

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОГИБА БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ ПРИ РАВНОМЕРНОМ ЗАГРУЖЕНИИ

Н. А.Белянкин¹, А. Ю.Бойко²

Национальный исследовательский университет “МЭИ”
Россия, г. Москва

¹Студент; e-mail: belankin2@gmail.com

²Студент; e-mail: boykoanyu@mail.ru

Симметричная статически определимая ферма с треугольной решеткой, прямолинейным верхним поясом и приподнятым в середине пролета нижним поясом равномерно загружается по узлам. Методом индукции выводятся аналитические зависимости прогиба середины пролета от числа панелей. Уравнения равновесия узлов для определения усилий в стержнях решаются в символьной форме в системе компьютерной математики Maple. Используется формула Максвелла - Мора и аппарат составления и решения рекуррентных уравнений для получения общего решения.

Ключевые слова: ферма, прогиб, формула Максвелла-Мора, Maple

Введение

Альтернативой общепринятому численному методу расчета ферм является метод аналитический. Актуальность аналитических формул для расчета строительных конструкций определяется с одной стороны их простотой, а с другой — числом независимых параметров конкретной задачи. Формулы для расчета конструкции с фиксированным числом узлов, в которые входят только размеры, величина нагрузки определенного вида и характеристики свойств материала, получаются в известных системах компьютерной математики (Maple, Maxima, Mathematica, Derive, Reduce) достаточно просто, но особой ценности они не имеют.

Существенно расширяет область применения расчетных формул для регулярных ферм, обладающих некоторой периодичностью структуры, такой параметр (или параметры) как число ячеек периодичности, или в частности, число панелей.

В работах [1-12] в системе Maple с использованием метода индукции найдены аналитические решения для арочных ферм. Решения задач о прогибе решетчатых ферм получены в работах [13-21]. Метод индукции применен при анализе пространственных конструкций [22-29] и для внешне неопределимых ферм [30,31]. Известны также формулы для частот и коэффициентов частотных уравнений задачи о колебании груза на ферме с произвольным числом панелей [32-34], полученные методом индукции в системе Maple.

Расчет

Рассмотрим ферму, высота которой в средней части пролета h , а по краям $2h$ (рис. 1). Ферма с $2n$ панелями (считаются по верхнему поясу) содержит $m = 8n+6$ стержней.

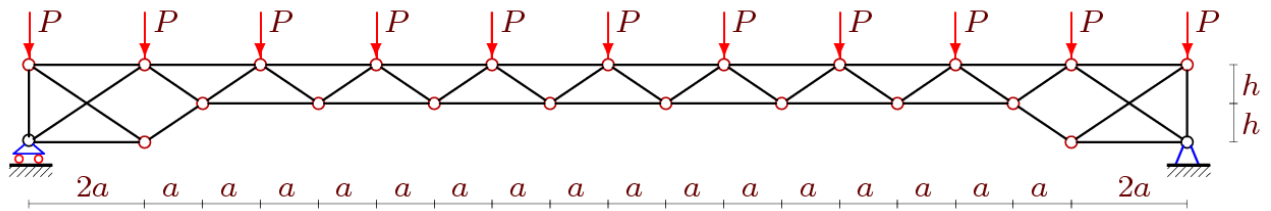


Рис. 1. Ферма при $n = 5$

Решение задачи о выводе аналитической зависимости прогиба от числа панелей начинается с определения усилий в стержнях. В [35] разработана Maple-программа, основанная на методе вырезания узлов и составления матрицы уравнений равновесия всех узлов, дающая решение задачи об усилиях в символьной форме. В программу вводятся координаты узлов, порядок соединения стержней и узлов (рис. 2).

