

ВЫВОД ФОРМУЛ ЗАВИСИМОСТИ ПРОГИБА ПЛОСКОЙ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВОЙ РАМЫ ОТ ЧИСЛА ПАНЕЛЕЙ В СИСТЕМЕ СИМВОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE

А. Ю. Бойко¹, Г. Н. Ткачук²

Национальный исследовательский университет "МЭИ"¹

Московский Физико-Технический Институт²

Россия, г. Москва

¹Студент; e-mail: boykoanyu@mail.ru

²Студент; e-mail: geoyukos@yandex.ru

Симметричная внешне статически неопределимая ферма решетчатого типа с прямолинейным верхним поясом и опущенным в середине пролета нижним поясом загружается вертикальной силой в центре или равномерно по узлам верхнего пояса. С помощью метода индукции выводятся аналитические зависимости прогиба середины пролета от числа панелей по длине пролета и по высоте. Используется формула Максвелла - Мора и аппарат составления и решения рекуррентных уравнений для получения общего решения. Уравнения равновесия узлов для определения усилий в стержнях решаются в символьной форме в системе компьютерной математики Maple. Выявлена квадратичная по числу панелей асимптотика решения.

Ключевые слова: Ферма, прогиб, формула Максвелла-Мора, Maple

Введение

Расчет строительных конструкций в настоящее время производится в основном численно [1-4] с использованием различных программ, основанных, как правило, на методе конечных элементов. С развитием простых и доступных систем компьютерной математики (Maple, Mathematica, Derive, Reduce и др.) появилась возможность получения аналитических решений для строительных конструкций. Особенно эффективны такие решения для регулярных статически определимых систем. В 2005г. Хатчинсон и Флек объявили "охоту" на схемы статически определимых регулярных ферм [5,6]. Такие фермы допускают аналитические решения задачи о деформации под действием различных (также регулярных) нагрузок, в которые помимо размеров и величин нагрузок как целочисленные параметры входят числа, определяющие порядок регулярности схем. Наибольшее число решений таких задач получено методом индукции с применением систем компьютерной математики. В [7-13] методом индукции в системе Maple получены решения для различных пространственных ферм. Аналитические расчеты различных ферм арочного типа даны в [14-21]. Метод индукции, примененный в этих решениях в сочетании с мощностью операторов системы Maple позволяет также рассчитывать такие конструкции как торсионные подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа [22], вантовые системы [23] и свайные фундаменты [24]. Метод индукции для обобщения частных решений на произвольное число панелей описан, в частности, в [25, 26]. В [27] дано решение для фермы, допускающей при определенном числе панелей кинематическую изменяемость. Расчет жесткости стержневой решетки произведен в [28]. Сравнительный анализ формул для жесткости различных решетчатых ферм выполнен в [29]. Фермы с усиленной решеткой аналитически рассчитаны в [30-34]. Внешне статически неопределимая ферма рассчитана методом индукции в [35], многорешетчатая — в [36].

Для различных плоских ферм под действием как сосредоточенных, так и распределенных нагрузок, формулы для прогиба получены в [37-40]. Метод двойной индукции (по числу панелей и по месту положения груза) применен в [41-46] для оценки собственных частот плоских ферм.

Среди всех этих задач наибольшую трудность вызывают задачи с двумя независимыми целочисленными параметрами. Если трудность задачи с одним параметром можно оценить числом N отдельных решений с конкретными последовательно увеличивающимися числами, задающими порядок регулярности (например, числами панелей в ферме балочного типа), то для двойной индукции это число равно N^2 . При этом в некоторых задачах, особенно с внешней статической неопределенностью [35], в которых реакции опор определяются не из равновесия конструкции в целом, а из совместного решения уравнений равновесия всех узлов фермы, минимальная длина идентифицируемой последовательности решений может достигать 20 и в некоторых случаях и более того. Учитывая, что аналитические преобразования или преобразования с целыми числами в системах компьютерной математики производятся значительно дольше, получение точных формульных зависимостей прогиба или усилий в стержнях от порядка системы вызывает большие трудности, связанные с затратами времени. Безусловно, в отличие от численных решений, которые необходимо проводить всякий раз, когда меняются какие-то параметры задачи, а в процессе проектирования такое бывает многократно, аналитические решения находятся один раз, а могут быть легко и без погрешностей использованы многократно. Именно к таким задачам относится рассматриваемая задача о деформации фермы, пропорции которой управляются двумя независимыми параметрами - числом условных панелей по длине пролета и по высоте фермы (рис. 1). Две особенности фермы: утолщение ригеля в середине и четыре неподвижные опоры, определяющие ее внешнюю статическую неопределенность. Утолщение ригеля может быть использовано для крепления неподвижного кранового оборудования или освещения.

