

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРАПЕЦИЕВИДНАЯ ФЕРМЫ

Дай Цяо

Национальный исследовательский университет «МЭИ»¹
Россия, г. Москва

Аспирант кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(919)9909759; e-mail: 228441531@qq.com

Рассматривается схема плоской фермы с раскосной решеткой. Приводится алгоритм вывода приближенного аналитического решения задачи о собственных колебаний фермы. Используется упрощенный вариант метода Донкерлея. Отмечается высокая точность предложенной формулы. Анализируется спектр собственных частот семейства регулярных ферм различного порядка. Отмечаются некоторые особенности картины распределения частот. Численно находятся спектральные изолинии и спектральные константы задачи.

Ключевые слова: плоская ферма, собственная частота, метод Донкерлея, индукция, Maple, приближенный метод, формула Максвелла — Мора, спектральные изолинии, спектральные константы.

Введение. На практике для расчета собственных частот колебаний инженерных сооружений и конструктивных элементов широко применяются численные методы, в частности, метод конечных элементов [1–3]. При динамическом анализе особый интерес представляет первая частота колебаний статически определимых систем. Для получения аналитических зависимостей частоты от распределения масс по узлам, геометрических параметров, свойств материала и количества панелей традиционно используются методы Донкерлея (дающего нижнюю оценку) и Рэлея (обеспечивающего верхнюю оценку) [4–7]. Это значительно расширяет область применения аналитических формул. Исследования первых частот собственных колебаний регулярных плоских и пространственных статически определимых ферм представлены в работах [8–11]. В таких задачах, как правило, применяется подход парциальных частот Донкерлея, который дает более простое решение по сравнению с энергетическим методом Рэлея [11–13]. Однако точность этих методов варьируется в пределах 8–40%. В работе [14] для решения данной задачи используется метод динамической жесткости, а в [15] предлагается новый подход к выводу аналитических выражений для первой частоты колебаний регулярных систем с множеством степеней свободы.

Конструкция фермы. Симметричная статически определимая плоская трапецевидная ферма имеет треугольную решетку и две опоры. Левая подвижная опора моделируется одним вертикальным стержнем, правая неподвижная — двумя стержнями. Ферма состоит из n панелей по верхнему поясу длиной $4a$ каждая. Высота фермы равна h . Масса фермы условно распределена по узлам равными массами m (рис. 1).

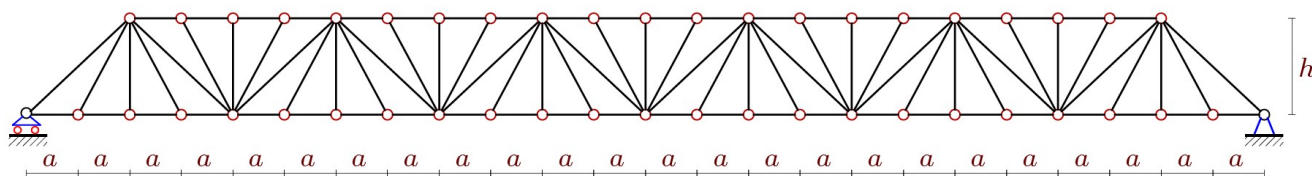


Рис 1. Схема фермы, $n=5$

Число степеней свободы системы равно числу узлов конструкции: $K = 8n + 9$. В ферме содержится $\nu = 16n + 12$ стержней, включая и три опорные стержня.

Расчет усилий в стержнях. Для определения жесткости статически определимой системы необходимо рассчитать усилия в стержнях из условий равновесия узлов. Матрица системы уравнений равновесия формируется на основе направляющих косинусов усилий, вычисляемых по геометрическим параметрам системы: схеме соединения стержней в узлах и координатам узлов. При этом осуществляется нумерация всех узлов и стержневых элементов ферменной конструкции (рис. 2). Фрагмент программного кода, реализующий ввод координат в систему Maple, представлен следующим образом:

```
L0:=16*n*a+7*a:
x[1]:=0:    y[1]:=0:
x[2]:=a:    y[2]:=0:
for i to 4*n+1 do x[i+2]:=a*i+a: y[i+2]:=0: end:
x[4*n+4]:=(4*n+3)*a:    y[4*n+4]:=0:
x[4*n+5]:=(4*n+4)*a: y[4*n+5]:=0:
for i to 4*n+1 do x[i+4*n+5]:=i*a+a: y[i+4*n+5]:=h: end:
x[nu-2]:=0:    y[nu-2]:=-h:
x[nu-1]:=x[4*n+5]+a: y[nu-1]:=0:
x[nu]:=x[4*n+5]: y[nu]:=-h:
```

