnogoresetchatoj fermy [The formula for calculation of the deflection of multiple lattice beam truss] Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2017. 2(271). pp. 4-10.
3. Kirsanov M.N. Analiticheskij raschet balochnoj fermy so slozhnoj reshetkoj [Analytical calculation of the girder, with a complex lattice] Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2015. № 3. pp. 7-11.
4. Kirsanov M.N. Analiz progiba resetchatoj balochnoj fermy raspornogo tipa [Analysis of the deflection of the lattice girder, the spacer type] Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2015. №5(57). pp. 58–65. doi: 10.5862/MCE.57.
5. Kirsanov M. N. Analiticheskoe modelirovanie nagruzheniya balochnoj fermy regul'yarnogo tipa [Analytical modeling of loading a truss, a regular type]/MPEI Vestnik. 2016. No. 6. pp. 108-112.

6. Kirsanov M. N. Analiticheskij raschet balochnoj fermy so slozhnoj reshetkoj [Analytical calculation of the truss, with a complex grille] *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij*. 2015. No. 3 (260). pp. 7-12.
7. Kirsanov M. N. Analiticheskij raschet balochnoj fermy s uvelichennym podfermennym prostranstvom [Analytical calculation of the trusses with increased poltermann space] *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij*. 2015. No. 5 (262). pp. 21-25.
8. Kirsanov M. N. Analiticheskij raschet, predel'nyj i sravnitel'nyj analiz ploskoj balochnoj fermy [Analytical calculation of the marginal and comparative analysis of the flat truss beam] *Nauchnyj vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Stroitel'stvo i arhitektura*. 2015. No. 3 (39). pp. 86-93.
9. Kirsanov M. N. Analiticheskij raschet balochnoj fermy s reshetkoj tipa «Butterfly» [Analytical calculation of the truss, with a lattice of type "Butterfly"] *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij*. 2016. No. 4 (267). pp. 2-5.
10. Kirsanov M. N. Zavisimost' progiba reshetchatoj fermy ot chisla panelej [The dependence of the deflection of the trusses of the number of panels] *Nauchnyj vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Stroitel'stvo i arhitektura*. 2016. No. 4 (44). pp. 150-157.
11. Kirsanov M. N. Sticheskiy analiz i montazhnaya skhema ploskoj fermy [Static analysis and wiring diagram flat truss] *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova*. 2016. No. 5 (39). pp. 61-68.
12. Kirsanov M. N. Sravnitel'nyj analiz zhestkosti dvuh skhem arochnoj fermy [Comparative analysis of rigidity of the schemes arch truss] *Stroitel'stvo unikal'nyh zdaniy i sooruzhenij*. 2015. No. 9 (36). pp. 44-55.
13. Kirsanov M. N., Maslov A. N. Formuly dlya rascheta progiba balochnoj mnogoreshetchatoj fermy [The formula for calculating the deflection of beam mnogoyazychnoi truss]// *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij*. 2017. 2(271). pp. 4-10.
14. Kirsanov M. N. Tochnoe reshenie zadachi o progibe balochnoj fermy s proizvol'nym chislom panelej v sisteme Maple [The exact solution of the problem of deflection of a truss with an arbitrary number of panels in the system Maple] *Stroitel'stvo: nauka i obrazovanie*. 2017. Volume 7. Issue 1 (22). St. 1. Mode of access: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2017.1.1
15. Salimov M. S. The formula for deflection of a composite truss, loaded on the bottom flange. *Science Almanac*. 2017. N 2-3(28). pp. 272-274. DOI: 10.17117/na.2017.02.03.272
16. Smirnova A. A., Rakhmatulina A.R. Analytical calculation of the displacement of the truss support. *Science Almanac*. 2017. N 2-3(28). pp. 275-278. DOI: 10.17117/na.2017.02.03.275
17. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels. *Science Almanac*. 2017. N 2-3(28). pp. 268-271. DOI: 10.17117/na.2017.02.03.268
18. Voropai R.A., Kazmiruk I.Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss. *Bulletin of Scientific Conferences*. 2016. № 2-1(6). pp. 10-12.
19. Voropai R. A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice. *Science Almanac*. 2016. N 4-3(18). pp.238-240. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.238
20. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load. *Science Almanac*. 2016. N 4-3(18). pp. 257-259.
21. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels. *Bulletin of Scientific Conferences*. 2016. № 4-3(8). pp. 7-8.
22. Kirsanov M. N. Analiticheskoe issledovanie zhestkosti prostranstvennoj staticheski opredelimoj fermy [An analytical study on the stiffness of statically determinate truss] *Vestnik MGSU*. 2017. Vol. 12. Vol. 2 (101). pp. 165-171.

23. Kirsanov M. N. Analiz progiba fermy prostranstvennogo pokrytiya s krestoobraznoj reshetkoj [Analysis of the deflection of the truss spatial coverage with cross bars]// Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2016. No. 4 (64). pp. 52-58. 2
24. Kirsanov M. N. Analiticheskij raschet prostranstvennoj sterzhnevoj sistemy [Analytical calculation of the spatial rod system] Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij. 2012. No. 1. pp. 49-53.
25. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.
26. Kirsanov M.N. Raschet prostranstvennoj sterzhnevoj sistemy, dopuskayushchej mgnovennuyu izmenyaemost'[The calculation of the spatial rod systems that allow the instantaneous variability] Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2012. № 3. pp. 48-51.
27. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels. Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 1-4 (5). pp. 6-7.
28. Al-Shahrabi A.M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss. Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 2-1 (6). pp. 6-7.
29. Jiang H., Kirsanov M.N. An analytical expression for the influence line of the truss. Bulletin of Scientific Conferences.. 2016. № 1-5 (5). pp. 10-11.
30. Tin'kov D.V. Sravnitel'nyj analiz analiticheskikh reshenij zadachi o progibe fermennyh konstrukcij [Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures] Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2015. №5(57). pp. 66–73.
31. Kijko L.K. Analiticheskaya ocenka progiba arochnoj fermy pod dejstviem vetrovoj nagruzki [Analytical evaluation of deflection of arched trusses under wind load] Nauchnyj vestnik. 2016. № 1 (7). pp. 247-254.