Такой параметр, как число ячеек периодичности, или число панелей значительно увеличивает область использования расчетных формул для регулярных ферм, обладающих некоторой периодичностью структуры.

Расчет

Рассмотрим ферму высотой $h(m+2)$ и длиной пролета $2(n+3)a$ (рис. 1). Ферма с $2n+6$ панелями (считаются по верхнему поясу ригеля) и $m+2$ в боковых опорных частях, содержит $8(m+n)+32$ стержней, не включая опорные. К ферме приложена сосредоточенную нагрузку P в центральной части пролета.

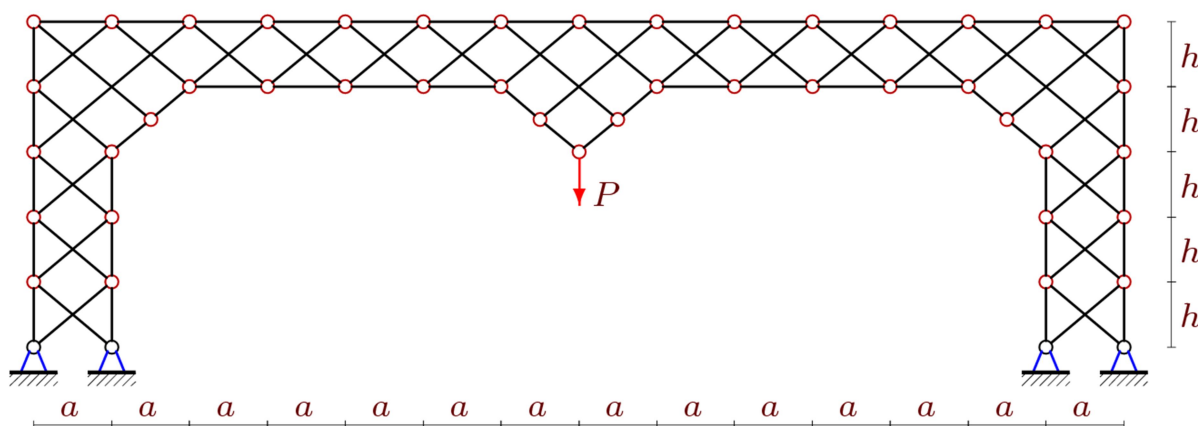


Рис. 1. Ферма при $n=4$, $m=3$

Вывод аналитической зависимости прогиба от числа панелей, иначе говоря, решение задачи, начинается с определения усилий в стержнях. В работе [47] разработана Maple-программа, основанная на методе вырезания узлов и составления матрицы уравнений равновесия всех узлов, позволяющая решить задачу об усилиях в символьной форме. В программу вводятся порядок соединения стержней и узлов и их координаты (рис. 2).