Здесь nu — число стержней. Уравнения равновесия узлов — это система уравнений в векторном виде: $\mathbf{GS} = \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ — вектор узловых нагрузок, $\mathbf{G}$ — матрица направляющих косинусов размером $\nu \times \nu$, $\mathbf{S}$ — вектор неизвестных усилий в стержнях. В число неизвестных включаются и три опорные реакции. Элементы матрицы $\mathbf{G}$ рассчитываются по координатам концов стержней, соединенных в соответствующих узлах.

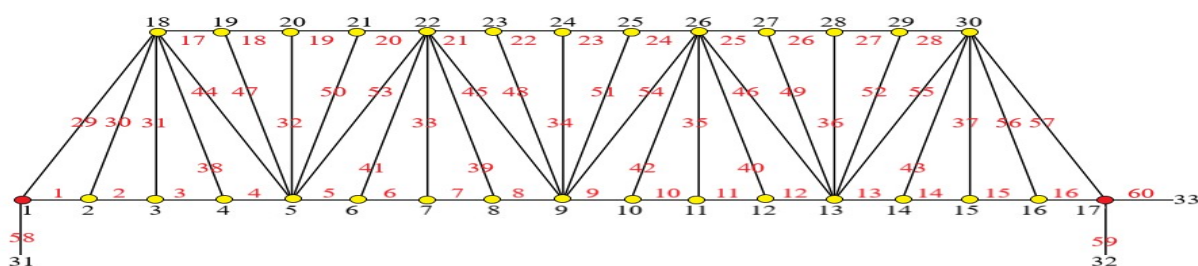


Рис 2. Номера узлов и стержней, $n=3$

Оценка первой частоты собственных колебаний по методу Донкерлея. Расчет первой собственной частоты ω_D производится по приближенной формуле [9-13]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}, \quad (1)$$

где ω_p — частота колебаний одной массы m в узле с номером p , которая вычисляется из уравнения движения масс в узлах:

$$m\ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (2)$$

Коэффициент D_p рассчитывается с помощью формулы Максвелла — Мора суммированием по всем усилиям в стержнях конструкции:

$$\delta_p = 1 / D_p = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(S_{\alpha}^{(p)} \right)^2 l_{\alpha} / (EF), \quad (3)$$

где $S_{\alpha}^{(p)}$ — усилие в стержне α при действии на узел p единичной вертикальной силы, l_{α} — длина этого стержня. Жесткость EF стержней считается для всей фермы одинаковой. Из (3) следует формула для нижней границы первой собственной частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_n. \quad (4)$$

Расчет сумм $\Delta_n = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(S_{\alpha}^{(p)} \right)^2 l_{\alpha} / (EF)$ для последовательности ферм с увеличивающимся числом панелей дает следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (3216a^3 + 96c^3 + 166d^3 + 195h^3) / (16h^2EF), \\ \Delta_2 &= (34952a^3 + 360c^3 + 855d^3 + 697h^3) / (144h^2EF), \\ \Delta_3 &= (192416a^3 + 896c^3 + 2716d^3 + 1703h^3) / (576h^2EF), \\ \Delta_4 &= (726360a^3 + 1800c^3 + 6645d^3 + 3389h^3) / (1600h^2EF), \\ \Delta_5 &= (718608a^3 + 1056c^3 + 4598d^3 + 1977h^3) / (1200h^2EF), \dots \end{aligned}$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $d = \sqrt{4a^2 + h^2}$. Таким образом, решение линейных однородных рекуррентных уравнений, полученных с помощью оператора `rgf_findrecur` в пакете `genfunc` для системы Maple, дает требуемую формулу:

$$\Delta_n = \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3}{h^2 EF}.$$

Выводим полиномиальные коэффициенты по числу панелей:

$$\begin{aligned} C_1 &= 2(2n + 1)(128n^4 + 576n^3 + 1072n^2 + 924n + 315)/(n+1)/45; \\ C_2 &= 4n + 2, \\ C_3 &= ((2n + 1)(16n^2 + 40n + 27))/12/(n+1); \\ C_4 &= (88n^3 + 228n^2 + 206n + 63)/12/(n+1)^2; \end{aligned} \quad (5)$$

