



Research Article

Received: January 1, 2024

Accepted: January 17, 2024

Published: January 24, 2024

ISSN 2304-6295

Effect of truss height on the safe frequency region of a statically determined flat truss

Luong, Cong Luan¹ Kirsanov, Mikhail Nikolaevich^{1*}

¹ Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation; luongcongluan96@gmail.com (L.C.L); c216@ya.ru (K.M.N.)

Correspondence:* email c216@ya.ru

Keywords:

Truss; Maple; Natural frequency; Dunkerley method; Spectra of natural frequencies; Simplified method; Analytical solution; Resonant safe range

Abstract:

The object of research is a statically determined symmetric planar model. Assume that the truss bars have the same stiffness and cross-section and that the truss masses are evenly distributed at their nodes. **Method.** The Dunkerley formula and a simplified method are proposed to estimate the lowest limit of the natural vibration frequency of a truss with an arbitrary number of plates. Solving the system of linear equations determines the force in the rods, and all analytical transformations are performed in the Maple computer mathematics package. Using the Maxwell-Mohr formula, find the stiffness matrix of the structure. **Results.** The first natural frequency of the truss obtained by the analytical method is compared with the results of the numerical method. The frequency spectrum of the truss was analyzed, and conclusions were drawn about the frequency dependence on the size of the truss rods.

1 Введение / Introductions

В динамике конструкций при строительстве и монтаже ферменных конструкций наибольший интерес вызывают два вопроса: первая собственная частота и спектр собственных частот фермы. Для решения задач о собственных частотах колебаний фермы обычно используют численные методы, основанные на методе конечных элементов. Фермы с небольшим количеством панелей реже встречаются на практике, чем масштабные фермы с большим числом панелей. В последнем случае любые численные методы проявляют свой недостаток — неизбежное накопление ошибок. Применение аналитического метода к статически определенным фермам с произвольным числом панелей решает эту проблему. Некоторые аналитические решения для прогибов плоских ферм в системе Maple представлены в [1]–[4]. Обычно для динамических расчетов интерес представляет верхняя или нижняя оценка первой частоты. Полезными методами являются метод Донкерлея (для нижней оценки) [5]–[7] или метод Рэлея (для верхней оценки) [8], [9]. Метод Донкерлея удобен тем, что в отличие от метода Рэлея он проще и не требует прогнозирования формы колебаний. Однако точность этого метода не очень высока. В некоторых случаях, когда ферменная конструкция сложна, точность этого метода с увеличением числа панелей не уменьшается или является неудовлетворительной. Напротив, метод Рэлея часто дает результаты с более высокой точностью. Однако коэффициенты, полученные этим методом, обычно бывают достаточно сложными и во

Luong, C.L.; Kirsanov, M.

Effect of truss height on the safe frequency region of a statically determined flat truss;

2024; *Construction of Unique Buildings and Structures*; **110** Article No 11003. doi: 10.4123/CUBS.110.3

многих случаях найти решение коэффициентов формулы расчета невозможно. В данном исследовании для определения первой собственной частоты фермы используется метод Донкерлея и его упрощенная форма [10]. Усовершенствованные варианты метода Донкерлея рассмотрены в [11], [12]. Коэффициенты, полученные этим методом, столь же просты, как и метод Донкерлея, и почти столь же точны, как и метод Рэлея.

Компьютерные программы, использующие символьную математику со специальными операторами, такие как Maple, могут использоваться для символьного решения систем линейных уравнений [13]–[16]. Решение для оценки собственных частот в аналитическом виде с использованием системы компьютерной математики Maple было получено в [17]. Вопросы существования статически определимых ферменных систем впервые обсуждались в работах Hutchinson R.G. and Fleck N.A. [18], [19]. Расчет оптимальных размеров обычной фермы с учетом ползучести приведен в [20]. Нелинейная параметрическая вибрация пластин переменной толщины изучалась в [21].

2 Материалы и методы / Materials and Methods

2.1 Конструкция фермы

Рассматриваемая ферма представляет собой статически определенную плоскую симметричную ферму (рис. 1). ферма имеет одну подвижную и одну неподвижную шарнирную опору. Длина фермы $L = 4an$. Вся масса фермы условно распределена по $N = 8n + 6$ узлам конструкции, за исключением двух опорных узлов. Ферма содержит $\nu = 16n + 6$ стержней. В это число также входят три стержня, моделирующие опоры.

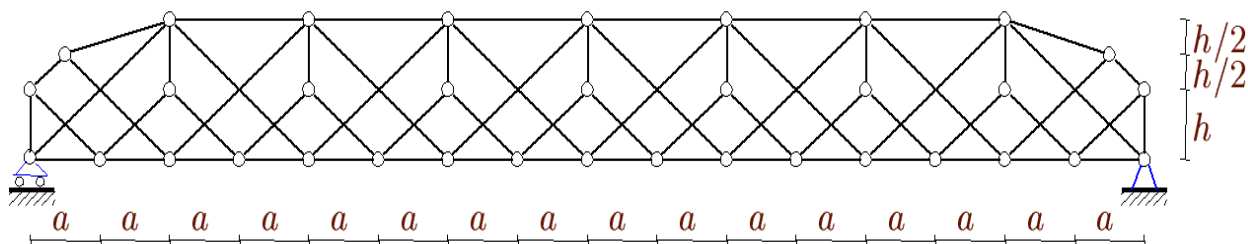


Рис. 1 – Ферма, $n = 4$

Fig. 1 – Truss, $n = 4$

Координаты узлов и структура соединения стержней в ферме определяются в программе символьного математического языка Maple. На рисунке 2 показана нумерация стержней и узлов фермы на примере фермы $n = 2$.