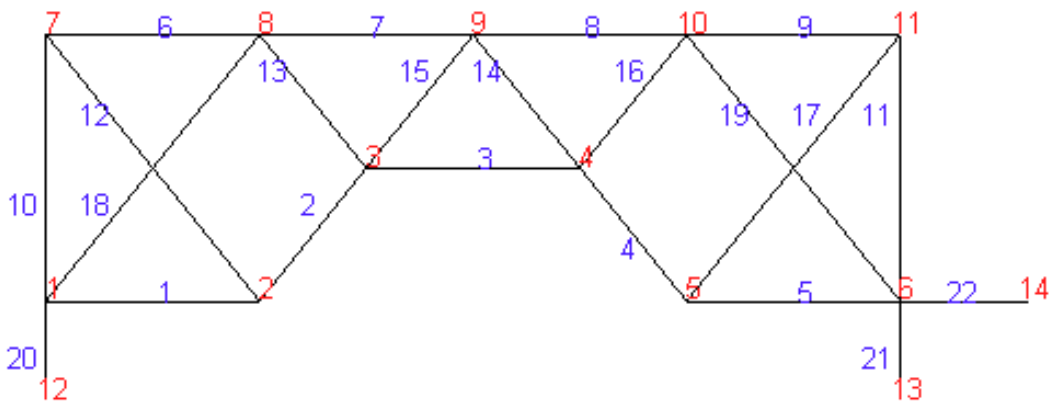


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней фермы, $n=2$

Смещение вычисляется по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} S_i s_i l_i / (EF),$$

где s_i — усилия в стержнях фермы от действия единичной нагрузки, приложенной к узлу с номером $3n-3$ в середине верхнего пояса, S_i — усилия от внешней нагрузки, распределенной по узлам верхнего (рис. 1) или нижнего (рис. 3) пояса, l_i — длины стержней, EF — жесткость стержней, принятая одинаковой для всех стержней конструкции. Три опорные стержня, усилия которых также входят в систему уравнений равновесия узлов, приняты недеформируемыми, поэтому суммирование ведется до $m-3$.

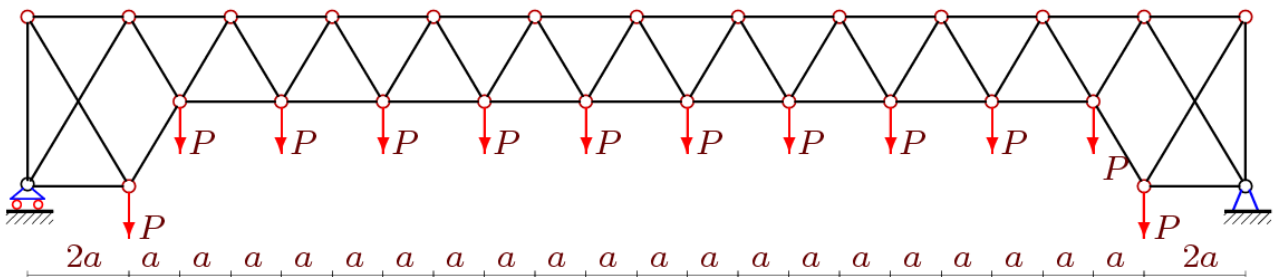


Рис. 3. Ферма при $n = 6$. Нагружен нижний пояс

На основе анализ решения задачи о прогибе ферм с различным числом панелей получено следующее выражение для прогиба

$$EF\Delta = P(A_n a^3 + C_n c^3 + H_n h^3) / h^2, \quad (1)$$

где $c = \sqrt{h^2 + a^2}$.

Рассчитаем коэффициенты в (1) от нагрузки по нижнему поясу при нагрузке от 2-го узла, до узла с номером $2n + 1$ (рис.2, рис. 3). Методом индукции получено

$$\begin{aligned} A_n &= (10n^4 + 14n^2 - 24) / 3, \\ C_n &= n^2 + 12n - 6, \\ H_n &= 2n - 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Для получения этих зависимостей из решений для ферм с числом панелей от 1 до 14 были выявлены последовательности коэффициентов перед кубами линейных размеров a , c и h :

- Для размера a : 564, 304, 920, 2192, 4480, 8224, 13944, 22240, 33792, 49360, 69784, 95984, 128960, 169792;
- Для размера c : 22, 39, 58, 79, 102, 127, 154, 183, 214, 247, 282, 319, 358, 399;
- Для размера h : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28.