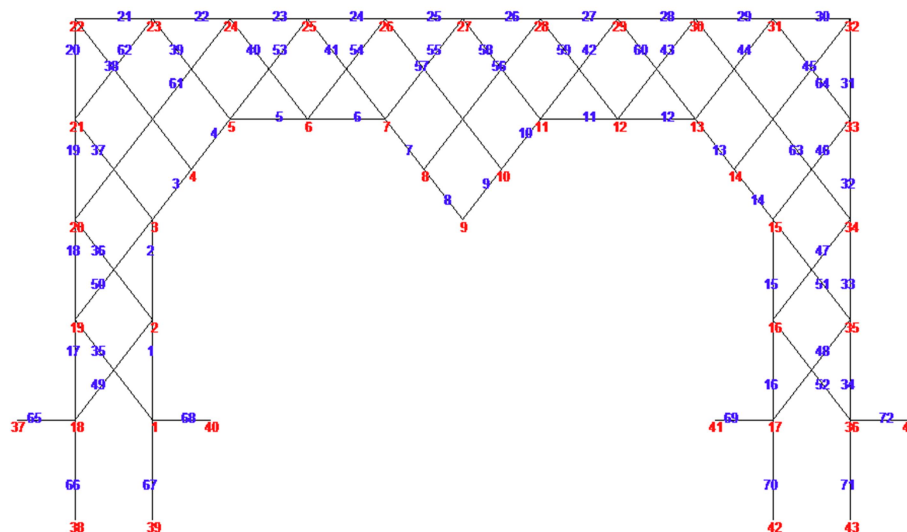


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней фермы, $n=m=2$

Смещение вычисляется по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{8m+8n+32} S_i s_i l_i / (EF),$$

где s_i — усилия в стержнях фермы от действия единичной нагрузки, приложенной к центральному узлу с номером $m+n+5$ в нижней точке утолщения, S_i — усилия от внешней нагрузки, распределенной по узлам верхнего пояса (рис. 3), l_i — длины стержней, EF — жесткость стержней, принятая одинаковой для всех стержней конструкции.

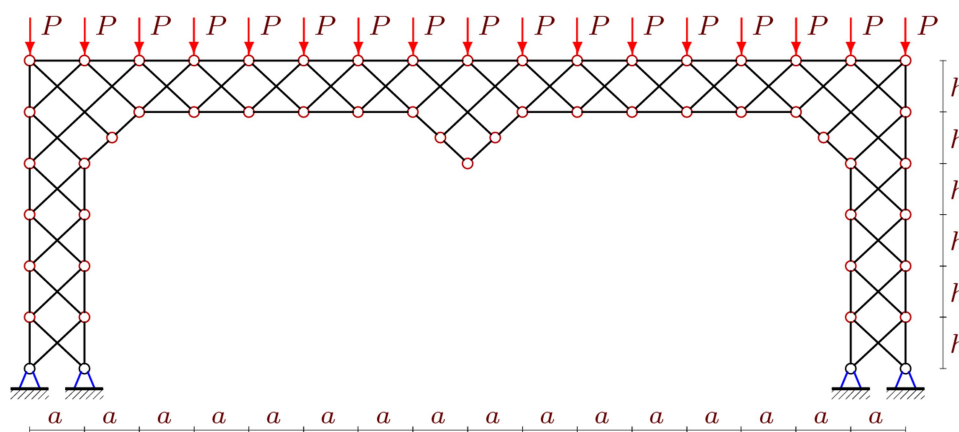


Рис. 3. Ферма при $n=5, m=4$. Нагружен верхний пояс

На основе анализа решения задачи о прогибе ферм с различным числом панелей получено следующее выражение для прогиба

$$EF\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / h^2, \quad (1)$$

где $c = \sqrt{h^2 + a^2}$.

Рассчитаем коэффициенты в (1) от нагрузки для одиночной нагрузки (рис.1). Методом двойной индукции (сначала по n , а затем по m) обобщением 14 решений были получены коэффициенты:

$$\begin{aligned} C_1 &= (2n^3 - 6n^2 - n(3(-1)^n - 7) + 3(-1)^n + 21) / 6, \\ C_2 &= (2n^2 - n(3 + (-1)^n) + 8 + 2m) / 4, \end{aligned} \quad (2)$$

$$C_3 = (4m^3 + 18m^2 + 32m + 6n^2 - 18n + 12n^2m - 12nm^2 - 36nm + 15 + 6(1-n)(-1)^n + 3(-1)^{(m+n)}) / 12.$$

Для этого с помощью оператора **rgf_findrecur** из пакета **genfunc** системы Maple были найдены и решены однородные линейные рекуррентные уравнения вида

$$C_{1(n)} = 2C_{1(n-1)} + C_{1(n-2)} - 4C_{1(n-3)} + C_{1(n-4)} + 2C_{1(n-5)} - C_{1(n-6)}. \quad (3)$$

$$C_{2(n)} = C_{2(n-1)} + 2C_{2(n-2)} - 2C_{2(n-3)} - C_{2(n-4)} + C_{2(n-5)}. \quad (4)$$

$$C_{3(n)} = C_{3(n-1)} + 2C_{3(n-2)} - 2C_{3(n-3)} - C_{3(n-4)} + C_{3(n-5)}. \quad (5)$$