Окончательно, формула для определения оценки нижней границы первой частоты методом Донкерлею имеет вид:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3)}}. \quad (6)$$

Упрощенный вариант метода Донкерлея. В работе [15] рассматривается вариант метода Донкерлея для получения аналитической зависимости первой частоты колебаний от числа панелей. В этом методе не требуется сложный этап аналитического преобразования суммирования парциальных частотных выражений по числу степеней свободы. Если это сложение не представляет трудностей при численном решении, то вычисление слагаемых в символической форме не очевидно и часто даже недостижимо. Метод [15] значительно

упрощает процесс решения. Согласно этому методу, расчетная формула для первой частоты собственных колебаний узлов фермы имеет следующий вид:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \delta^{\max} K / 2 = m \Delta_n^*, \quad (7)$$

где $\delta^{\max}$ — наибольшее по всем узлам значение прогиба δ_p , $p = 1, \dots, K$ от действия вертикальной единичной силы на один из узлов фермы. Расчет коэффициента Δ_n^* для последовательности ферм с увеличивающимся числом панелей дает формулы:

$$\begin{aligned} \Delta_1^* &= 7(48a^3 + 2d^3 + h^3) / (2h^2EF), \\ \Delta_2^* &= 11(152a^3 + 3d^3 + 3h^3) / (8h^2EF), \\ \Delta_3^* &= 5(352a^3 + 4d^3 + h^3) / (6h^2EF), \\ \Delta_4^* &= 19(680a^3 + 5d^3 + 3h^3) / (32h^2EF), \\ \Delta_5^* &= 23(1168a^3 + 6d^3 + h^3) / (50h^2EF), \dots \end{aligned}$$

С помощью операторов системы Maple методом индукции можно получить общее представление об элементах этой последовательности в виде:

$$\Delta_n^* = (4n + 3)(B_1a^3 + B_2c^3 + B_3d^3 + B_4h^3) / (h^2EF),$$

где коэффициенты проще, чем (5):

$$\begin{aligned} B_1 &= 4(n + 1)(2n^2 + 4n + 3)/3, \quad B_2 = 0, \\ B_3 &= (n + 1) / 2, \quad B_4 = ((-1)^n + 2) / 2. \end{aligned}$$

В результате получается формула:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{6EF}{m(4n + 3)(16n^3 + 36n^2 + 32n + 6)a^3 + (18n + 59)c^3 + 3d^3 + (3(-1)^n + 6)h^3}}. \quad (8)$$

По сравнению с уравнением (6) и с коэффициентами (5), уравнение (8) значительно лаконичнее. На конкретном примере можно сравнить степень приближения полученных формул с численными методами, которые не были упрощены по Донкерлею.

Численное решение. Принимаются следующие размеры панели фермы: $a = 3\text{м}$, $h = 4\text{м}$. Материал стержней — сталь, модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, площадь поперечного сечения стержней $F = 4 \text{ см}^2$, в узлах расположены массы $m = 100\text{кг}$. На графике 3 кривые зависимости частот ω_D и ω_* от числа панелей по формулам (6) и (8) сопоставлены с первой частотой спектра ω_1 , полученной численно. С увеличением числа панелей все три решения сближаются, а частота уменьшается, стремясь асимптотически к нулю. Кривые II и III практически сливаются. Решение по методу Донкерлея (пунктир на рисунке 3), как и ожидалось, ограничивает численное решение снизу. Однако при этом приближенное аналитическое решение (8) не только проще, чем по методу Донкерлею (6), но и ближе к численному решению.

