

М.Н. КИРСАНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф., Ц. ДАЙ

Национальный исследовательский университет «МЭИ», e-mail: mpei2004@yandex.ru

## ЗАВИСИМОСТЬ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОЙ ШПРЕНГЕЛЬНОЙ ФЕРМЫ ОТ ЧИСЛА ПАНЕЛЕЙ

Предлагается схема статически определимой плоской фермы с нисходящими раскосами и шпренгельным упрочнением. Решаются задачи о нижней и верхней границе основной собственной частоты свободных колебаний конструкции. Принята модель с массами, сосредоточенными в узлах. Для нахождения формулы зависимости границ частоты колебаний от числа панелей используются методы Донкерлея и Рэлея. Выражения для усилий в стержнях фермы находятся из решения системы линейных уравнений равновесия всех узлов. Для получения матрицы системы уравнений используются операторы компьютерной математики Maple. Жесткость конструкции рассчитывается по формуле Максвелла-Мора. Последовательность решений, полученных для ферм с разным числом панелей, обобщается на произвольный случай методом индукции. Для коэффициентов формулы в искомом решении составляются и решаются однородные линейные рекуррентные уравнения. Полученное решение сравнивается с численным решением задачи о спектре колебаний конструкции с многими степенями свободы. Показано, что первая частота спектра близка к ее аналитической оценке. С увеличением числа панелей в ферме точность выведенных формул растет.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00473).

**Ключевые слова:** плоская ферма, система компьютерной математики, индукция, число панелей, первая частота колебаний, нижняя оценка, метод Донкерлея, метод Рэлея.

### Постановка задачи

В задаче анализа спектра собственных частот строительных конструкций исследование границ первой (низшей) частоты является основным вопросом. Традиционный метод вычисления частот собственных колебаний – это численный, реализуемый, как правило, с использованием метода конечных элементов [1-3]. Известны и аналитические подходы [4, 5]. Они, как правило, дают приближенные оценки границ изменения первой частоты. Аналитические решения для первой частоты плоских регулярных ферм с произвольным числом панелей методом Донкерлея получены в [6,7] методом индукции. Аналогичные решения для пространственных ферм найдены в [8,9]. Общие вопросы существования и расчета статически определимых регулярных стержневых конструкций рассмотрели Hutchinson R.G. и Fleck N.A. в [10, 11]. Двухсторонняя оценка первой частоты колебаний фермы в аналитической форме с применением метода Рэлея выведена в [12]. Проблемой классификации регулярных ферм и их оптимизации занимался Kaveh A. [13]. Справочник [14] содержит различные схемы плоских статически определимых регулярных ферм и формулы для расчета их прогибов в зависимости от числа панелей при различном нагружении, полученные в системе компьютерной математики Maple методом индукции.

### Расчетная модель фермы

Балочная симметричная статически определимая ферма имеет шпренгельную решетку (рис. 1). Шпренгельные элементы уменьшают расчетные длины элементов сжатого при обычной нагрузке верхнего пояса и тем самым увеличивают устойчивость конструкции. Высота фермы равна  $2h$ , длина пролета  $4na$ . Число стержней фермы с учетом трех опорных стержней  $\eta = 16n + 4$ .

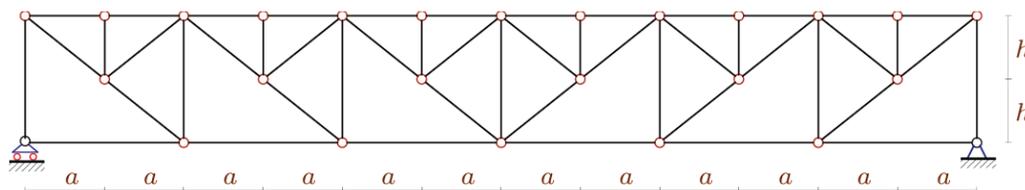


Рисунок 1. Схема фермы,  $n = 3$

Расчет частот колебаний фермы производится в системе Maple. Стержни и узлы фермы ну-