Решения (2) этих уравнений получены при помощи оператора **rsolve** с соответствующими начальными данными. Приведем соответствующие фрагменты программы на языке Maple

```
>n:='n':
>S:=seq(C2[i],i=1..Nmax); # последовательность коэффициентов
>Z:=rgf_findrecur(Nmax/2,[S],t,n);# поиск уравнения
>w:=simplify(rsolve({Z,seq(t(i)=S[i],i=1..Nmax/2)},t));
>sort(w);factor(w);
>
S := 4, 4, 7, 8, 14, 16, 25, 28, 40, 44
Z := t(n) = t(n - 1) + 2 t(n - 2) - 2 t(n - 3) - t(n - 4) + t(n - 5)
>m:='m':
>S:=seq(C_2[i],i=1..10);
>Z:=rgf_findrecur(5,[S],t,m);
>c3[m]:=simplify(rsolve({Z,seq(t(i)=S[i],i=1..5)},t));
>print(m,c3[m]);
S :=  $\frac{n^2}{2} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} - \frac{3n}{4} + \frac{5}{2}, \frac{n^2}{2} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} - \frac{3n}{4} + 3, \frac{n^2}{2} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} - \frac{3n}{4} + \frac{7}{2},$ 
 $4 - \frac{3n}{4} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} + \frac{n^2}{2}, \frac{n^2}{2} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} - \frac{3n}{4} + \frac{9}{2}, \frac{n^2}{2} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} - \frac{3n}{4} + 5,$ 
 $\frac{n^2}{2} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} - \frac{3n}{4} + \frac{11}{2}, \frac{n^2}{2} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} - \frac{3n}{4} + 6,$ 
 $\frac{n^2}{2} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} - \frac{3n}{4} + \frac{13}{2}, \frac{n^2}{2} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} - \frac{3n}{4} + 7$ 
Z := t(m) = 2 t(m - 1) - t(m - 2)
```

Под временной переменной $t(n)$ или $t(m)$ подразумеваются искомые коэффициенты.

Коэффициенты в решении (1) в случае нагрузки по *верхнему* поясу (рис.3), приложенной в узлах фермы с порядковыми номерами от $3m + 2n + 12$ до $3m + 4n + 18$ имеют вид:

$$C_1 = (3n^4 + 2n^3 - 3n^2((-1)^n + 2) + 2n(3(-1)^n - 20) + 72) / 12,$$

$$C_2 = (4n^3 + n^2(3 - (-1)^n) - 4n(1 + (-1)^n) + 4nm - 2(-1)^n + 18 + 2m(5 + (-1)^n)) / 8,$$

$$C_3 = (8(5 + 2n)m^3 + 36(4 - n^2 - n)m^2 + (24n^3 - 136n - 12n^2 + 6(-1)^n + 194)m + 12n^3 + (6(-1)^{m+n} - 90 - 12(-1)^n)n - 6((-1)^n + 1)n^2 + 3(-1)^m + 21(-1)^{m+n} + 105 + 15(-1)^n) / 24$$

Отметим, что в данном случае общая формула (1) расчета прогиба не изменилась. Также остались неизменными и уравнения по переменной m . Графики решения построим для относительной безразмерной величины прогиба $\Delta' = \Delta EF / (P'L)$, где $P' = P(2n + 7)$ — суммарная нагрузка на ферму. Принят пролет длиной $L = 2(n+3)a$.

На рис. 4 с ростом высоты h прогиб закономерно уменьшается. На рис. же 5 эта закономерность наблюдается только при малых m . После некоторого значения m кривые пересекаются и зависимость от высоты получается обратной.

