

УДК 624.04

Национальный исследовательский университет
"МЭИ",
Студент
Е. В. Доманов
Россия, г. Москва, тел.: +7(999)602-98-50
e-mail: domanov312@mail.ru

National Research University "MPEI",
Student
E.V.Domanov
Moscow, Russia, tel.: +7(999)602-98-50
e-mail: domanov312@mail.ru

Е.В. Доманов

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОГИБА БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С КРЕСТООБРАЗНОЙ РЕШЕТКОЙ

С помощью операторов системы символьной математики Maple построена математическая модель статически определимой плоской фермы. Рассмотрено действие нагрузки, равномерно распределенной по узлам верхнего или нижнего пояса. Выведена формула зависимости прогиба фермы от размеров и числа панелей. Решение может быть использовано при проектировании стержневых строительных конструкций и оценке численных решений.

Ключевые слова: статически определимая ферма, прогиб фермы, метод индукции, Maple

E. V. Domanov

THE DERIVATION OF THE FORMULA FOR DEFLECTION OF A GIRDER WITH A CROSS TYPE LATTICE

With the help of operators of the system of symbolic mathematics Maple, a mathematical model of a statically determinate flat truss constructed. The effect of a load uniformly distributed over the nodes of the upper or lower belt is considered. The formula for the dependence of the deflection of the truss on the size and number of panels is derived. The solution can be used in the design of rod building structures and the evaluation of numerical solutions.

Keywords: statically determinate truss, deflection of a truss, induction method, Maple.

Аналитические решения задач строительной механики полезны для оценки точности численных решений, полученных в пакетах стандартных программ, основанных в основном на методе конечных элементов, и при проектировании перспективных сооружений. Развитие программ символьной математики (Mathematica, Maple, Maxima и др.) дает надежды на получение замкнутых решений (формул) простой заменой численной моды на символьную в известных алгоритмах метода сечений или метода вырезания узлов при расчете ферм. Однако реальные расчеты показывают, что возникающие здесь трудности зачастую снижают ценность полученных решений либо из-за необычайной громоздкости формул, либо из-за весьма узкой области применимости результата. В некоторых подходах [1] даются только алгоритм и расчетные уравнения задач деформирования стержневых (в том числе и статически неопределимых) конструкций. Однако простых рабочих формул для прогибов конструкции при этом подходе получить не удастся. Ограничения в применимости метода возникают также, если решение содержит недостаточное число параметров задачи, например только ее размеры. Ввод же в решение числа панелей или стержней расширяет применимость полученных формул. В [2-11] решение этой задачи применительно к выводу формул прогиба плоских ферм достигнуто с помощью метода индукции.

Рассмотрим схему фермы с крестообразной решеткой (рис. 1). В ферме с n панелями в половине пролета, считая по нижнему поясу, число стержней – $n_s = 8n + 8$, включая три опорные стержня (один в подвижной опоре и два в правой неподвижной), число внутренних шарниров – $m = 4n + 4$.

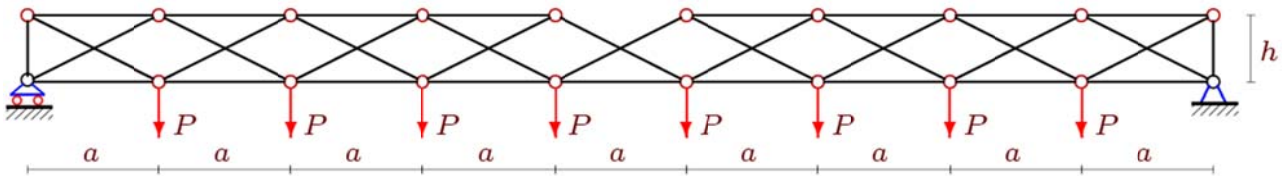


Рис. 1. Ферма при $n=4$. Нагрузка на нижний пояс

Для определения прогиба в упругой стадии работы конструкции по формуле Максвелла - Мора необходимо знать усилия во всех деформируемых стержнях. Решение в символьной форме получим по программе [12], написанной на языке Maple. В программу вводятся координаты узлов и структура фермы. Начало координат располагается в левой подвижной опоре. Сначала нумеруются узлы нижнего пояса (слева направо), затем верхнего. Приведем соответствующий фрагмент ввода координат в программу:

```
for i to 2*n+2 do
  x[i]:=a*i-a:      y[i]:=0:
  x[i+2*n+2]:=a*i-a: y[i+2*n+2]:=h:
end:
```