Для последовательностей меньшей длины закономерность найти не удастся. Оператор **rgf_findrecur** из пакета **genfunc** системы Maple по этим данным дал однородное линейное рекуррентное уравнение пятого порядка, которому удовлетворяют члены последовательностей:

$$A_n = 5A_{n-1} - 10A_{n-2} + 10A_{n-3} - 5A_{n-4} + A_{n-5}. \quad (3)$$

Аналогично, получены уравнения меньшего порядка и для коэффициентов C_n и H_n :

$$\begin{aligned} C_n &= 3C_{n-1} - 3C_{n-2} + C_{n-3}, \\ H_n &= 2H_{n-1} - H_{n-2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Решения (2) этих уравнений получены при помощи оператора **rsolve** с соответствующими начальными данными. Приведем соответствующий фрагмент программы на языке Maple

```
> Nmax:=15;
  n:='n':with(genfunc);
> S:=seq(C3[i],i=2.. Nmax);
  NN:=nops([S])/2;
  Z:=rgf_findrecur(NN, [S], t,n);
      2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28
      7
      t(n) = 2 t(n - 1) - t(n - 2)
> ZZ:=simplify(rsolve({Z,seq(t(i+1)=S[i],i=1..NN)},t));
collect(ZZ,n);
      2 n - 2
```

2. Рассчитаем коэффициенты в решении (1) от нагрузки по *верхнему* поясу (рис.1).

Методом индукции при нагрузке в узлах фермы с порядковыми номерами от $2n+3$ до $4n+3$ получены следующие формулы:

$$A_n = (10n^4 - n^2)/3,$$

$$C_n = n^2 + 12n - 7,$$

$$H_n = 2n - 3.$$

Для этого из решений для ферм с числом панелей от 1 до 14 были выявлены последовательности коэффициентов перед кубами линейных размеров a , c и h :

- Для размера a : 52, 267, 848, 2075, 4308, 7987, 13632, 21843, 33300, 48763, 69072, 95147, 127988, 168675;
- Для размера c : 21, 38, 57, 78, 101, 126, 153, 182, 213, 246, 281, 318, 357, 398;
- Для размера h : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27.

Оператор **rgf_findrecur** из пакета **genfunc** системы Maple по этим данным дал те же рекуррентные уравнения (3), (4), которым удовлетворяют члены последовательностей.

Отметим, что в данном случае общая формула (1) расчета прогиба также не изменилась.

График зависимости прогиба фермы от числа панелей в данном случае при $a = L/(4n)$, $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$, $P_0 = P(2n+1)$ представлен на рис. 4.