меруются (рис. 2). Подвижная (левая) опора моделируется вертикальным стержнем, неподвижная – двумя стержнями. Данные о ферме в параметрической форме (параметр  $n$  – число панелей в половине пролета) вводятся в программу [15]. Начало координат выбирается в левой подвижной опоре. Фрагмент программы задания координат узлов на языке Maple с использованием циклов с длиной, зависящей от порядка фермы, имеет вид:

```
> for i to 2*n+1 do x[i]:=2*a*(i-1); y[i]:=0; end:
> for i to 2*n do x[i+2*n+1]:=2*a*i-a; y[i+2*n+1]:=h; end:
> for i to 4*n+1 do x[i+4*n+1]:=a*(i-1); y[i+4*n+1]:=2*h; end:
```

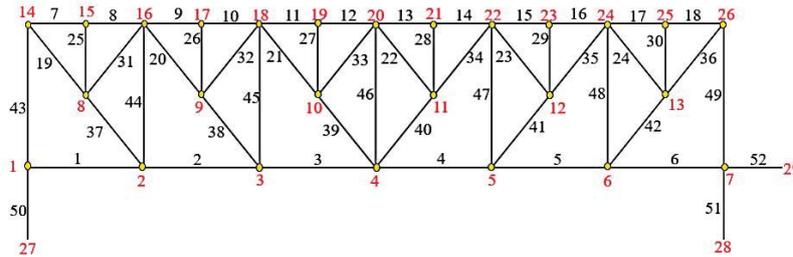


Рисунок 2. Нумерация стержней и узлов фермы,  $n = 3$

Все стержни конструкции предполагаются линейно упругими. Усилия в стержнях фермы вместе с реакциями опор находятся в символьной форме из решения системы линейных уравнений равновесия узлов:  $G\bar{S} = \bar{T}$ , где  $G$  – матрица, составленная из направляющих косинусов усилий по данным о координатах узлов и структуре решетки [15],  $\bar{T}$  – вектор внешних узловых нагрузок,  $\bar{S}$  – вектор неизвестных усилий в стержнях.

### Расчет собственных частот

Принята модель фермы с одинаковыми массами  $m$ , сконцентрированными в узлах. Каждая масса имеет одну степень свободы, горизонтальные смещения масс не рассматриваются. Таким образом, в принятой постановке число степеней свободы равно  $N$ , где  $N = 8n + 2$  – число внутренних узлов конструкции.

Система дифференциальных уравнений колебаний масс записывается в виде:

$$M_N \ddot{U} + D_N U = 0, \quad (1)$$

где  $U = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$  – вектор вертикальных смещений масс,  $M_N$  – матрица инерции размером  $N \times N$ ,  $\ddot{U}$  – вектор всех ускорений масс,  $D_N$  – матрица жесткости фермы. Так как массы во всех узлах одинаковые, то матрица инерции пропорциональна единичной матрице:  $M_N = mI_N$ . Обратной матрицей к матрице жесткости  $D_N$  является матрица податливости  $B_N$ , для нахождения которой используется формула Максвелла-Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^n S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

где сумма составляется для всех стержней фермы,  $EF$  – жесткость стержней,  $S_{\alpha}^{(i)}$  – усилия в стержне  $\alpha$  от действия единичной по оси  $y$  силы на узел  $i$ ,  $l_{\alpha}$  – длина стержня  $\alpha$ . Умножение матричного уравнения (1) на матрицу податливости  $B_N$  слева с учетом замены тождества  $\ddot{U} = -\omega^2 U$ , справедливого для гармонических колебаний, сводит задачу к проблеме собственных чисел матрицы податливости  $B_{2N}$ :  $B_N U = \lambda U$ , где  $\lambda = 1 / (m\omega^2)$  – собственные числа матрицы  $B_N$ ,  $\omega$  – собственная частота колебаний фермы. Эта задача в общем случае решается численно.