Направляющие косинусы усилий в системе уравнений равновесия узлов определяются по их координатам. Сначала вычисляются проекции L_{xy} стержней на оси координат и их длины $L[i]$:

```
for i to ns do
  Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]]:
  Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]]:
  L[i]:=subs(a^2+h^2=c^2,sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2)); end;
```

Замена $\text{subs}(a^2+h^2=c^2,..)$ сделана для компактной записи результата. Затем в цикле по числу стержней ns заполняется квадратная матрица G уравнений равновесия:

```
for i to ns do
  for j to 2 do
    t:=2*N[i][2]-2+j:
    if t<= ns then G[t,i]:=-Lxy[j]/L[i]:fi;
    t:=2*N[i][1]-2+j:
    if t<= ns then G[t,i]:= Lxy[j]/L[i]:fi;
  end;
end;
```

Решение системы линейных уравнений получается методом обратной матрицы $G1:=1/G$: $S1:=G1.B1$ без привлечения оператора **LinearSolve** и дает выражения для усилий во всех стержнях в символьной форме. Практика счета в символьной форме показывает, что применение операторов пакета **LinearAlgebra** требует большего времени для счета. Прогиб

определяется по формуле Максвелла – Мора в виде: $\Delta = \sum_{i=1}^{n_s} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF)$. Здесь обозначено:

но: $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях от заданной нагрузки, l_i — длины стержней, $S_i^{(1)}$ — усилия от единичной силы, приложенной к середине нижнего пояса, EF — жесткость стержней, принятая одинаковой для всей конструкции. Формула для прогиба (вертикальное смещение узла в середине пролета) для всех чисел панелей имеет один и тот же вид:

$$\Delta_n = \frac{A_n a^3 + B_n h^3 + C_n c^3}{h^2 EF}. \quad (1)$$

При обнаружении общего члена последовательности коэффициентов при a^3 потребовалось проанализировать 16 выражений прогиба и получить следующие числа: 7, 53, 210, 574, 1289, 2515, 4468, 7372, 11515, 17185, 24742, 34538, 47005, 62559, 81704, 104920. Оператором `rgf_findrecur` пакета `genfunc` системы Maple для членов последовательности выведено линейное однородное рекуррентное уравнение седьмого порядка:

$$A_n = 3A_{n-1} - A_{n-2} - 5A_{n-3} + 5A_{n-4} + A_{n-5} - 3A_{n-6} + A_{n-7}.$$

С помощью оператора `rsolve` получено решение рекуррентного уравнения, задающее искомую формулу для коэффициента при a^3 в формуле (1)

$$A_n = (34n^4 + 68n^3 + 44n^2 + (5 - 3(-1)^n)2n + 3(1 - (-1)^n)) / 24. \quad (2)$$

Аналогично находим, что коэффициент B_n удовлетворяет однородному уравнению

$$B_n = B_{n-1} + 3B_{n-2} - 3B_{n-3} - 3B_{n-4} + 3B_{n-5} + B_{n-6} - B_{n-7}$$

и имеет вид

$$B_n = (2n^3 + 3(1 - (-1)^n))n^2 + 3(1 - (-1)^n)n - (-1)^n + 1 / 4. \quad (3)$$

Интересно заметить, что рекуррентные уравнения для коэффициентов A_n и C_n идентичны, но решения зависят от начальных условий и получаются разные. Для коэффициента C_n решение имеет вид

$$C_n = (8n^4 + 16n^3 + 14n^2 + (3 - (-1)^n)2n - (-1)^n + 1) / 8. \quad (4)$$

Выражение (1) с коэффициентами (2-4), зависящими от числа панелей, есть аналитическое решение задачи о прогибе фермы под действием равномерной нагрузки по узлам нижнего пояса.