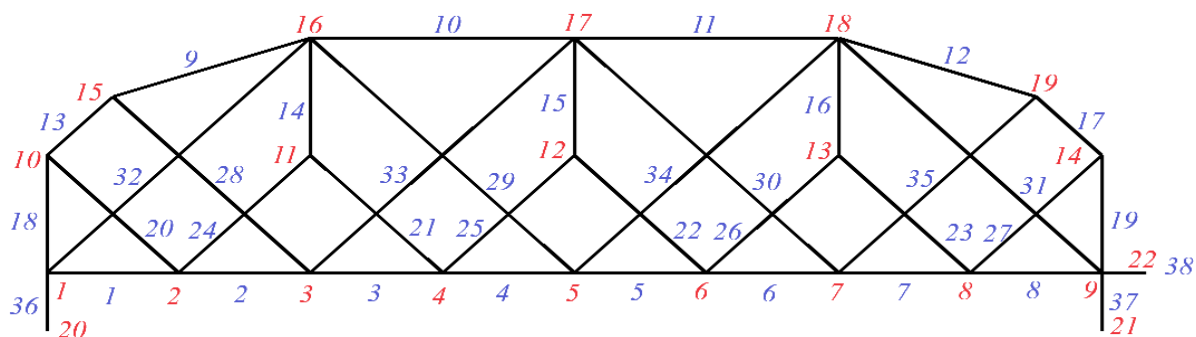


Рис. 2 – Нумерация стержней и узлов, $n = 2$

Fig. 2 – Numbering of bars and nodes, $n = 2$



2.2 Собственная частота колебаний

Нижняя оценка частоты первого колебания по формуле Донкерлея выражается следующим образом:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^K \omega_i^{-2}, \quad (1)$$

где ω_p — парциальные частоты, рассчитанные для каждой массы отдельно, $K = 8n + 3$ — число степеней свободы системы грузов в узлах фермы.

Для расчета парциальных частот составляются уравнения движения масс M , размещенных в узлах:

$$M \ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (2)$$

Коэффициент жесткости D_p , обратный к коэффициенту податливости, вычисляется по формуле Максвелла – Мора:

$$\delta_p = 1 / D_p = \sum_{\alpha=1}^v (S_{\alpha}^p)^2 l_{\alpha} / (EF). \quad (3)$$

Из формулы Донкерлея при $y_p = A_p \sin(\omega t + \varphi)$ следует: $\omega_p = \sqrt{D_p / M}$. Отсюда получается выражение для частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = M \sum_{p=1}^K \delta_p = M \Delta_n. \quad (4)$$

Расчет серии ферм с разным числом панелей показал, что коэффициент Δ_n имеет вид, не зависящий от параметра n :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{(532a^3 + 1335c^3 + 17d^3 + 1104h^3)}{32}, \\ \Delta_2 &= \frac{(6334a^3 + 10705c^3 + 89d^3 + 5488h^3)}{32}, \\ \Delta_3 &= \frac{(94956a^3 + 59951c^3 + 337d^3 + 22672h^3)}{288}, \\ \Delta_4 &= \frac{(699350a^3 + 230106c^3 + 889d^3 + 70576h^3)}{800}, \\ \Delta_5 &= \frac{(15982836a^3 + 3584419c^3 + 9365d^3 + 876560h^3)}{7840}, \\ &\dots \end{aligned}$$

С помощью системных операторов Maple вычисляются общие члены полученной последовательности коэффициентов при степенях размеров фермы: a^3, c^3, h^3 . Здесь обозначены длины раскосов: $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $d = \sqrt{9a^2 + h^2}$. Из формулы следует, что зависимость прогиба от числа панелей и размеров конструкции имеет вид:

$$\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3) / (h^2 EF), \quad (5)$$

Коэффициенты в этом выражении получаются из решения рекуррентных уравнений в системе Maple:

$$\begin{aligned} C_1 &= (5120n^7 - 21504n^6 + 48896n^5 - 72000n^4 + 69680n^3 - 29076n^2 + 4734n + 135) / 360, \\ C_2 &= (4096n^7 - 36864n^6 + 194560n^5 - 375360n^4 + 370504n^3 - 96816n^2 + 1575n - 1620) / 1440, \\ C_3 &= (64n^4 - 120n^3 + 128n^2 - 21n) / 96, \\ C_4 &= (64n^5 - 80n^4 + 80n^3 + 182n^2 - 39n) / 6. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, формула для расчета первой частоты колебаний фермы будет иметь вид:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{M(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3d^3 + C_4h^3)}} \quad (7)$$

где коэффициенты вычисляются по формулам (6).

2.3 Упрощенный метод оценки первой частоты

Приближенная оценка первой частоты колебаний по упрощенному методу имеет следующий вид:

$$\omega_*^{-2} = \sum_{p=1}^K u_p. \quad (8)$$

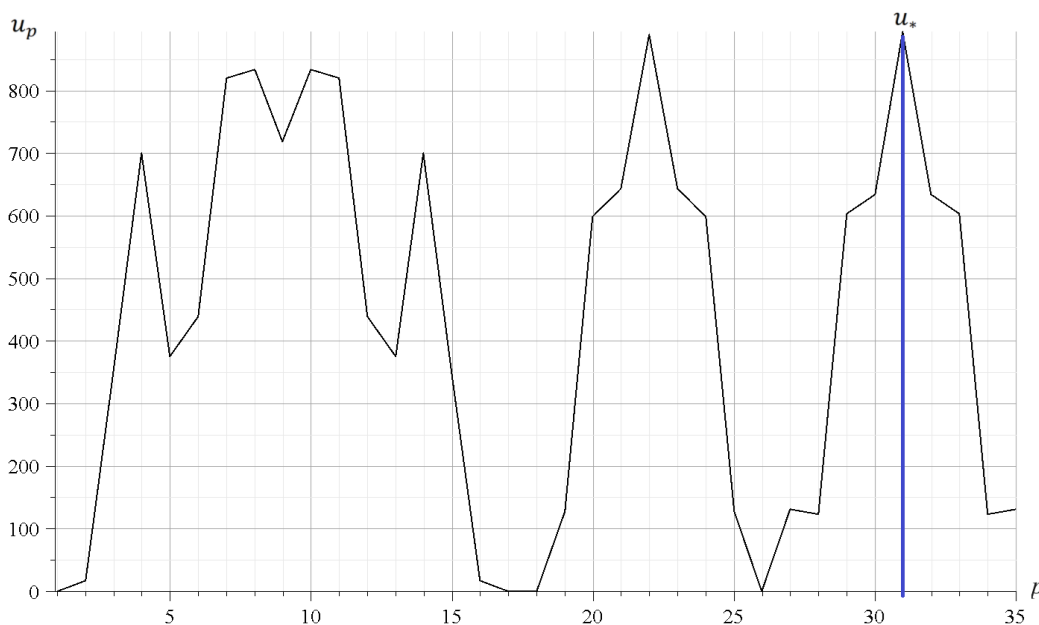


Рис. 3 – Зависимость коэффициента от номера узла фермы при $n = 4$

Fig. 3 – Dependence of the coefficient on the truss node number at $n = 4$

Приняты размеры фермы: $a = 6\text{ м}$, $h = 6\text{ м}$. Продольная жесткость стальных стержней сечением $F = 4 \cdot 10^{-4}\text{ м}^2$ равна $EF = 0,8 \cdot 10^5\text{ кН}$, число степеней свободы $K = 8n + 3 = 35$. На оси абсцисс отложены номера узлов. Максимальная ордината обозначена \tilde{u}_* . Сумму $\sum_{p=1}^K u_p$ можно интерпретировать как площадь, ограниченную кривой распределения. Эту площадь можно вычислить проще, отсортировав частоты в порядке возрастания и рассчитав площадь по формуле площади

трапеции $\sum_{p=1}^K u_p = K(u_* + u_1) / 2$ (рис. 4). где u_*, u_1 — максимальный и минимальный прогиб некоторого узла фермы от действия единичной силы.

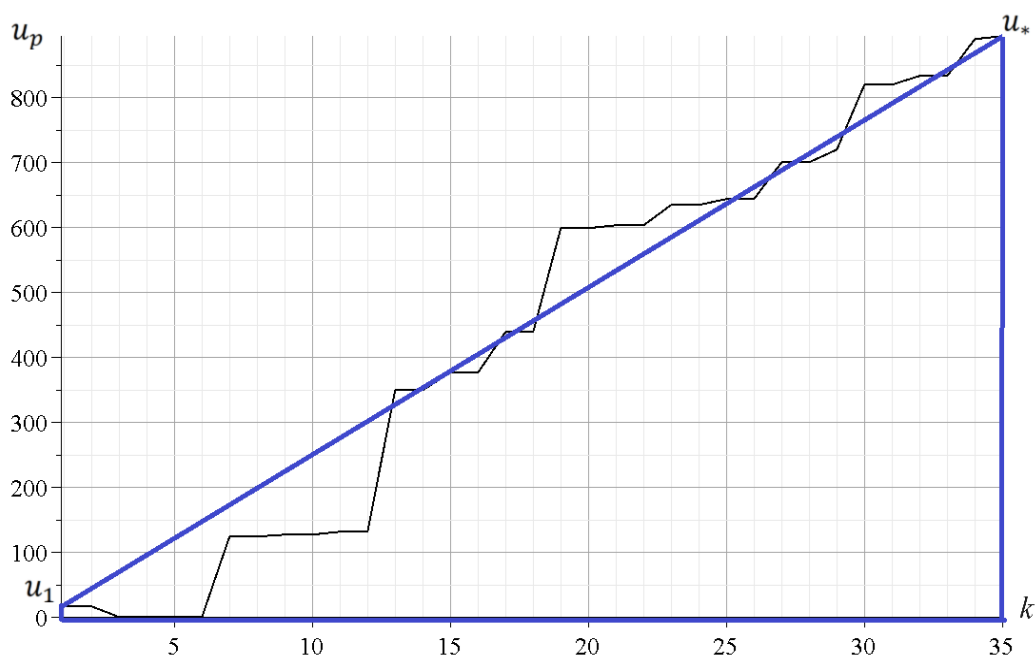


Рис. 4 – Коэффициенты u_p в порядке возрастания при, $n = 4$

Fig. 4 – Coefficients u_p in ascending order at $n = 4$

При этом трапеция оказывается вписанно-описанной фигурой исходной площади, что делает такую замену оправданной. В этом случае на рисунке 4 на оси абсцисс уже отмечены не номера узлов, а номера ранжированного по увеличению списка значений \tilde{u}_* . Пробные вычисления величины \tilde{u}_* при различных n показывают, что максимальное значение \tilde{u}_* приходится на средний узел верхнего пояса фермы, имеющий номер $7n + 3$. Вычисление величины $\tilde{u}_* = \tilde{u}_{7n+3}$ для различных порядков фермы дает следующую последовательность:



$$\begin{aligned}
 n = 1 : \tilde{u}_* &= \frac{11a^3 + 11c^3}{2h^2 EF}, \\
 n = 2 : \tilde{u}_* &= \frac{1672a^3 + 2717c^3 + 19d^3 + 1520h^3}{8h^2 EF}, \\
 n = 3 : \tilde{u}_* &= \frac{513a^3 + 81c^3}{2h^2 EF}, \\
 n = 4 : \tilde{u}_* &= \frac{31360a^3 + 4193c^3 + 7d^3 + 1008h^3}{40h^2 EF}, \\
 n = 5 : \tilde{u}_* &= \frac{3655a^3 + 215c^3}{2h^2 EF}, \\
 n = 6 : \tilde{u}_* &= \frac{800360a^3 + 32079c^3 + 17d^3 + 3536h^3}{216h^2 EF}, \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Вычисления прогиба производятся последовательно с $n=1,2,3\dots$. Обобщение этой серии формул на произвольное число n дает следующие окончательные формулы:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= (64n^7 - 168n^6 - 8(2(-1)^n - 11)n^5 + 6(11(-1)^n + 6)n^4 + (67(-1)^n + 103)n^3 - \\
 &\quad - (33(-1)^n + 6)n^2 - 18((-1)^n + 1)n) / 6, \\
 C_2 &= (128(5 - (-1)^n)n^5 + 48(11(-1)^n - 31)n^4 + 8(139(-1)^n + 247)n^3 + \\
 &\quad + 72(7(-1)^n + 16)n^2 + 63((-1)^n + 1)n) / 48, \\
 C_3 &= n(8n + 3)((-1)^n + 1) / 16, \\
 C_4 &= n(16n^2 + 14n + 3)((-1)^n + 1).
 \end{aligned}$$

Для обобщения используются операторы Maple `rsolve` и `rgf_findrecur`. Формула зависимости первой частоты собственных колебаний фермы, полученная с помощью упрощенного метода, принимает вид:

$$\omega_* = h \sqrt{\frac{EF}{M(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3)}}. \quad (9)$$

3 Результаты и их обсуждение / Results and Discussion

Полученные оценки зависимости частоты собственных колебаний от порядка фермы необходимо сравнить с минимальным значением всего спектра частот, полученным численным методом. В качестве примера рассмотрим регулярные фермы из стали с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, с площадью поперечного сечения стержней $F = 4 \text{ см}^2$. Массы в узлах $M = 150 \text{ кг}$, размеры $a = 6 \text{ м}$, $h = 6 \text{ м}$. На рисунке 5 кривая ω_1 соответствуют численному решению, полученному как минимальная собственная частота спектра, кривая ω_D построена по формуле (7) с коэффициентами, найденными по методу Донкерлея, кривая ω_* , построена по упрощенной формуле (9).

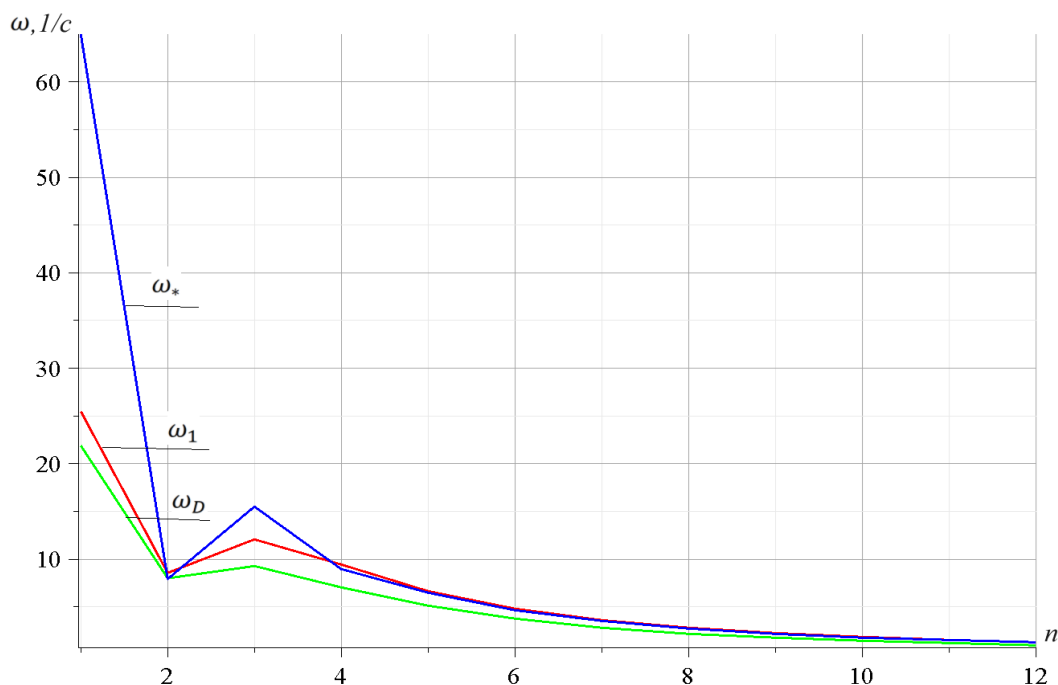


Рис. 5 – Зависимость первой частот от числа панелей фермы
Fig. 5 – Dependence of the first frequency on the number of truss panels

Из рисунка 5 видно, что при количестве панелей $n < 4$ наименьшее значение частоты численного метода и аналитического метода сильно различаются. Однако это несущественно для практики, так как стропильных конструкций с таким небольшим количеством панелей не существует. При $n > 4$ видно, что результаты, полученные методом Донкерлея, упрощенным методом и численным методом, практически совпадают. С увеличением числа панелей первая собственная частота монотонно уменьшается. Отсюда можно сделать вывод, что аналитическое решение, полученное методом Донкерлея и упрощенным методом, подходят для решения ферменной задачи с большим количеством панелей.

