Нижняя оценка собственной частоты фермы по Донкерлею в системе Maple

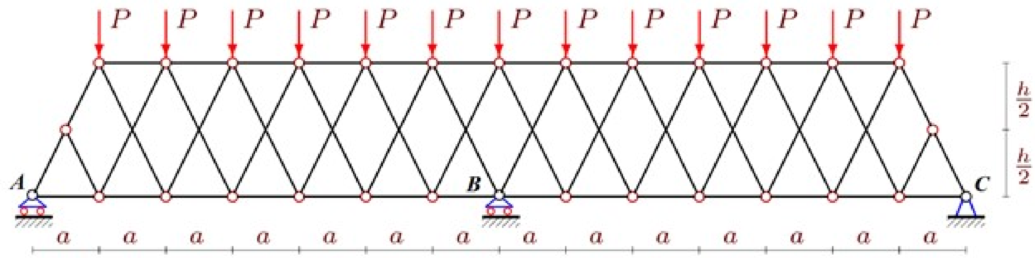
Кирсанов М.Н., Петренко В.Ф.
Москва, 2021

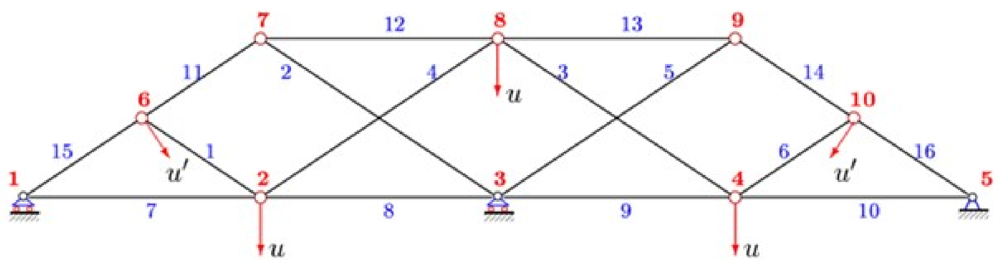
Актуальность

Ферменные конструкции широко применяются в строительстве для перекрытия больших пролётов с целью уменьшения расхода применяемых материалов и облегчения конструкций, в конструкциях крепления антенн, дорожных и уличных указателей. Расчет напряженно-деформированного состояний и частот собственных колебаний таких конструкций является актуальной задачей наряду с оценкой устойчивости и прочности. Как правило, расчёты производятся в численном виде в специализированных пакетах, основанных на методе конечных элементов. Это позволяет получать решения задач для статически неопределимых систем и систем со сложными нагрузками и граничными условиями с учетом неупругих или нелинейных свойств материала конструкции.С помощью метода индукции определяется зависимость усилий, прогиба и частот колебаний от порядка регулярной конструкции, например, от числа панелей или периодических групп стержней.

Конструкция фермы

Рассматриваемая ферма представляет собой плоскую балочную конструкцию с ромбовидной решеткой и дополнительной подвижной опорой в середине пролета. Дополнительная опора делает конструкцию внешне статически неопределимой.

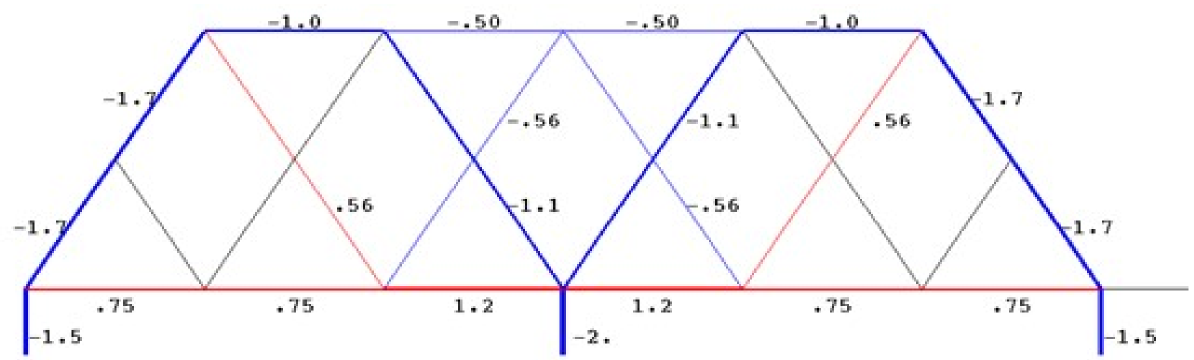




Расчет усилий для ферм с различным числом панелей показывает, что для четного числа панелей задача не имеет решения. Отдельное вычисление определителя системы уравнений равновесия показало, что в этом случае он равен нулю.