Одно из приближенных решений задачи о нижней границе первой собственной частоты было предложено Донкерлеем. Решение по этому методу сводилось к расчету парциальных частот. В [16, 17] изучен модифицированный метод Донкерлея. Приближенный вариант метода Донкерлея применительно к аналитическому расчету нижней границы основной частоты регулярных ферм предложен в [18]. Оценка первой частоты колебаний по Донкерлею имеет вид:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^N \omega_i^{-2} = \Delta. \quad (3)$$

Сумма  $\Delta$  зависит от парциальных частот колебаний масс. Уравнение (1) для одной массы – это скалярное уравнение вида:  $m\ddot{u}_i + d_i u_i = 0$ , где  $u_i$  – смещение массы,  $\ddot{u}_i$  – ее ускорение,  $d_i$  – коэффициент жесткости. Парциальная частота колебаний массы выражается по формуле:  $\omega_i = \sqrt{d_i / m}$ . Коэффициент  $d_i$  вычисляется как обратный к коэффициенту податливости, который находится по формуле Максвелла-Мора:  $\delta_i = 1 / d_i = \sum_{\alpha=1}^{\eta} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)2} l_{\alpha} / (EF)$ . Таким образом,

$$\omega_i^{-2} = m / d_i = m \sum_{\alpha=1}^{\eta} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)2} l_{\alpha} / (EF).$$

Значение  $\Delta$  в (3) вычисляется суммированием по стержням и степеням свободы:

$$\Delta = m \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^{\eta} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)2} l_{\alpha} / (EF).$$

Расчет ферм с увеличивающимся числом панелей дает последовательность сумм  $\Delta$ , каждая из которых есть нижняя оценка первой частоты фермы соответствующего порядка:

$$\begin{aligned} \Delta(1) &= m \ 14a^3 + 12c^3 + 49h^3 / (2h^2 EF), \\ \Delta(2) &= m \ 240a^3 + 92c^3 + 211h^3 / (4h^2 EF), \\ \Delta(3) &= m \ 4706a^3 + 642c^3 + 1639h^3 / (18h^2 EF), \\ \Delta(4) &= m \ 6256a^3 + 712c^3 + 1119h^3 / (8h^2 EF), \\ \Delta(5) &= m \ 18606a^3 + 1380c^3 + 1993h^3 / (10h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Операторы системы Марле находят линейные однородные рекуррентные уравнения, которым удовлетворяют члены полученных последовательностей. Из решения рекуррентных уравнений получается обобщение решений на случай произвольного числа панелей:

$$\Delta = m \ C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3 / (h^2 EF), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= (128n^4 + 140n^2 + 45n + 2) / 45, \\ C_2 &= (16n^2 + 3n - 1) / 3, \\ C_3 &= (32n^3 + 68n^2 + 58n - 11) / (6n). \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда следует, что нижняя оценка первой собственной частоты колебаний конструкции имеет вид:

$$\omega_D = h \sqrt{EF / (m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h))}. \quad (6)$$

#### Метод Рэлея

Метод Рэлея основан на законе сохранения энергии. В каждом цикле гармонических колебаний происходит переход энергии деформации из потенциальной в кинетическую и наоборот. Имеет место равенство:

$$T_{max} = \Pi_{max} \quad (7)$$

Отсюда следует формула Рэлея для верхней оценки первой частоты. Кинетическая энергия системы всех масс  $m$ , расположенных в узлах структуры, имеет вид:

$$T = \sum_{i=1}^N m v_i^2 / 2.$$

Если вертикальные смещения масс меняются по закону  $u_i \sin(\omega t + \varphi_0)$ , то скорость массы  $i$  имеет вид:  $v_i = \omega u_i \cos(\omega t + \varphi_0)$ . Максимальная кинетическая энергия соответствует  $\max \cos(\omega t + \varphi_0) = 1$ . Отсюда:

$$T_{\max} = \omega^2 m \sum_{i=1}^N u_i^2 / 2, \quad (8)$$

где амплитуда вертикального смещения вычисляется по формуле Максвелла-Мора:

$$u_i = \sum_{\alpha=1}^{\eta} S_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (EF) = P \sum_{\alpha=1}^{\eta} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (EF) = P \tilde{u}_i \quad (9)$$