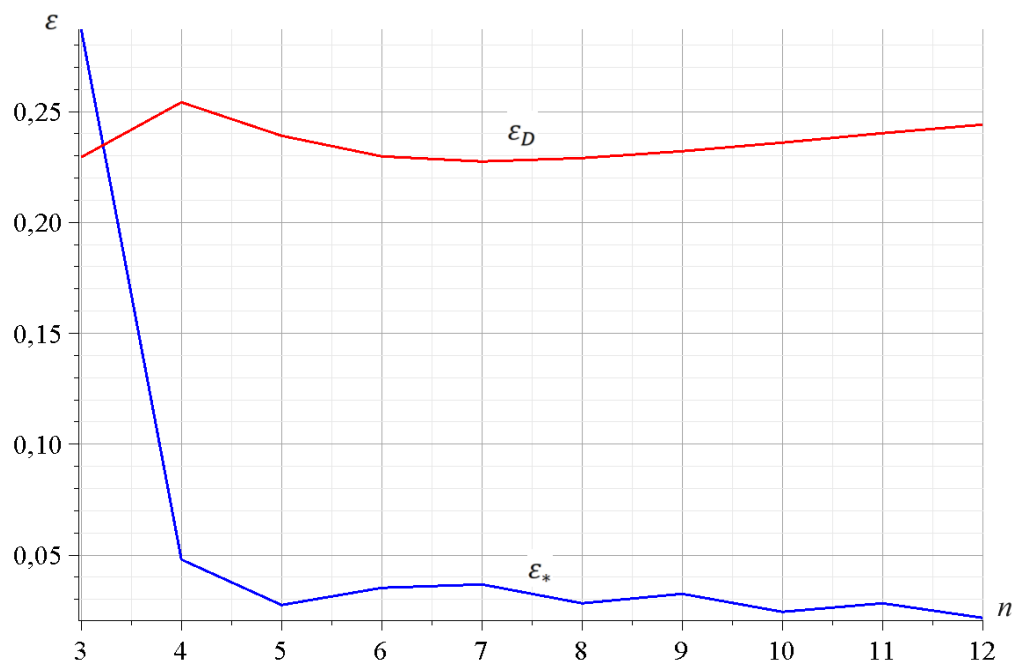


Рис. 6 – Относительные погрешности методов $a = 6\text{ м}$, $h = 6\text{ м}$.

Fig. 6 – Relative errors of methods $a = 6\text{ м}$, $h = 6\text{ м}$.

Для более точной оценки полученных решений применяются безразмерные значения относительных погрешностей $\varepsilon_D = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$ и $\varepsilon_* = (\omega_1 - \omega_*) / \omega_1$. Из рисунка 6 видно, что для метода Донкерлея погрешность находится в пределах допустимого диапазона от 22 до 25%. Но с увеличением количества панелей погрешность метода Донкерлея также несколько увеличивается. Это не совсем подходит для ферм с большим количеством панелей. Напротив, упрощенный метод показывает очень хорошие результаты. При малых значениях n по мере увеличения числа панелей погрешность этого метода очень быстро уменьшается. При $n > 4$ погрешность, полученная упрощенным методом, всегда меньше 4% и стабильно уменьшается с увеличением числа панелей. Величина погрешности достигает 0.5% при $n = 12$. Отсюда можно сделать вывод, что для рассматриваемой фермы упрощенный метод дает лучшие результаты и больше подходит для ферм с большим числом панелей. Кроме того, для упрощенного метода можно выделить еще одно свойство: точность этого метода наибольшая, когда число панелей n нечетное.

3.1 Спектры собственных частот регулярных ферм

На графике (рис. 7) показаны спектры двенадцати регулярных ферм в порядке $n = 1, \dots, 12$. Используя математический аппарат, используемый для нахождения первой частоты в режиме численного расчета, на графике показывает распределение частот ферм в разных порядках. Это позволяет определить некоторые свойства распределения спектральных множеств. Каждая кривая соответствует ферме определенного порядка. Ординаты точек на ней — это частоты. Горизонтальная ось представляет номера собственных частот в упорядоченном спектре.