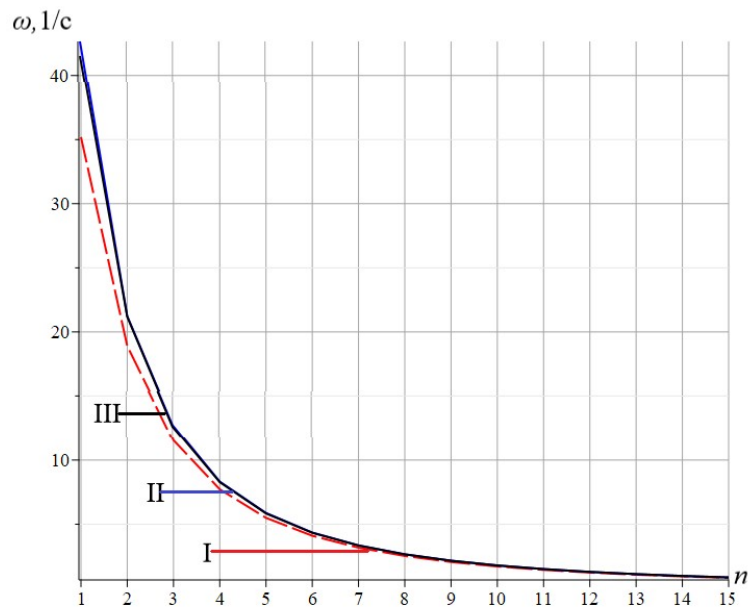


Рис 3. Сравнение аналитических решений с численным.

I — нижняя оценка ω_D по Донкерлею (6), II — приближенный метод ω_* (8), III — первая частота спектра ω_1

Для более точной оценки погрешностей методов введем относительные величины:

$$\varepsilon_D = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1, \quad \varepsilon_* = (\omega_* - \omega_1) / \omega_1.$$

На рисунке 4 показана зависимость погрешности от количества панелей при $a = 3$ м для различных значений высоты h . Погрешность упрощенного решения в несколько раз меньше погрешности метода Донкерлея и зависит от высоты фермы h . Это особенно заметно, когда число панелей невелико. С увеличением числа панелей кривые сближаются.

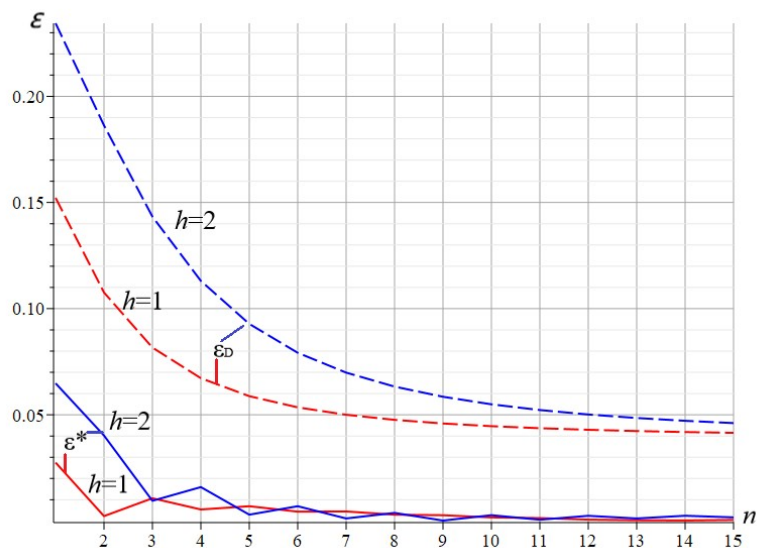


Рис 4. Погрешность оценки основной частоты по Донкерлею ε_D и приближенному методу ε_*

Спектр регулярных ферм. На рисунке 5 точками обозначены частоты спектров собственных колебаний ферм разных порядков, рассчитанные для случаев $a = 3$ м и $h = 1$ м. Применяя математический аппарат, используемый для нахождения первой частоты в режиме численного расчета, на графике показывается распределение частот ферм разных порядков.

Это позволяет выявить некоторые свойства распределения спектральных множеств. Каждая кривая соответствует ферме определенного порядка. Ординаты точек на ней — это частоты. Горизонтальная ось представляет номера собственных частот в упорядоченном спектре. Высшие частоты ферм порядков $n=1$, $n=2$, .. лишь немного отличаются от высших частот ферм порядка $n=19$, $n=20$, .. Это дает возможность, ориентируясь на расчет ферм с 1-2 панелями, сравнительно легко оценить границы изменений собственных частот ферм большого порядка, для анализа которых требуются существенные вычислительные ресурсы и время.