Здесь обозначено:  $S_{\alpha}^{(P)}$  – усилие в стержне  $\alpha = 1, \dots, \eta$  от действия нагрузки  $P$ , равномерно распределенной по всем узлам,  $\tilde{S}_{\alpha}^{(i)}$  – усилие в стержне от одной (безразмерной) нагрузки, приложенной к массе с номером  $i$ ,  $\tilde{S}_{\alpha}^{(P)\alpha} = S_{\alpha}^{(P)} / P$ . Принимается, что форма колебаний системы масс с основной частотой приблизительно совпадает с формой прогиба конструкции от равномерной нагрузки. Отсюда следует, что выражение для кинетической энергии системы масс (8) имеет вид:

$$T_{\max} = P^2 \omega^2 \sum_{i=1}^N m \tilde{u}_i^2 / 2, \quad (10)$$

где  $\tilde{u}_i = u_i / P = \sum_{\alpha=1}^{\eta} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (EF)$  – амплитуда перемещений массы с числом  $i$  под действием распределенной нагрузки, отнесенной к значению  $P$ .

Потенциальная энергия деформации упругих стержней:

$$\Pi_{\max} = \sum_{\alpha=1}^{\eta} S_{\alpha}^{(P)} \Delta l_{\alpha} / 2 = \sum_{\alpha=1}^{\eta} (S_{\alpha}^{(P)})^2 l_{\alpha} / (2EF). \quad (11)$$

Вследствие линейности задачи по нагрузке:  $S_{\alpha}^{(P)} = P \sum_{i=1}^N \tilde{S}_{\alpha}^{(i)}$ . Отсюда вытекает

$$\Pi_{\max} = P^2 \sum_{\alpha=1}^{\eta} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \sum_{i=1}^N \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (2EF) = P^2 \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^{\eta} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (2EF) = P^2 \sum_{i=1}^N \tilde{u}_i / 2. \quad (12)$$

Из (7), (8) и (10) следует формула для верхней оценки первой частоты колебаний фермы по Рэлею:

$$\omega_R^2 = \sum_{i=1}^N \tilde{u}_i / \sum_{i=1}^N m \tilde{u}_i^2. \quad (13)$$

Обобщение ряда решений для перемещения  $\tilde{u}_i$  при различных  $n$  дает зависимость частоты от порядка регулярности конструкции. Выражения для сумм  $\sum_{i=1}^N \tilde{u}_i$  и  $\sum_{i=1}^N \tilde{u}_i^2$  рассматриваются отдельно.

Расчет смещений узлов для ферм с разным количеством панелей показывает, что решение для суммы  $\sum_{i=1}^N \tilde{u}_i$  в числителе (13) имеет вид:

$$\sum_{i=1}^N \tilde{u}_i = (C_a a^3 + C_c c^3 + C_h h^3) / (h^2 EF), \quad (14)$$

где коэффициенты  $C_1, C_2, C_3$  получаются методом индукции обобщением последовательностей:

## Уважаемые читатели!

Индекс подписки 18317 в электронном подписном каталоге УРАЛ-ПРЕСС на сайте  
[www.ural-press.ru](http://www.ural-press.ru).