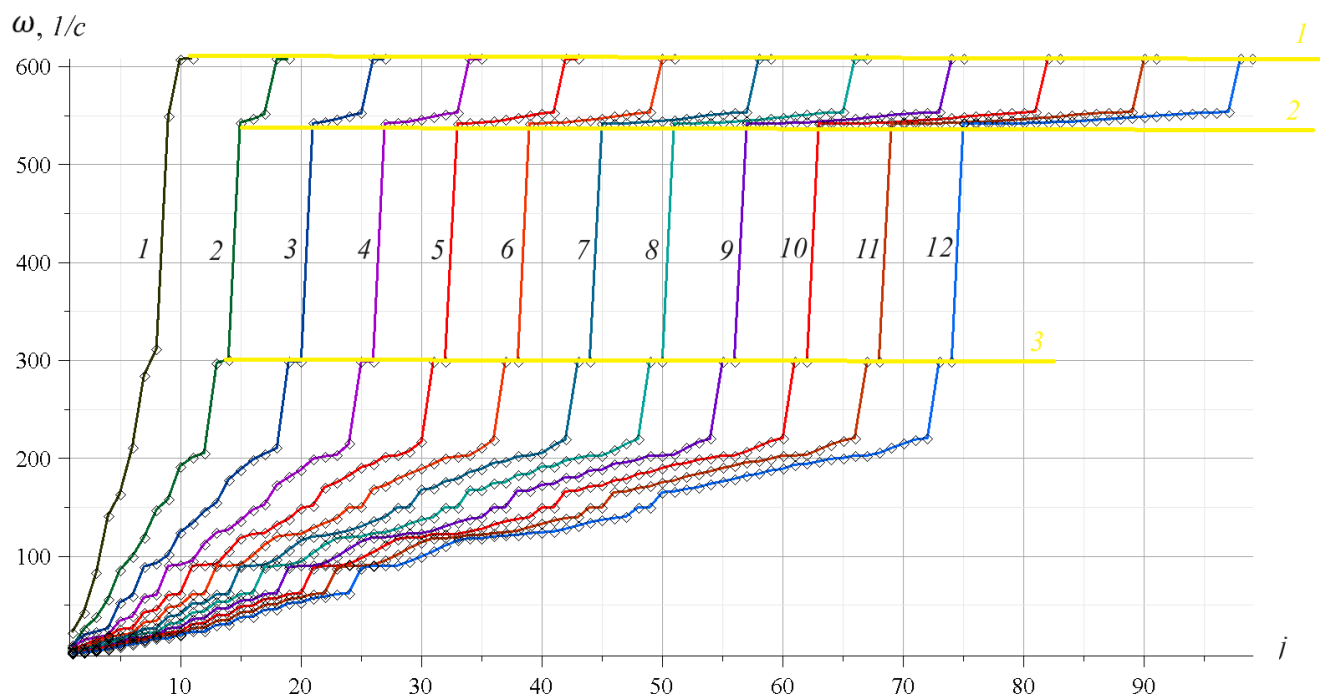


Рис. 7 – Спектры регулярных ферм $a = 6\text{ м}$, $h = 4\text{ м}$.

Fig. 7 – Spectra of regular trusses $a = 6\text{ м}$, $h = 4\text{ м}$.

Здесь приняты размеры фермы $a = 6\text{ м}$, $h = 4\text{ м}$. Наиболее заметными являются три горизонтальных отрезка, соединяющих точки, изображающие значения собственных частот. Это спектральные константы, обозначаемые цифрами 1, 2, 3. Верхняя граница частоты 1 принадлежит всем спектрам фермы. Наличие этих констант позволяет с высокой точностью прогнозировать

Luong, C.L.; Kirsanov, M.

Effect of truss height on the safe frequency region of a statically determined flat truss;

2024; *Construction of Unique Buildings and Structures*; **110** Article No 11003. doi: 10.4123/CUBS.110.3

частоты крупномасштабных ферм с большим числом панелей на основе расчетных данных для фермы с малым числом панелей.

Размеры фермы не сильно влияют на общий характер картины распределения частот. Для ферм размером $a = 6\text{ м}$, $h = 6\text{ м}$ собственные частоты показаны на рисунке 8.

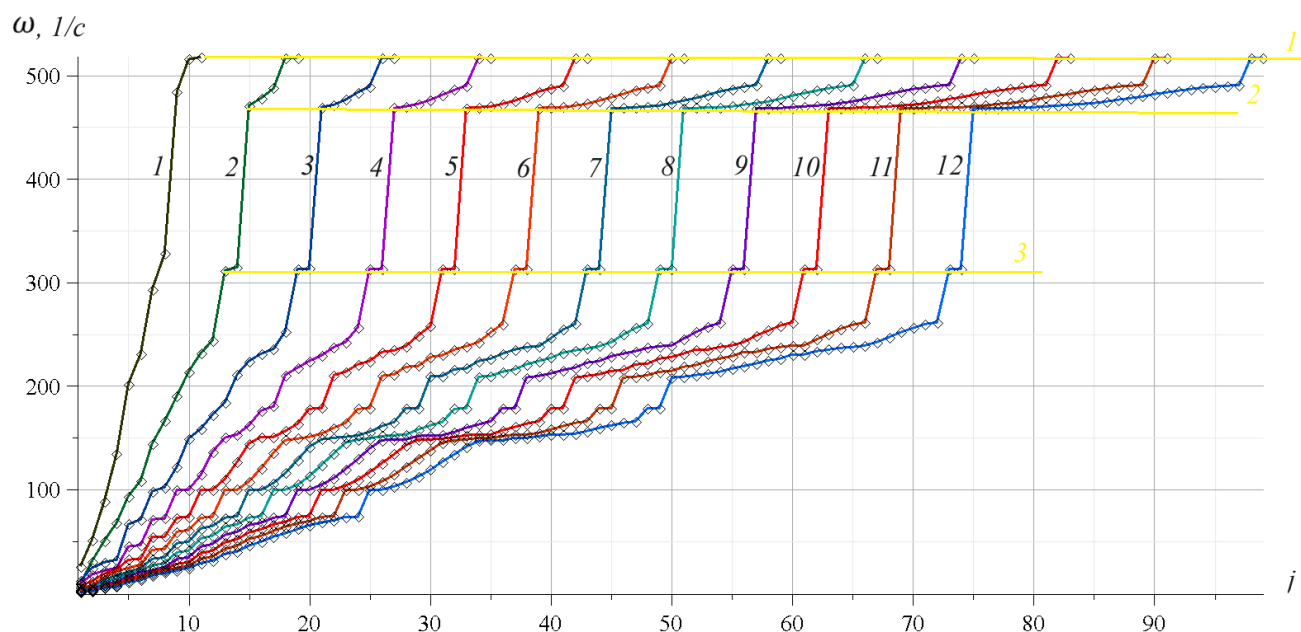


Рис. 8 – Спектры регулярных ферм $a = 6\text{ м}$, $h = 6\text{ м}$.