Теперь рассмотрим случай, когда усилия приложены к узлам верхнего пояса (рис. 2).

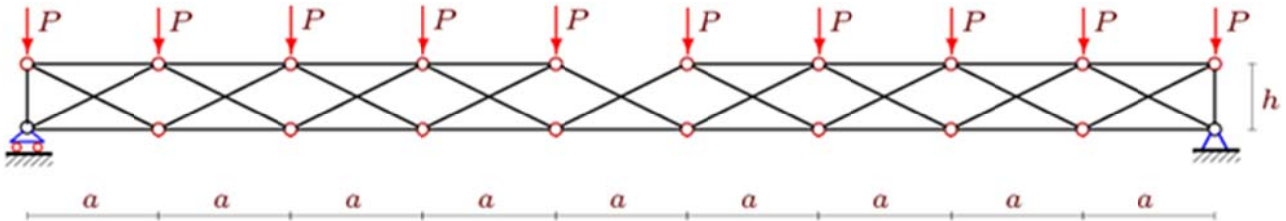


Рис. 2. Нагрузка по верхнему поясу, $n=4$

С помощью оператора `rgf_findrecur` пакета `genfunc` системы Maple были найдены рекуррентные уравнения для каждого коэффициента формулы прогиба (1). Они оказались одинаковыми, как для нижнего, так и для верхнего случая нагружения фермы. Решение для коэффициентов при нагружении верхнего пояса отличается от предыдущего лишь несколькими слагаемыми и имеет вид

$$A_n = (34n^4 + 68n^3 + 20n^2 + (3(-1)^n - 7)2n - (1 + (-1)^n)3) / 24,$$

$$B_n = (2n^3 + 3(1 - (-1)^n))n^2 + (1 - 5(-1)^n)n - (-1)^n + 1 / 4,$$

$$C_n = (8n^4 + 16n^3 + 6n^2 + ((-1)^n - 1)2n + (-1)^n - 1) / 8.$$

Пусть задана суммарная нагрузка на ферму P_* . Сравнительные зависимости безразмерного прогиба $\Delta' = EF\Delta_n / (P_*L)$, вычисленного при постоянной длине пролета фермы

$L=(2n+1)a=100$ м и нагрузке $P = P_* / (2n)$ при загрузении нижнего пояса и $P = P_* / (2n + 2)$ при загрузении узлов верхнего пояса, представлены кривыми на рис. 3. Кривые для нагрузки по нижнему поясу выделены утолщением, по верхнему — пунктиром. Высота фермы h задана в метрах. При малых числах n решение предсказуемо — увеличение высоты фермы приводит к уменьшению прогиба. При $n=11$ кривые прогиба пересекаются. Зависимость получается обратная.

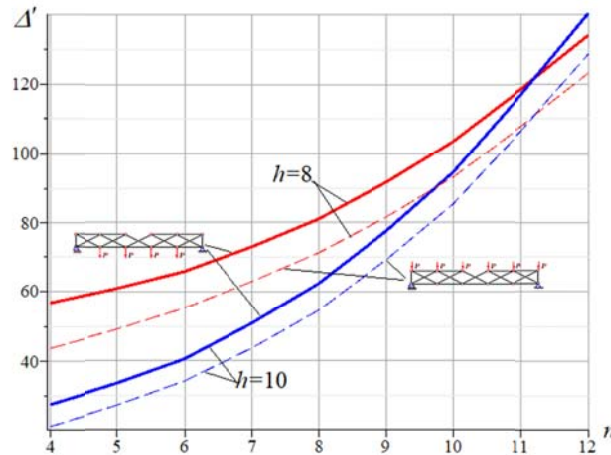


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей

Методом индукции при поддержке операторами системы Maple в [4-11] выведены формулы для прогиба плоских ферм различной структуры в аналитической форме. Более сложные задачи для пространственных конструкций решены этим методом в [13-15].