В редакции можно купить любой номер журнала или его электронную версию  
([stroytex@list.ru](mailto:stroytex@list.ru)).

$$\begin{aligned}
 n = 1, \quad \sum_{i=1}^N \tilde{u}_i &= (36a^3 + 28c^3 + 134h^3) / (h^2 EF), \\
 n = 2, \quad \sum_{i=1}^N \tilde{u}_i &= (664a^3 + 200c^3 + 540h^3) / (h^2 EF), \\
 n = 3, \quad \sum_{i=1}^N \tilde{u}_i &= (4508a^3 + 644c^3 + 1362h^3) / (h^2 EF), \\
 n = 4, \quad \sum_{i=1}^N \tilde{u}_i &= (18288a^3 + 1488c^3 + 2728h^3) / (h^2 EF), \dots
 \end{aligned} \tag{15}$$

В результате получаются коэффициенты:

$$\begin{aligned}
 C_a &= n(256n^4 + 160n^2 + 120n + 4) / 15, \\
 C_c &= n(64n^2 + 24n - 4) / 3, \\
 C_h &= (64n^3 + 240n^2 + 50n + 48) / 3.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Знаменатель (17) имеет более сложную форму:

$$\sum_{k=1}^N m\tilde{u}_k^2 = m(C_{aa}a^6 + C_{cc}c^6 + C_{hh}h^6 + C_{ah}a^3h^3 + C_{ac}a^3c^3 + C_{ch}c^3h^3) / (h^4 E^2 F^2), \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}
 C_{aa} &= 2n(63488n^8 + 84864n^6 + 48384n^5 + 32928n^4 + 45360n^3 + 18286n^2 + 11151n + 1719) / 2835, \\
 C_{cc} &= n(1024n^4 + 640n^3 + 160n^2 + 140n + 1) / 15, \\
 C_{hh} &= 2(512n^5 + 3200n^4 + 6320n^3 + 2350n^2 + 2303n + 375) / 15, \\
 C_{ac} &= 2n(17408n^6 + 5376n^5 + 11648n^4 + 11760n^3 + 3752n^2 + 2709n + 267) / 315, \\
 C_{ah} &= 2n(17408n^6 + 53760n^5 + 12992n^4 + 56280n^3 + 28532n^2 + 11865n + 4383) / 315, \\
 C_{ch} &= 2(1024n^5 + 3520n^4 + 1360n^3 + 815n^2 + 196n - 60) / 15.
 \end{aligned} \tag{18}$$

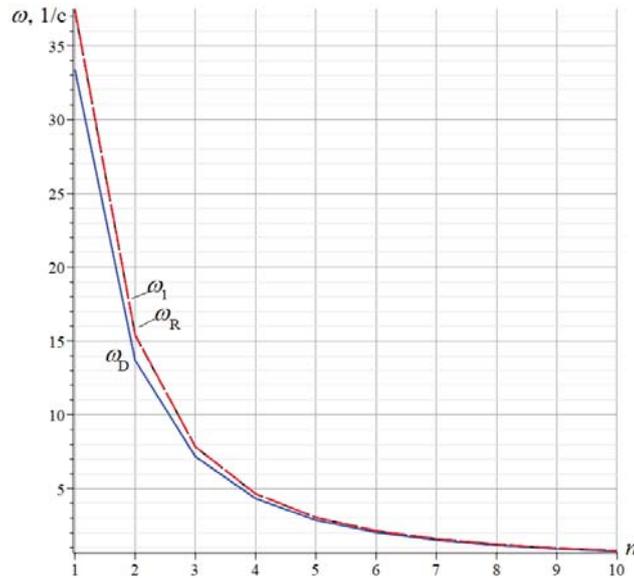
Таким образом, верхняя оценка первой частоты фермы, в зависимости от количества панелей, может быть получена по формуле Рэлея:

$$\omega_R = h \sqrt{\frac{EF(C_a a^3 + C_c c^3 + C_h h^3)}{m(C_{aa} a^6 + C_{cc} c^6 + C_{hh} h^6 + C_{ah} a^3 h^3 + C_{ac} a^3 c^3 + C_{ch} c^3 h^3)}}. \tag{19}$$