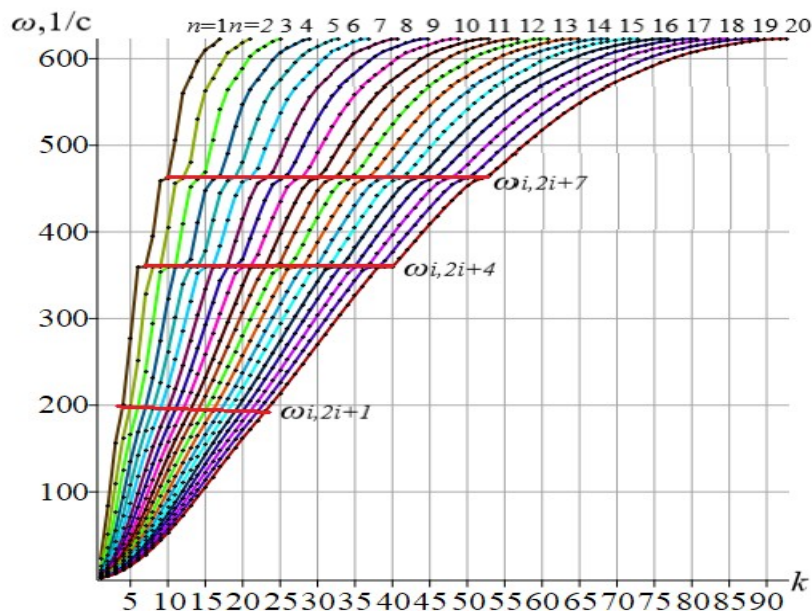


Рис 5. Спектры семейства регулярных ферм порядков $n=1 - 20$.

Спектральные изолинии для низких частот показаны на рисунке 6. Прослеживаются и спектральные константы $\omega_{8i,i}$, $\omega_{10i,i}$, $\omega_{12i,i}$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Изолинии асимптотически стремятся к спектральным константам.

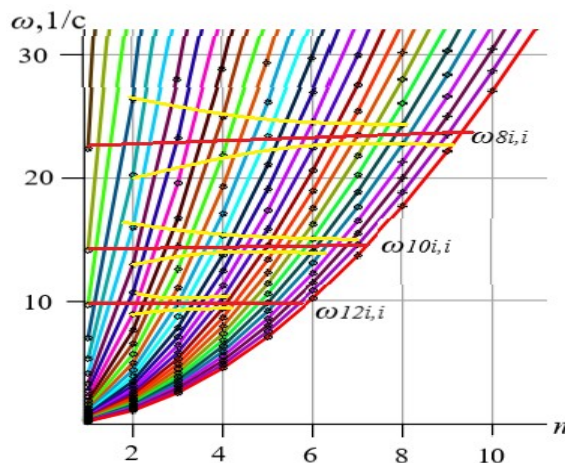


Рис 6. Низкочастотные спектральные константы и изолинии семейства регулярных ферм порядков $n=1 - 20$.

Заключение. В работе рассмотрена новая схема плоской трапецевидной фермы. Различными методами получены две аналитические формулы для зависимости основной частоты собственных колебаний плоской фермы от количества панелей. Замечено, что точность формул увеличивается с ростом числа панелей. Результаты показывают, что формула, альтернативная формуле Донкерлею, не только проще, но и точнее. На графиках

распределения собственных частот семейств регулярных ферм разных порядков выявлены спектральные изолинии и спектральные константы, что позволяет получить решения для регулярных ферм высоких порядковых номеров из расчетных данных ферм с малым количеством панелей.