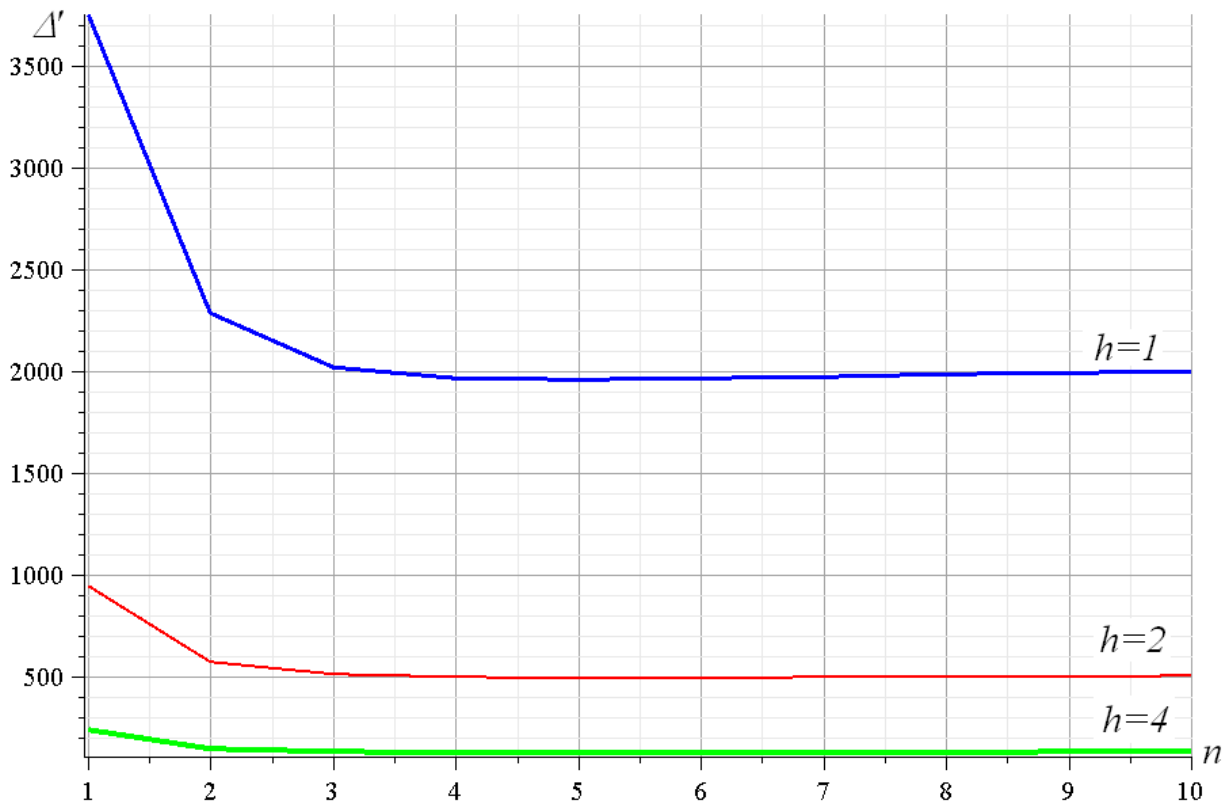


Рис. 4. Нагрузка по верхнему поясу. Зависимость прогиба от числа панелей, $L=100$ м

Ход кривых подсказывает наличие наклонной асимптоты. Действительно, в принятой постановке (фиксирован пролет и общая нагрузка), имеем следующий предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta / n) = h / (2L).$$

Отсюда можно сделать вывод, что кривые при некотором значении числа n имеют минимум. Заметно, что в данном примере эта точка приходится на $n=4$. Это соответствует длине панели $a = 100/16 = 6,25$ м.

Решение, полученное для стержней одинаковой жесткости, легко обобщить на случай, когда стержни разных длин имеют разные жесткости. Например, если горизонтальные стержни поясов длиной $2a$ имеют жесткость $\gamma_a EF$, боковые стойки высотой $2h$ жесткость $\gamma_h EF$, а раскосы длиной c и $2c$ жесткость $\gamma_c EF$, где $\gamma_a, \gamma_h, \gamma_c$ — безразмерные коэффициенты, то решение (1) будет иметь вид

$$EF\Delta = P(A_n a^3 / \gamma_a + C_n c^3 / \gamma_c + H_n h^3 / \gamma_h) / h^2.$$

Выводы

Получены достаточно простые формулы, позволяющие оценивать деформативность предложенной схемы фермы. Сам алгоритм может быть перенастроен и на другие нагрузки. Пользуясь линейностью задачи по нагрузкам можно получить аналитические решения для достаточно широкого класса задач. Особенно эффективно полученное решение при большом числе панелей в ферме, т.е. в тех случаях, когда при численном решении системы уравнений большой размерности возникают трудности преодоления «проклятия размерности», связанного с неизбежным накоплением погрешностей счета.

Обзор работ, использующих метод индукции для вывода аналитических зависимостей для плоских ферм, дан в [12, 36, 37].

Библиографический список

1. Бирбасов А. А. Аналитический расчет прогиба плоской арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу // Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 198-201.
2. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
3. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
4. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
5. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
6. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
7. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
8. Компанеец К. А. Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосной фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. №4. С.108.
9. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосной фермы, нагруженной по верхнему поясу // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.

10. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12 (26). С. 74.
11. Voropay R.A., Domanov E.V. The derivation of the general formula for the shift of the movable support of arch type truss using the method of induction on two parameters in the system Maple // Постулат. 2019. №2. С. 11.
12. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 12–33.
13. Кирсанов М.Н. Статический расчет плоской фермы с двойной треугольной решеткой // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2017. № 11 (248). С. 32-36.
14. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 10. С. 24-27.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7-12.
16. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. № 7. С. 15-18.
17. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 3. С. 23-27.
18. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 2-6.
19. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа "Butterfly" // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 2-5.
20. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. № 5. С. 11-13.
21. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Analytical calculation and analysis of planar springel truss // Строительная механика и конструкции. 2018. № 2 (17). С. 72-79.
22. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
23. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49а-53.
24. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
25. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
26. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5-8.
27. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6 (24). С. 28-34.
28. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3 (242). С. 48-51.
29. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // В сборнике: Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014 Труды международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.
30. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27-30.

31. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 3. С. 26-29.
32. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 31-34.
33. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Формулы для частоты колебания груза в произвольном узле балочной фермы // Транспортное строительство. 2018. №12. С. 21-23.
34. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитическое решение задачи о частоте колебания груза в произвольном узле балочной фермы в системе Maple // Строительство: наука и образование. 2018. Т. 8. Вып. 4. Ст. 3. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.4.3
35. Кирсанов М.Н. Решебник. Теоретическая механика. Москва, 2008.
36. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12. С. 28.
37. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66-73.

References

1. Birbasov A. A. Analytical calculation of the deflection of a flat arched truss, loaded on the upper belt. Scientific Almanac. 2016. № 6-2 (19). Pp. 198-201.
2. Kirsanov M.N. Analytical study of deformations of a flat arch type truss. Bulletin of the State University of Marine and River Fleet. Admiral S.O. Makarova. 2015. № 3 (31). Pp. 42-48.
3. Kirsanov M.N. Analytical assessment of the deflection and effort in the critical rods of the arched truss. Transport Construction. 2017. No. 9. P. 8-10.
4. Kirsanov M.N. Formulas for calculating the deflection of an arched truss. Construction mechanics and structures. 2018. Т. 1. No. 16. S. 7-11.
5. Kirsanov M.N. Comparative analysis of the rigidity of two arched truss schemes. Construction of unique buildings and structures. 2015. № 9 (36). Pp. 44-55.
6. Kirsanov M.N. Inductive analysis of deformation of an arched truss. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Vol. 14. No. 1. P. 64-70.
7. Kirsanov M.N., Stepanov A.S. On the dependence of the deformations of a flat arched truss on the number of panels. Construction mechanics and the calculation of structures. 2017. No. 5 (274). Pp. 9-14.
8. Kompaneets K. A. Calculation of the displacement of the movable support of a flat arched diagonal truss with a load in the middle of the span. Youth and Science. 2017. №4. P.108.
9. A. Savinykh. C. Analysis of the trough of an arched braced truss loaded on the upper belt.. Construction and architecture. 2017. Volume 5. Issue 3 (6). Pp. 12-17.
10. Tinkov D.V. Calculation of the deflection of a flat arched truss with a cruciform grille. Postulate. 2017. No. 12 (26). P. 74.
11. Voropay R.A., Domanov E.V. This is an example of a truss using a modular map.. Postulate. 2019. №2. P. 11.
12. Osadchenko N.V. Analytical solutions of problems on the deflection of planar trusses of arch type. *Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii* [Structural Mechanics and Structures], 2018, vol. 1. no.16. pp. 12–33.
13. Kirsanov M.N. Static calculation of a flat truss with a double triangular lattice. Reference book. Engineering journal with the application. 2017. № 11 (248). Pp. 32-36.
14. Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of a flat lattice truss on the number of panels. Mechanization of construction. 2017. Т. 78. № 10. P. 24-27.
15. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a girder truss with a complex lattice. Construction mechanics and structure calculation. 2015. № 3 (260). Pp. 7-12.