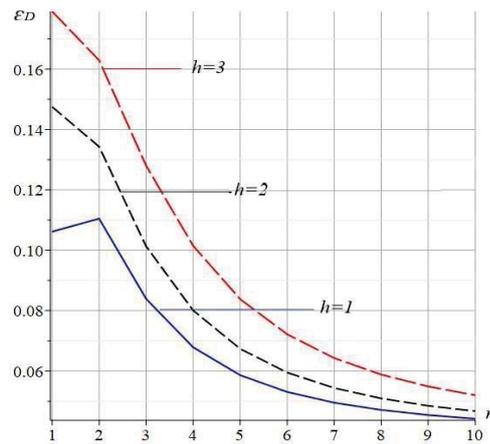
Коэффициенты (16) и (18) в этой формуле зависят только от порядка регулярности  $n$  фермы. Структура формулы (19) близка к формуле Донкерлея (6), но при этом решение (6) значительно проще.

Для оценки погрешности полученного решения можно сравнить его с численным значением первой частоты полного спектра колебаний системы с  $N$  числом степеней свободы. Собственные числа матрицы  $B_N$  в системе Maple можно определить оператором *Eigenvalues* из пакета *LinearAlgebra*. На графике (рис. 3) показаны зависимости первой частоты спектра, полученного численно и методом Донкерлея по формуле (6) с коэффициентами (5). Для модуля упругости стали принято значение  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, площадь сечений стержней:  $F = 9$  см<sup>2</sup>, размеры фермы:  $a = 3$  м,  $h = 1$  м, массы в узлах:  $m = 400$  кг. С увеличением числа панелей увеличивается пролет конструкции, а первая частота собственных колебаний уменьшается. Решение (6) дает нижнюю границу первой частоты. Кривые зависимости частоты по формуле Рэлея и частоты, полученной численно, на графике почти совпадают.

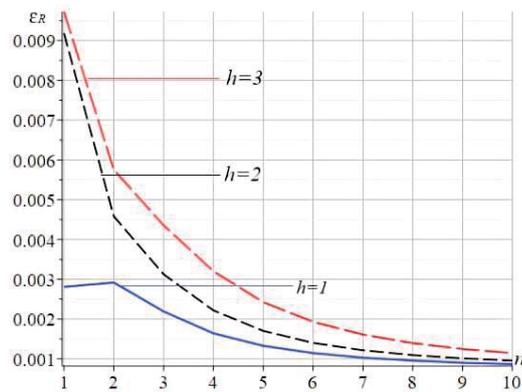
Для численной оценки относительной погрешности аналитического решения вводится безразмерная величина:  $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$  (рис. 4). Точность аналитического решения с увеличением числа панелей при  $n > 3$  заметно увеличивается. На рисунке 5 показана зависимость погрешности метода Рэлея от числа панелей, рассчитанная по этой же формуле для трех значений высоты фермы.



**Рисунок 3.** Зависимость от количества панелей первой частоты колебаний  $\omega_R$  по методу Рэлея, частоты  $\omega_D$  по методу Донкерлея и первой частоты  $\omega_1$  спектра, полученного численно



**Рисунок 4.** Относительная погрешность нижней оценки частоты колебаний по Донкерлею  $\varepsilon_D$



**Рисунок 5.** Относительная погрешность верхней оценки частоты колебаний по Рэлею  $\varepsilon_R$ . Для ферм с меньшей высотой  $h$  точность аналитического решения по Рэлею больше.

**Заключение**

Предложена математическая модель для аналитического расчета основной частоты собственных колебаний статически определимой балочной фермы со шпренгельным упрочнением решетки. Методом индукции выведены формулы для нижней и верхней границ частоты колебаний фермы в предположении, что масса фермы сосредоточена в ее узлах, а колебания узлов вертикальные. Используются метод парциальных частот Донкерлея и энергетический метод Рэлея. Последний метод дал существенно большую точность, но и более громоздкую расчетную формулу. Выведенные формулы справедливы при любом числе панелей в ферме, что позволяет использовать их для простого тестирования численных решений сложных ферм такого типа.