Fig. 8 – Spectra of regular trusses $a = 6\text{ м}$, $h = 6\text{ м}$.

3.2 Зависимость безопасного диапазона частоты от высоты фермы

Картины распределения частот ферм разного порядка обнаруживают области, в которых не собственных частот конструкции. Если внешнее возбуждение имеет частоту из этих областей, то резонанса от этого возбуждения не произойдет. Такие области будем называть резонансно безопасными.

При размерах $a = 6\text{ м}$, $h = 6\text{ м}$ на рисунке 8 собственные частоты также имеют три константы. Интервал частот между константами 2 и 3 равен 150 с^{-1} . Между тем на рисунке 7 эта величина равна 250 с^{-1} . Значение частоты между этими двумя константами зависит от высоты h . На рисунке 9 показана зависимость размера резонансно безопасного диапазона от размера h . Горизонтальная ось представляет значение h , вертикальная ось — значение частоты между константами 2 и 3.

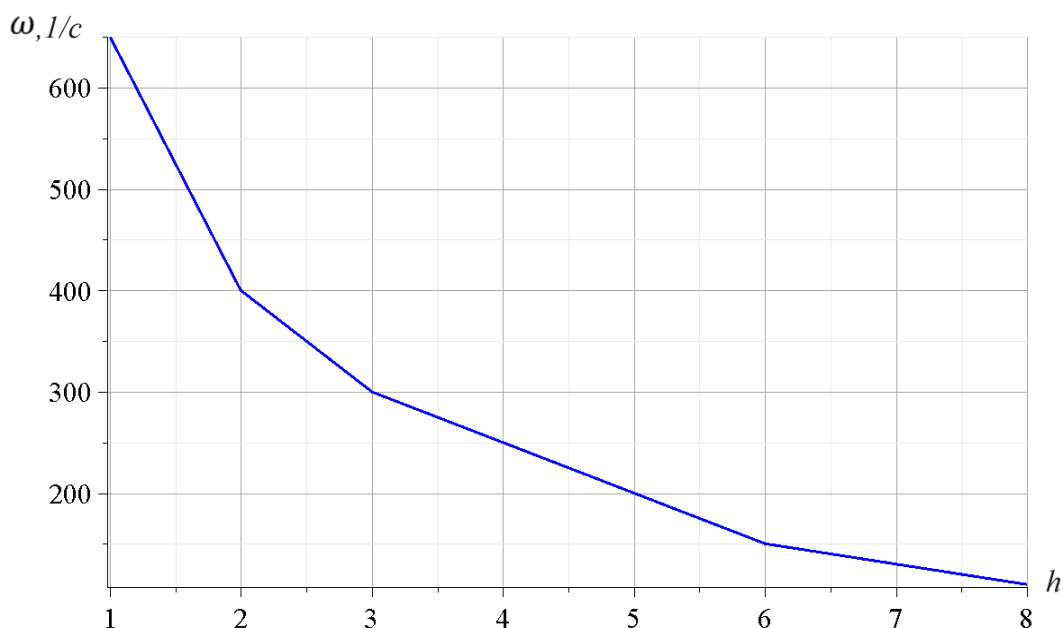


Рис. 9 – Зависимость безопасного диапазона частоты от h

Fig. 9 – Dependence of the safe frequency range on h

С увеличением высоты фермы размер зоны безопасности уменьшается.

4 Выводы/ Conclusions

Разработана математическая модель конструкции статически определенной плоской фермы и метод расчета первой частоты ее собственных колебаний в аналитическом виде для произвольного числа панелей. Нижние оценки частот собственных колебаний были получены с использованием метода Донкерлея и упрощенного метода. Формулы, полученные аналитическим методом, сравниваются с численным решением. Аналитическое решение лучше всего подходит для ферм с большим количеством панелей.

Можно сделать следующие выводы:

1. Оценка наименьшей частоты, полученная упрощенным методом компактнее и одновременно значительно точнее оценки по методу Донкерлея. В рассматриваемой ферме погрешность упрощенного решения меньше 0.8 % при числе панелей $n > 12$.
2. С увеличением числа панелей первая частота колебаний фермы монотонно уменьшается. В спектре собственных частот регулярных ферм разных порядков замечены спектральные константы.
3. Численно найдена зависимость резонансно безопасного диапазона от высоты фермы.

References

- 1 Komerzan E.V., Lushnov N.A., Osipova T.S. (2022) Analytical calculation of the deflection of a planar truss with an arbitrary number of panels. Structural mechanics and structures, 33, 17-25. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.33.2.002>
- 2 Kirsanov M.N., Luong Cong Luan (2022) Deflection and the lower limit of the fundamental frequency of natural vibrations of a beam truss. Structural mechanics and structures, 35, 24-33. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.35.4.003>
- 3 Komerzan E. V., Sviridenko O. V. (2022) Static deformations of the truss of a composite spatial frame. Analytical solutions. Structural mechanics and structures, 35, 40-48. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.35.4.005>

Luong, C.L.; Kirsanov, M.