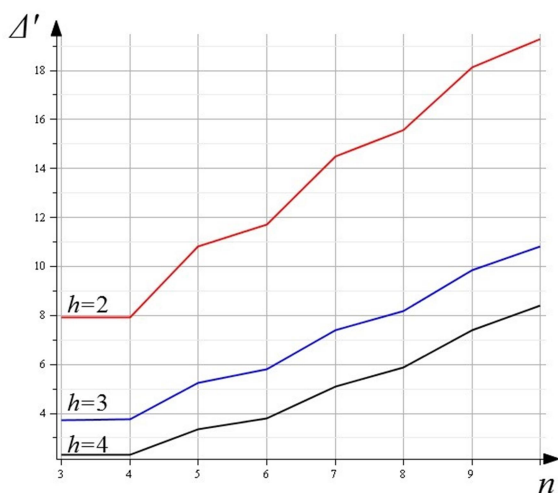


Рис. 4. Зависимость прогиба от числа панелей n

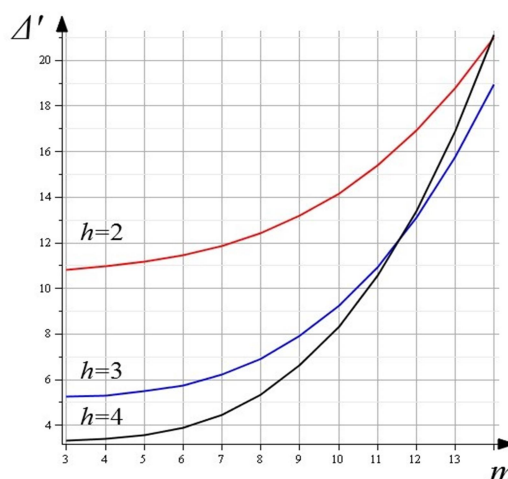


Рис. 5. Зависимость прогиба от числа панелей m

Аналитическая форма решения позволяет оценить его асимптотику. В случае нагружения распределенными силами по узлам верхнего пояса выясняем, что полученная зависимость на рисунке 4, независимо от некоторой неравномерности роста прогиба в начале графика, в пределе квадратичная:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^2 = h(1 + m) / (2L)$$

Для случая сосредоточенной нагрузки этот предел в два раза больше, изломы на кривых рисунка 4 сильнее, а кривые на рисунке типа 5 пересекаются при значительно больших m .

Выводы

В настоящей работе получены формулы, позволяющие оценивать деформативность предложенной схемы фермы. Сам алгоритм может быть применен и перенастроен на другие нагрузки. В силу линейности задачи по нагрузкам комбинацией отдельных решений можно

получить аналитические решения для достаточно широкого класса задач. Особенно эффективно построенное решение при большом числе панелей в ферме, т. е. в тех случаях, когда при численном решении системы уравнений большой размерности возникают трудности преодоления «проклятия размерности», связанного с неизбежным накоплением ошибок округления счета.

Авторы благодарят профессора Кирсанова М. Н. за схему фермы и алгоритм решения.

Библиографический список

1. Алешкин А. В. Разработка графического интерфейса для расчета плоской фермы методом конечных элементов //Всероссийская ежегодная научно-техническая конференция "Общество, наука, инновации"(НТК-2012). – 2012. – С. 1607-1612.
2. Безмельницин В. Т., Щербаков А. М. Примеры расчета строительных конструкций с использованием программы FEMAP //Достижения вузовской науки: Сб. матер. IX Межд. научн.-практ. конф./под общ. ред. С.С. Чернова.—Новосибирск: Издательство ЦРНС. – 2014. – С. 104-108.
3. Дмитриева Т. Л. Программный комплекс расчета и оптимизации строительных конструкций «РОСК» //Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. – 2011. – №. 1 (1).
4. Соколов А. А., Логачев К. И., Зинькова В. А. Численные исследования напряженно-деформированного состояния узловых бесфасоночных соединений трубчатых элементов ферм //Промышленное и гражданское строительство. – 2007. – №. 8. – С. 40-41.
5. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, No. 9. p. 607 – 617.
6. Hutchinson R.G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 54, Issue 4, April 2006, Pages 756-782.
7. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 165-171.
8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2-6.
9. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // В сборнике: Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014 Труды международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.
10. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
11. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
12. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 8 (76). С. 58-66.
13. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
14. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.

15. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
16. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. № 4 (67). С. 86-94.
17. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
18. Бирбасов А. А. Аналитический расчет прогиба плоской арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 198-201.
19. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.
20. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12 (26). С. 74.
21. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 12–33.
22. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
23. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет деформаций и усилий в плоской вантовой ферме // Механизация строительства. 2018. Т. 79. № 1. С. 29-33.
24. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 3 (55). С. 3-9.
25. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. С. 14-17.
26. Кирсанов М.Н. Индуктивный вывод формул для деформаций плоской решетчатой фермы // Строительство и реконструкция. 2017. № 2 (70). С. 17-22.
27. Кирсанов М.Н. Формула для прогиба и анализ кинематической изменяемости решетчатой фермы // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 2. № 15. С. 5-10.
28. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 48-51.
29. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. № 1 (29). С. 84-105.
30. Кирсанов М.Н., Горбунова А.С., Лепетюха В.А. Расчет прогиба симметричной фермы с решеткой "star" в аналитической форме // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 36-41.
31. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7-12.
32. Кирсанов М.Н. Статический расчет плоской фермы с двойной треугольной решеткой // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2017. № 11 (248). С. 32-36.
33. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 4 (279). С. 10-14.

34. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с усиленной треугольной решеткой // Строительство и архитектура. 2017. Т. 5. № 2. С. 122-125.
35. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. № 7. С. 15-18.
36. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 2-6.
37. Kirsanov M.N. A precise solution of the task of a bend in a lattice girder with a random number of panels // Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. № 1 (37). С. 92-99.
38. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 3. С. 23-27.
39. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 4. С. 20-23.
40. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 10. С. 24-27.
41. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. Т. 1. № 20. С. 14-20.
42. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитический расчет частоты колебания груза в произвольном узле балочной фермы // Транспортное строительство. 2018. № 12. С. 21-23.
43. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 31-34.
44. Ахмедова Е.Р., Канатова М.И. Собственные частоты колебаний плоской балочной фермы регулярной структуры // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 11. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 31 октября 2014. С. 17-18.
45. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 3 (126). С. 284-292.
46. Kirsanov M.N. Lower estimate of the fundamental frequency of natural oscillations of a truss with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 7. С. 844-851.
47. Кирсанов М. Н. Maple и Maple. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.

References

1. Aleshkin A. V. Razrabotka graficheskogo interfeysa dlya rascheta ploskoy fermy metodom konechnykh elementov. Vserossiyskaya yezhegodnaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya "Obshchestvo, nauka, innovatsii"(NTK-2012). 2012. Pp. 1607-1612.
2. Bezmel'nitsin V. T., Shcherbakov A. M. Primery rascheta stroitel'nykh konstruktsiy s ispol'zovaniyem programmy FEMAP. Dostizheniya vuzovskoy nauki: Sb. mater. IX Mezhd. nauchn.-prakt. konf./pod obshch. red. SS Chernova. Novosibirsk: Izdatel'stvo TSRNS. 2014. Pp. 104-108.
3. Dmitriyeva T. L. Programmnyy kompleks rascheta i optimizatsii stroitel'nykh konstruktsiy «ROSK». Izvestiya vuzov. Investitsii. Stroitel'stvo. Nedvizhimost'. 2011. №. 1 (1).