**Список литературы**

1. Игнатьев В.А., Игнатьев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). – М.: Издательство АСВ, 2022. – 306 с.
2. Коваленко Г.В. Исследование частот собственных колебаний ферм на основе метода конечных элементов (МКЭ) / Г.В. Коваленко, В.Б. Макеев, В.В. Дементьева // Молодая мысль: Наука, технологии, инновации. – 2015. – С. 44-48.
3. Власов А.Ю. Статический и модальный анализ силовой конструкции прецизионного крупногабаритного антенного рефлектора из полимерных композиционных материалов / А.Ю. Власов, Н.А. Амельченко, К.А. Пасечник, М.А. Титов, М.В. Сержантова // Сибирский аэрокосмический журнал. – 2017. – № 18 (4). – С. 897-901.
4. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. No. 3 (101). Article no. 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
5. Petrenko V.F. The natural frequency of a two-span truss. AlfaBuild. 2021. 20. Pp. 2001. DOI:10.34910/ALF.20.1.
6. Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты двухпролётной фермы с учётом жесткости опор // Строительная механика и конструкции. – 2021. – № 4 (31). – С. 16-25.
7. Петриченко Е.А. Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // Строительная механика и конструкции. – 2020. – №3 (26). – С. 21-29.
8. Кирсанов М.Н. Деформации и собственная частота колебаний фермы пространственной модели многоэтажного здания // Вестник МГСУ. – 2022. – Т. 17. – Вып. 5. – С. 580-588. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.5.580-588
9. Kirsanov M. N. Model of a spatial dome cover. Deformations and oscillation frequency // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. No. 1 (99). Article no. 9904. DOI: 10.4123/CUBS.99.4.
10. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. No. 85 (9). Pp. 607-617. DOI:10.1002/zamm.200410208.
11. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures. J. Mech. Phys. Solids. 2003. No. 51. Pp. 383-391.
12. Vorobev O.V. Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. No. 7 (92). Pp. 9204-9204. DOI:10.18720/CUBS.92.4.
13. Kaveh A. Optimal analysis of structures by concepts of symmetry and regularity. New York: Springer, 2013. 463 p.
14. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. – М.: ИНФРА-М, 2019. – 238 с.
15. Buca-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuk D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. Bulletin of MGSU. 2020. No. 4. Pp. 510-517. DOI:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.
16. Levy C. An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems. Journal of Sound and Vibration. 1991. 150(1). Pp. 111-118. DOI:10.1016/0022-460X(91)90405-9.
17. Low K.H. Modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses. International Journal of Mechanical Sciences. 2000. No. 42 (7). Pp. 1287-1305. DOI:10.1016/S0020-7403(99)00049-1.
18. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. No. 108. Article no. 10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1.

**Dependence of the fundamental frequency of natural oscillations of a planar sprengel truss on the number of panels**

M.N. Kirsanov, Q. Dai, National Research University “MPEI”; e-mail: mpei2004@yandex.ru

*Abstract.* A scheme of a statically determined planar truss with downward braces and truss reinforcement is proposed. The problems of the lower and upper boundaries of the main natural frequency of free oscillations of the structure are solved. A model with masses concentrated at the nodes is adopted. To find the formula for the dependence of the oscillation frequency limits on the number of panels, the Dunkerley and Rayleigh methods are used. The expressions for the forces in the truss rods are found from the solution of the system of linear equilibrium equations for all nodes. To obtain the matrix of the system of equations, Maple computer mathematics operators are used. The rigidity of the structure is calculated using the Maxwell – Mohr formula.

*The sequence of solutions obtained for trusses with different numbers of panels is generalized by induction to an arbitrary case. For the coefficients of the formula in the desired solution, homogeneous linear recurrent equations are compiled and solved. The obtained solution is compared with the numerical solution of the problem of the oscillation spectrum of a structure with many degrees of freedom. It is shown that the first frequency of the spectrum is close to its analytical estimate. With an increase in the number of panels in the truss, the accuracy of the derived formulas increases.*

*The research was funded by the Russian Science Foundation (project No. 22-21-00473).*

**Keywords:** planar truss, computer mathematics system, induction, number of panels, first oscillation frequency, lower bound, Dunkerley's method, Rayleigh's method.