Библиографический список

1. Рыбаков Л. С. Линейная теория плоского призматического каркаса/ Л.С. Рыбаков // Известия Российской Академии наук. Сер. Механика твердого тела. 2001. № 4. С. 106-118.
2. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load // Science Almanac. 2016. N 4-3(18). С.257-259.
3. Кирсанов М.Н. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы/ Н.М.Кирсанов, А.П. Суворов // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 8 (107). С. 869-875. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.8.869-875
4. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме/ М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. 2017. 4 (874). С. 20-23.
5. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей/ М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. 2017. № 3 (873). С. 26-29
6. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости/ М.Н. Кирсанов // Строительная механика и конструкции. 2017. № 1 (14). С. 27–30.
7. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. Pp. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7.
8. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами/ М. Н. Кирсанов // Транспортное строительство. 2017. №7. С.15-17.
9. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы/ М.Н. Кирсанов А.Н. Маслов // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. 2(271). С. 4–10.

10. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // *Architecture and Engineering*. 2016. Т. 1. № 3. С. 14-17.
11. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа/М. Н. Кирсанов // *Инженерно-строительный журнал*. 2015. №5(57). С. 58–65. doi: 10.5862/MCE.57.5
12. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики/ Кирсанов М.Н. - СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
13. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы пространственного покрытия с крестообразной решеткой/ М.Н. Кирсанов // *Инженерно-строительный журнал*. 2016. № 4 (64). С. 52-58.
14. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью / М.Н. Кирсанов // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2015. № 2. С. 2-6.
15. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли/ М.Н. Кирсанов // *Инженерно-строительный журнал*. 2014. №5(49). С. 37–43. doi: 10.5862/MCE.49.4

Библиографический список

1. Rybakov L.S. Linear theory of plane prism girder. *News of Russian Academy of science. Series Mechanics of solid body*. 2001. № 4 . P. 106-118.
2. Ponomareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load // *Science Almanac*. 2016. N 4-3(18). С.257-259.
3. Kirsanov M.N., Suvorov A.P. Research of deformation of statistically indeterminate plane frame. *Bulletin of MGSU* 2017. V. 12. Issue. 8 (107). P. 869-875. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.8.869-875
4. Kirsanov M.N. Formulas for calculation of bending and stresses in lattice girder. *Building mechanization*. 2017. 4 (874). P. 20-23.
5. Kirsanov M.N. Analytical design of bending of bracing girder with arbitrary number of panels . *Building Mechanization*. 2017. № 3 (873). P. 26-29
6. Kirsanov M.N. Formulation for bending of latticed girder having the cases of kinetic changing. *Structural Mechanics and construction*. 2017. № 1 (14). P. 27–30.
7. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 3. Pp. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7.
8. Kirsanov M.N. Calculation of bending of plane latticed girder with four piers. *Traffic construction*. 2017. №7. P.15-17.
9. Kirsanov M.N. Maslov A.M. Formulas for calculation of beam multi latticed girder. *Structural Mechanics and construction design*. 2017. 2(271). P. 4–10.
10. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // *Architecture and Engineering*. 2016. Т. 1. № 3. P. 14-17.
11. Kirsanov M.N. Analysis of bending latticed beam separator girder. *Engineer-building journal*. 2015. №5(57). С. 58–65. doi: 10.5862/MCE.57.5
12. Kirsanov M.N. Maple и Maplet. Solution of the problems of Mechanics. SP.: Pub. House Lan, 2012. 512 p.
13. Kirsanov M.N.. Analysis of girder bending of spatial cover with cruciform lattice. *Engineer-building journal*. 2016. № 4 (64). С. 52-58.
14. Kirsanov M.N. Analytical design of spatial bar regular structure with plane face. *Structural Mechanics and construction design*. 2015. № 2. P. 2-6.
15. Kirsanov M.N. Bending, torsion and asymptotic analysis of spatial bar cantilever. *Magazine of Civil Engineering*. 2014. №5(49). P. 37–43. doi: 10.5862/MCE.49.4