4. Sokolov A. A., Logachev K. I., Zin'kova V. A. Chislennyye issledovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya uzlovykh besfasonochnykh soyedineniy trubchatykh elementov ferm. *Promyshlennoye i grazhdanskoye stroitel'stvo*. 2007. № 8. Pp. 40-41.
5. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005. 85, No. 9. Pp. 607 – 617.
6. Hutchinson R.G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Volume 54, Issue 4, April 2006, Pp. 756-782.
7. Kirsanov M.N. Analiticheskoye issledovaniye zhestkosti prostranstvennoy staticheski opredelimoj fermy. *Vestnik MGSU*. 2017. T. 12. № 2 (101). Pp. 165-171.
8. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet prostranstvennoy sterzhnevoy regul'yarnoy struktury s ploskoy gran'yu. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2015. № 2 (259). Pp. 2-6.
9. Leonov P.G., Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet i analiz prostranstvennoy sterzhnevoy konstruksii v sisteme Maple. V sbornike: *Informatizatsiya inzhenerenogo obrazovaniya INFORINO-2014 Trudy mezhdunarodnoy nauchno-metodicheskoy konferentsii*. 2014. Pp. 239-242.
10. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet i optimizatsiya prostranstvennoy balochnoy fermy. *Vestnik Moskovskogo energeticheskogo instituta. Vestnik MEI*. 2012. № 5. Pp. 5-8.
11. Kirsanov M.N. Otsenka progiba i ustoychivosti prostranstvennoy balochnoy fermy. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2016. № 5 (268). Pp. 19-22.
12. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal*. 2017. № 8 (76). Pp. 58-66.
13. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet prostranstvennoy sterzhnevoy sistemy. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy*. 2012. № 1. Pp. 49-53.
14. Kirsanov M.N. Sravnitel'nyy analiz zhestkosti dvukh skhem arochnoy fermy. *Stroitel'stvo unikal'nykh zdaniy i sooruzheniy*. 2015. № 9 (36). Pp. 44-55.
15. Kirsanov M.N., Stepanov A.S. O zavisimosti deformatsiy ploskoy arochnoy fermy ot chisla paneley. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2017. № 5 (274). Pp. 9-14.
16. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta deformatsiy arochnoy fermy s proizvol'nym chislom paneley. *Stroitel'stvo unikal'nykh zdaniy i sooruzheniy*. 2018. № 4 (67). Pp. 86-94.
17. Kirsanov M.N. Analiticheskoye issledovaniye deformatsiy ploskoy fermy arochnogo tipa. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova*. 2015. № 3 (31). Pp. 42-48.
18. Birbasov A. A. Analiticheskiy raschet progiba ploskoy arochnoy fermy, nagruzhennoy po verkhnemu poyasu. *Nauchnyy al'manakh*. 2016. №6-2 (19). Pp. 198-201.
19. Savinykh A. C. Analiz progiba arochnoy raskosoy fermy, nagruzhennoy po verkhnemu poyasu.. *Stroitel'stvo i arkhitektura*. 2017. Tom 5. Vypusk 3 (6). Pp. 12-17.
20. Tin'kov D.V. Raschet progiba ploskoy arochnoy fermy s krestoobraznoy reshetkoy. *Postulat*. 2017. № 12 (26). S. 74.
21. Osadchenko N.V. Analiticheskiye resheniya zadach o progibe ploskikh ferm arochnogo tipa. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2018. T. 1. № 16. S. 12–33.
22. Kirsanov M.N. Zhestkost' torsionnoy podveski mikromekhanicheskogo volnovogo tverdotel'nogo giroskopa. *Pribory i sistemy. Upravleniye, kontrol', diagnostika*. 2015. № 3. Pp. 18-22.
23. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet deformatsiy i usilij v ploskoy vantovoy ferme. *Mekhanizatsiya stroitel'stva*. 2018. T. 79. № 1. Pp. 29-33.