### References

1. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p. (in Russian).
2. Kovalenko G.V., Makeev V.B., Dementieva V.V. Investigation of natural frequencies of trusses based on the finite element method (FEM). Young thought: Science, technology, innovation. 2015. Pp. 44-48 (in Russian).
3. Vlasov A.Yu., Amelchenko N.A., Pasechnik K.A., Titov M.A., Serzhantova M.V. Static and modal analysis of the power structure of a precision large-sized antenna reflector made of polymer composite materials. Siberian Aerospace Journal. 2017. No. 18 (4). Pp. 897-901 (in Russian).
4. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. No. 3 (101). Article no. 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
5. Petrenko V.F. The natural frequency of a two-span truss. AlfaBuild. 2021. 20. Pp. 2001. DOI:10.34910/ALF.20.1.
6. Petrenko V.F. Evaluation of the natural frequency of a two-span truss, taking into account the rigidity of the supports. Structural mechanics and structures. 2021. No. 4 (31). Pp. 16-25 (in Russian).
7. Petrichenko E.A. The lower limit of the frequency of natural vibrations of the Fink truss. Structural mechanics and structures. 2020. No. 3 (26). Pp. 21-29 (in Russian).
8. Kirsanov M.N. Deformations and natural oscillation frequency of the farm of a spatial model of a multi-storey building. Bulletin MGSU. 2022. Vol. 17. Iss. 5. Pp. 580-588. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.5.580-588 (in Russian).
9. Kirsanov M.N. Model of a spatial dome cover. Deformations and oscillation frequency // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. No. 1 (99). Article no. 9904. DOI: 10.4123/CUBS.99.4.
10. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. No. 85 (9). Pp. 607-617. DOI:10.1002/zamm.200410208.
11. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures. J. Mech. Phys. Solids. 2003. No. 51. Pp. 383-391.
12. Vorobev O.V. Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. No. 7 (92). Pp. 9204-9204. DOI:10.18720/CUBS.92.4.
13. Kaveh A. Optimal analysis of structures by concepts of symmetry and regularity. New York: Springer, 2013. 463 p.
14. Kirsanov M.N. Planar trusses. Schemes and formulas: a reference book. M.: INFRA-M, 2019. 238 p. (in Russian).
15. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuk D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. Vestnik MGSU. 2020. No. 4. Pp. 510-517. DOI:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.
16. Levy C. An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems. Journal of Sound and Vibration. 1991. 150(1). Pp. 111-118. DOI:10.1016/0022-460X(91)90405-9.
17. Low K.H. Modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses. International Journal of Mechanical Sciences. 2000. No. 42 (7). Pp. 1287-1305. DOI:10.1016/S0020-7403(99)00049-1.
18. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. No. 108. Article no. 10801. doi: 10.4123/CUBS.108.1.

**Для цитирования:** Кирсанов М.Н., Цяо Дай. Зависимость основной частоты собственных колебаний плоской шпренгельной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2023. № 5. С. 30–37. DOI: 10.37538/0039-2383.2023.5.30.37

**For citation:** Kirsanov M.N., Qiao Dai. Dependence of the fundamental frequency of natural oscillations of a planar sprenkel truss on the number of panels. Structural Mechanics and Analysis of Constructions. 2023. no. 5. pp. 30–37. (In Russian). DOI: 10.37538/0039-2383.2023.5.30.37

## Уважаемые читатели!

Индекс подписки 18317 в электронном подписном каталоге УРАЛ-ПРЕСС на сайте

[www.ural-press.ru](http://www.ural-press.ru).

В редакции можно купить любой номер журнала или его электронную версию

([stroytex@list.ru](mailto:stroytex@list.ru)).