16. Kirsanov M.N. Calculation of the deflection of a flat lattice truss with four supports. *Transport Construction*. 2017. No. 7. P. 15-18.
17. Kirsanov M.N. To the choice of the lattice girder truss. *Construction mechanics of engineering structures and structures*. 2017. No. 3. P. 23-27.
18. Kirsanov M.N. Analytical calculation of multi-lattice trusses. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2014. No. 6 (257). Pp. 2-6.
19. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a girder truss with a lattice of the "Butterfly" type. *Construction mechanics and structure calculation*. 2016. No. 4 (267). Pp. 2-5.
20. Kirsanov M.N. Analytical method for calculating the deflection of a flat truss with a complex truss-type grid // *Transport Construction*. 2017. No. 5. P. 11-13.
21. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Analytical calculation and analysis of planar springel truss // *Structural mechanics and structures*. 2018. No. 2 (17). Pp. 72-79.
22. Kirsanov M.N. Analytical calculation of the deflection of a spatial rectangular coating // *Vestnik MGSU*. 2018. T. 13. No. 5 (116). Pp. 579-586.
23. Kirsanov M.N. Analytical calculation of the spatial core system // *Construction mechanics of engineering structures and structures*. 2012. № 1. S. 49a-53.
24. Kirsanov M.N. Stress state and deformations of a rectangular spatial core coating // *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and architecture*. 2016. № 1 (41). P. 93-100.
25. Kirsanov M.N. Assessment of the deflection and stability of the spatial beam truss. *Construction mechanics and the calculation of structures*. 2016. No. 5 (268). Pp. 19-22.
26. Kirsanov M.N. Analytical calculation and optimization of the spatial beam truss. *Bulletin of the Moscow Power Engineering Institute*. 2012. № 5. S. 5-8.
27. Kirsanov M.N. Static calculation and analysis of the spatial core system. *Engineering and Construction Journal*. 2011. No. 6 (24). Pp. 28-34.
28. Kirsanov M.N. Calculation of a spatial core system that allows instant variability. *Construction mechanics and structure calculation*. 2012. № 3 (242). Pp. 48-51.
29. Leonov P.G., Kirsanov M.N. Analytical calculation and analysis of the spatial core structure in the Maple system. In the collection: *Informatization of engineering education INFORINO-2014 Proceedings of the international scientific-methodical conference*. 2014. p. 239-242.
30. Kirsanov M.N. Derivation of a formula for deflection of a lattice truss with cases of kinematic variability. *Construction mechanics and structures*. 2017. V. 1. No. 14. P. 27-30.
31. Kirsanov M.N. Analytical calculation of the deflection of the expansion truss with an arbitrary number of panels. *Mechanization of construction*. 2017. T. 78. № 3. S. 26-29.
32. Kanatov M.I. Frequency equation and vibration analysis of a flat beam truss. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. M: Infra-M. 2015. V. 1. S. 31-34.
33. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Formulas for the frequency of oscillation of cargo in an arbitrary node of a girder truss. *Transport Construction*. 2018. №12. Pp. 21-23.
34. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analytical solution of the problem of the frequency of oscillation of the load in an arbitrary node of a beam truss in the Maple system. *Construction: science and education*. 2018. T. 8. Vol. 4. Art. 3. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227 / 2305-5502.2018.4.3
35. Kirsanov M.N. *Reshebnik. Theoretical mechanics*. Moscow, 2008.
36. N. Osadchenko. Calculation of the deflection of a flat continuous statically definable truss with two spans. *Postulate*. 2017. No. 12. P. 28.
37. Tinkov D.V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures. *Engineering and Construction Journal*. 2015. №5 (57). Pp. 66-73.

FORMULA FOR DEFLECTION OF A GIRDER WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS UNDER THE UNIFORM LOAD

N. A. Belyankin¹, A. Y. Boyko²

National Research University “MPEI”,
Russia, Moscow

¹Student; e-mail: belankin2@gmail.com

² Student; e-mail: boykoanyu@mail.ru

Symmetric statically definable truss with a triangular lattice with a rectilinear upper belt and a lower belt raised in the middle of the span is evenly loaded over the nodes. The induction method is used to derive analytical dependencies of the mid-span deflection on the number of panels. Equilibrium equations of nodes for determining the forces in the rods are solved in symbolic form in the Maple computer math system. The Maxwell-Mohr formula and the apparatus for compiling and solving recurrent equations are used to obtain a general solution.

Keywords: Truss, deflection, Maxwell-Mohr formula, Maple