24. Kirsanov M.N. Diskretnaya model' svaynogo fundamenta. Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal. 2015. № 3 (55). Pp. 3-9.
25. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. Architecture and Engineering. 2016. T. 1. № 3. PP. 14-17.
26. Kirsanov M.N. Induktivnyy vyvod formul dlya deformatsiy ploskoy reshetchatoy fermy. Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. 2017. № 2 (70). PP. 17-22.
27. Kirsanov M.N. Formula dlya progiba i analiz kinematischeskoy izmenyayemosti reshetchatoy fermy. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2017. T. 2. № 15. PP. 5-10.
28. Kirsanov M.N. Raschet zhestkosti sterzhnevoy reshetki. Vestnik mashinostroyeniya. 2015. № 8. PP. 48-51.
29. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder. Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. № 1 (29). PP. 84-105.
30. Kirsanov M.N., Gorbunova A.Pp. , Lepetyukha V.A. Raschet progiba simmetrichnoy fermy s reshetkoy "star" v analiticheskoy forme. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2017. T. 1. № 14. Pp. 36-41.
31. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet balochnoy fermy so slozhnoy reshetkoy. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2015. № 3 (260). Pp. 7-12.
32. Kirsanov M.N. Sticheskiy raschet ploskoy fermy s dvoynoy treugol'noy reshetkoy. Spravochnik. Inzhenernyy zhurnal s prilozheniyem. 2017. № 11 (248). Pp. 32-36.
33. Kirsanov M.N., Moskvina V.G. Deformatsii ploskoy fermy s usilennoy reshetkoy. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2018. № 4 (279). Pp. 10-14.
34. Belyankin N.A., Boyko A.YU., Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet progiba balochnoy fermy s usilennoy treugol'noy reshetkoy. Stroitel'stvo i arkhitektura. 2017. T. 5. № 2. Pp. 122-125.
35. Kirsanov M.N. Raschet progiba ploskoy reshetchatoy fermy s chetyr'mya oporami. Transportnoye stroitel'stvo. 2017. № 7. Pp. 15-18.
36. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet mnogoreshetchatoy fermy. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2014. № 6 (257). Pp. 2-6.
37. Kirsanov M.N. A precise solution of the task of a bend in a lattice girder with a random number of panels. Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. № 1 (37). Pp. 92-99.
38. Kirsanov M.N. K vyboru reshetki balochnoy fermy. Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy. 2017. № 3. Pp. 23-27.
39. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta progiba i usiliy v reshetchatoy ferme. Mekhanizatsiya stroitel'stva. 2017. T. 78. № 4. Pp. 20-23.
40. Kirsanov M.N. Zavisimost' progiba ploskoy reshetchatoy fermy ot chisla paneley. Mekhanizatsiya stroitel'stva. 2017. T. 78. № 10. Pp. 24-27.
41. Kirsanov M.N., Tin'kov D.V. Analiticheskiye vyrazheniya chastot malykh kolebaniy balochnoy fermy s proizvol'nym chislom paneley. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2019. T. 1. № 20. Pp. 14-20.
42. Kirsanov M.N., Tin'kov D.V. Analiticheskiy raschet chastoty kolebaniya gruzha v proizvol'nom uzle balochnoy fermy. Transportnoye stroitel'stvo. 2018. № 12. Pp. 21-23.
43. Kanatova M.I. Chastotnoye uravneniye i analiz kolebaniy ploskoy balochnoy fermy. Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. M: Infra-M. 2015. T. 1. Pp. 31-34.

44. Akhmedova Ye.R., Kanatova M.I. Sobstvennyye chastoty kolebaniy ploskoy balochnoy fermy regul'yarnoy struktury. Nauka i obrazovaniye v XXI veke: sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii 31 oktyabrya 2014 g. v 17 chastyakh. Chast' 11. Tambov: OOO «Konsaltingovaya kompaniya Yukom», 31 oktyabrya 2014. Pp. 17-18.
45. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels. Vestnik MGSU. 2019. T. 14. № 3 (126). Pp. 284-292.
46. Kirsanov M.N. Lower estimate of the fundamental frequency of natural oscillations of a truss with an arbitrary number of panels. Vestnik MGSU. 2019. T. 14. № 7. Pp. 844-851.
47. Kirsanov M. N. Maple i Maplet. Resheniya zadach mekhaniki. SPb.: Izd-vo Lan', 2012. 512 pp.

DERIVATION OF THE FORMULAS FOR THE DEFLECTION OF A FLAT HINGED-ROD FRAME IN THE OF SYMBOL MATHEMATICS MAPLE SYSTEM

A.Y.Boyko¹, G.N. Tkachuk²

*National Research University "MPEI"¹, MIPT²
Russia. Moscow*

¹Student; e-mail: belankin2@gmail.com²Student; e-mail: boykoanyu@mail.ru

A symmetrically externally statically indeterminable lattice-type truss with a rectilinear upper crossbar belt and a lower belt lowered in the middle of the span is loaded with vertical force in the center or evenly along the nodes of the upper belt. Using the induction method, the analytical dependences of the deflection of the middle span on the number of panels along the span and height are derived. The Maxwell-Mohr's formula and the apparatus for compiling and solving recurrence equations are used to obtain a general solution. The equilibrium equations of nodes for determining the forces in the rods are solved in symbolic form in the Maple computer mathematics system. The asymptotics of the solution quadratic in the number of panels is revealed.

Keywords: Truss, deflection, Maxwell-Mohr formula, Maple