Библиографический список

1. Агапов В. П., Айдемиров К. Р. Расчет ферм методом конечных элементов с учетом геометрической нелинейности // Промышленное и гражданское строительство. 2016. №. 11. С. 4–7.
2. Игнатьев В.А., Игнатьев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. 306 с.
3. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section // Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). Pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 17.04.2021)
4. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
5. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2021. №2 (29). С. 29-37.
6. Комерзан Е. В., Ниналалов И.Г., Свириденко О. В. Расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. №4(39). С. 27-34
7. Комерзан Е.В., Маслов А.Н. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. №2(37). С.17-26. doi 10.36622/VSTU.2023.37.2.002
8. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 101. Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
9. Kirsanov M., Saypulaev G., Saypulaev M. Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss // AlfaBuild. 2023. 29 Article No 2902. doi: 10.57728/ALF.29.2
10. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // Magazine of Civil Engineering. 2022. 111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
11. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 109 Article No 10912. doi: 10.4123/CUBS.109.12
12. Щиголь Е.Д. Формула для нижней оценки собственных колебаний плоской регулярной балочной фермы с прямолинейным верхним поясом // Строительная механика и конструкции. 2023. №2(37). С.46-53. doi 10.36622/VSTU.2023.37.2.005
13. Dai Qiao Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // AlfaBuild. 2021. 17. Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
14. Liu X., Zhao Y., Zhou W., Banerjee J.R. Dynamic stiffness method for exact longitudinal free vibration of rods and trusses using simple and advanced theories // Applied Mathematical Modelling. 2022. 104. Pp. 401–420. doi:10.1016/J.APM.2021.11.023.
15. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 108. Article No 10801. doi: 10.4123/CUBS.108.1

References

1. Agapov V.P., Aydemirov K.R. Calculation of trusses using the finite element method taking into account geometric nonlinearity. *Industrial and Civil Construction*. 2016. 11. Pp. 4–7.
2. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
3. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2012. 3(3). Pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 17.04.2021)
4. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
5. Komerzan E.V., Sviridenko O. V. Analytical calculation of the deflection of a plane external statically undetermined truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and Structures*, 2021. 2(29). 29-30.
6. Komerzan E.V., Ninalalov I.G., Sviridenko O.V. Calculation of the fundamental frequency of natural vibrations of a plane model of a composite truss. *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 4(39). Pp. 27-34
7. Komerzan E.V., Maslov A.N. Analytical evaluation of a regular truss natural oscillations fundamental frequency. *Structural mechanics and structures*. 2023. 2(37). Pp. 17-26. doi 10.36622/VSTU.2023.37.2.002
8. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101. Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
9. Kirsanov, M., Saypulaev, G., Saypulaev, M. Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss. *AlfaBuild*. 2023. 29 Article No 2902. doi: 10.57728/ALF.29.2
10. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. *Magazine of Civil Engineering*. 2022. 111(3). Article 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
11. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 109. Article No 10912. doi: 10.4123/CUBS.109.12
12. Shchigol E.D. The formula for the lower estimate of the natural oscillations of a flat regular girder truss with a rectilinear upper belt. *Structural mechanics and structures*. 2023. 2(37). Pp. 46-53. doi 10.36622/VSTU.2023.37.2.005
13. Dai Qiao Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. 2021. *AlfaBuild*. 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
14. Liu X., Zhao, Y., Zhou W., Banerjee J.R. Dynamic stiffness method for exact longitudinal free vibration of rods and trusses using simple and advanced theories. *Applied Mathematical Modelling*. 2022. 104. Pp. 401–420. doi:10.1016/J.APM.2021.11.023.
15. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 108. Article No 10801. doi: 10.4123/CUBS.108.1

DERIVATION OF A FORMULA FOR THE FIRST FREQUENCY TRAPEZOID TRUSS NATURAL OSCILLATIONS

Dai Qiao

National Research University "MPEI,
Russia, Moscow

Graduate student of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of
Machines, Tel.: +7(919)9909759; e-mail: 228441531@qq.com

A planar truss with a diagonal lattice is considered. An algorithm for deriving an approximate analytical solution to the problem of the truss's natural vibrations is presented. A simplified version of the Dunkerley method is used. The high accuracy of the proposed formula is noted. The spectrum of natural frequencies of a family of regular trusses of varying order is analyzed. Some features of the frequency distribution are noted. Spectral isolines and spectral constants of the problem are numerically determined.

Key words: planar truss, natural frequency, Dunkerley method, induction, Maple, approximate method, Maxwell-Mohr formula, spectral isolines, spectral constants.