Effect of truss height on the safe frequency region of a statically determined flat truss;

2024; *Construction of Unique Buildings and Structures*; **110** Article No 11003. doi: 10.4123/CUBS.110.3



- 4 Kirsanov M. (2022) Formulas for calculating the deflection and displacement of a planar truss support with short studs in a lattice. *Construction of Unique Buildings and Structures*, 104, 10403. <https://doi.org/10.4123/CUBS.104.3>
- 5 Rakhmatulina, A.R., Smirnova, A.A. (2017) The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels. *Science Almanace*, 28, 268–271. <https://doi.org/10.17117/na.2017.02.03.268>
- 6 Shchigol E.D. (2023) The formula for the lower estimate of the natural oscillations of a flat regular girder truss with a rectilinear upper belt // *Structural mechanics and structures*, 37, 46-53. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.005>
- 7 Komerzan, E. V., Maslov, A.N. (2023) Analytical evaluation of a regular truss natural oscillations fundamental frequency. *Structural Mechanics and Structures*, 372, 17–26, <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.002>
- 8 Vorobev O. (2020) Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*, 92, 9204. <https://doi.org/10.18720/CUBS.92.4>
- 9 Kirsanov, M.; Luong, C. (2023) Natural frequency spectra of spatial structure. *Construction of Unique Buildings and Structures*, 106, 10604. <https://doi.org/10.4123/CUBS.106.4>
- 10 Kirsanov M. (2023) Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*, 108, 10801. <https://doi.org/10.4123/CUBS.108.1>
- 11 Rutenberg, A. A (1976) lower bound for Dunkerley's formula in continuous elastic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 45, 249–252. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(76\)90599-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(76)90599-X)
- 12 Low, K.H. (2000) Modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses. *International Journal of Mechanical Sciences*, 42, 1287–1305. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00049-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00049-1)
- 13 Zotos, K. (2007) Performance comparison of Maple and Mathematica. *Applied Mathematics and Computation*, 188, 1426–1429. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.008>
- 14 Matrosov, A. V. (2019) Computational Peculiarities of the Method of Initial Functions. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 37–51. https://doi.org/10.1007/978-3-030-24289-3_4
- 15 Goloskokov, D.P., Matrosov, A. V. (2018) Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack. *Materials Physics and Mechanics*, 36, 137–141. https://doi.org/10.18720/MPM.3612018_15
- 16 Galileev, S.M., Matrosov, A. V. (1997) Method of initial functions: Stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures. *Composite Structures*, 39, 255–262. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(97\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(97)00108-6)
- 17 Kirsanov, M. (2022) Model of a Spatial Dome Cover. *Deformations and Oscillation Frequency. Construction of Unique Buildings and Structures*, 99, 9904. <https://doi.org/10.4123/CUBS.99.4>
- 18 Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. (2005.) Microarchitected cellular solids - The hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 85, 607–617. <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>
- 19 Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. (2006) The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54, 756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>
- 20 Tinkov, D. V. (2016) The Optimum Geometry of the Flat Diagonal Truss Taking into Account the Linear Creep. *Magazine of Civil Engineering, St-Petersburg State Polytechnical University*, 61, 25–32.

Luong, C.L.; Kirsanov, M.

Effect of truss height on the safe frequency region of a statically determined flat truss;

2024; *Construction of Unique Buildings and Structures*; **110** Article No 11003. doi: 10.4123/CUBS.110.3



<https://doi.org/10.5862/MCE.61.3>

- 21 Mirsaidov, M.M., Abdikarimov, R.A., Vatin, N.I., Zhgutov, V.M., Khodzhaev, D.A. and Normuminov, B.A. (2018) Nonlinear Parametric Oscillations of Viscoelastic Plate of Variable Thickness. *Magazine of Civil Engineering, St-Petersburg State Polytechnical University*, 82, 112–126. <https://doi.org/10.18720/MCE.82.11>
- 22 Liu, M., Cao, D. and Zhu, D. (2021) Coupled Vibration Analysis for Equivalent Dynamic Model of the Space Antenna Truss. *Applied Mathematical Modelling, Elsevier Inc.*, 89, 285–298. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.07.013>
- 23 Trainor, P.G.S., Shah, A.H. and Popplewell, N. (1986) Estimating the Fundamental Natural Frequency of Towers by Dunkerley's Method. *Journal of Sound and Vibration, Academic Press*, 109, 285–292. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(86\)80009-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(86)80009-8).
- 24 Goloskokov, D.P. (2014) Analyzing Simply Supported Plates Using Maple System. 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications, ICCTPEA 2014 - Proceedings, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 55–56. <https://doi.org/10.1109/ICCTPEA.2014.6893273>.
- 25 Dai, Qiao. (2021) Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. *AlfaBuild*, 17. <https://doi.org/10.34910/ALF.17.1>
- 26 Galishnikova, V. V and Pahl, P.J. (2018) Analysis of Frame Buckling without Sidesway Classification. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14, 299–312. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-4-299-312>.
- 27 Kaveh, A. (2013) Optimal Analysis of Structures by Concepts of Symmetry and Regularity. *Optimal Analysis of Structures by Concepts of Symmetry and Regularity, Springer-Verlag Wien*, 9783709115, 1–463. <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1565-7>.
- 28 Han, Q.H., Xu, Y., Lu, Y., Xu, J. and Zhao, Q.H. (2015) Failure Mechanism of Steel Arch Trusses: Shaking Table Testing and FEM Analysis. *Engineering Structures, Elsevier Ltd*, 82, 186–198. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.10.013>.
- 29 Enrique Luco, J. (2013) Bounds for Natural Frequencies, Dunkerley's Formula and Application to Soil-Structure Interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 47, 32–37. <https://doi.org/10.1016/J.SOILDYN.2012.08.007>.
- 30 Rutenberg, A. (1976) A Lower Bound for Dunkerley's Formula in Continuous Elastic Systems. *Journal of Sound and Vibration, Academic Press*, 45, 249–252. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(76\)90599-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(76)90599-X)
- 31 Levy, C. (1991) An Iterative Technique Based on the Dunkerley Method for Determining the Natural Frequencies of Vibrating Systems. *Journal of Sound and Vibration, Academic Press*, 150, 111–118. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90405-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90405-9).