Конструкция фермы

Распределение усилий, $n_0 = 3$



Численное решение задачи о распределении усилий по стержням фермы при n=6, a=3м, h=6м. Синим цветом обозначены сжатые стержни, красным — растянутые. Усилий отнесены к нагрузке P

Первая частота собственных колебаний

Приближенное аналитическое решение для нижней оценки ωD первой частоты ω1 разыскивается по формуле Донкерлея:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^{K} \omega_p^{-2}.$$

Решение рекуррентных уравнений даёт выражения для определения коэффициентов:

$$C_1 = (28k(k+1)(7k^2+7k+6))/45, \quad C_2 = 4k(k+1).$$

Расчет серии ферм с разным числом панелей показал, что коэффициент имеет вид, не зависящий от параметра k:

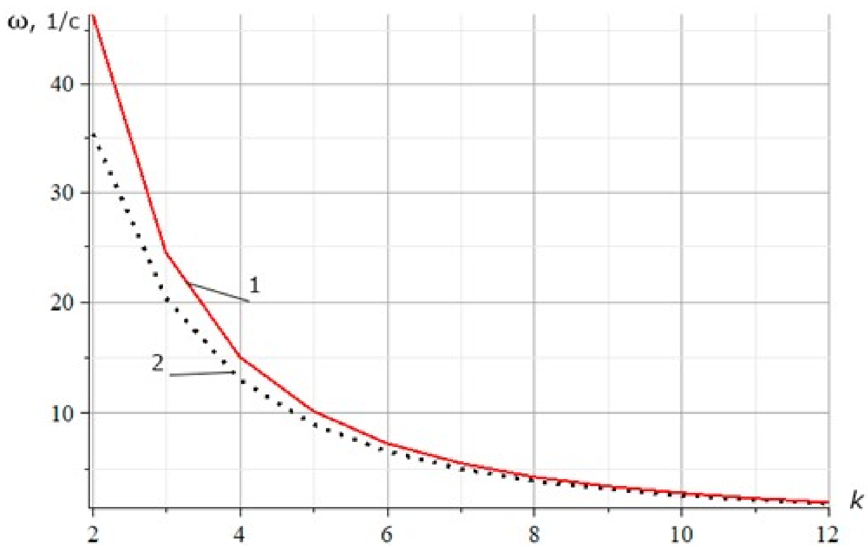
$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= (224a^3/9+8c^3)/(h^2EF),\\
\Delta_2 &= (896a^3/5+24c^3)/(h^2EF),\\
\Delta_3 &= (672a^3+48c^3)/(h^2EF),\\
\Delta_4 &= (16352a^3/9+80c^3)/(h^2EF),\\
\Delta_5 &= (4032a^3+120c^3)/(h^2EF)...
\end{aligned}$$

Окончательно имеем аналитическую оценку для нижней частоты по Донкерлею:

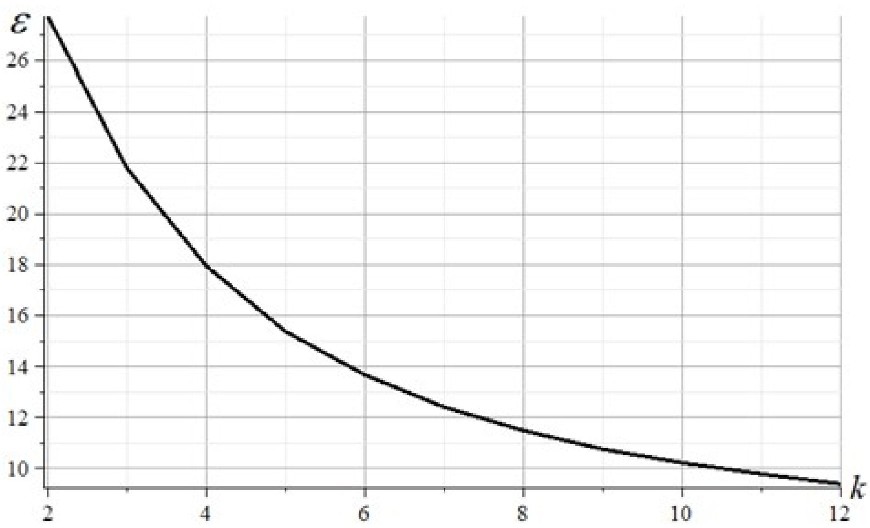
$$\omega_D^{-2} = m\left((C_1a^3+C_2c^3)/(h^2EF)+rq(22k^2+16k+3)/(6(2k+1)EF_h)\right).$$

Численное решение

Сравнение аналитического решения с численным.



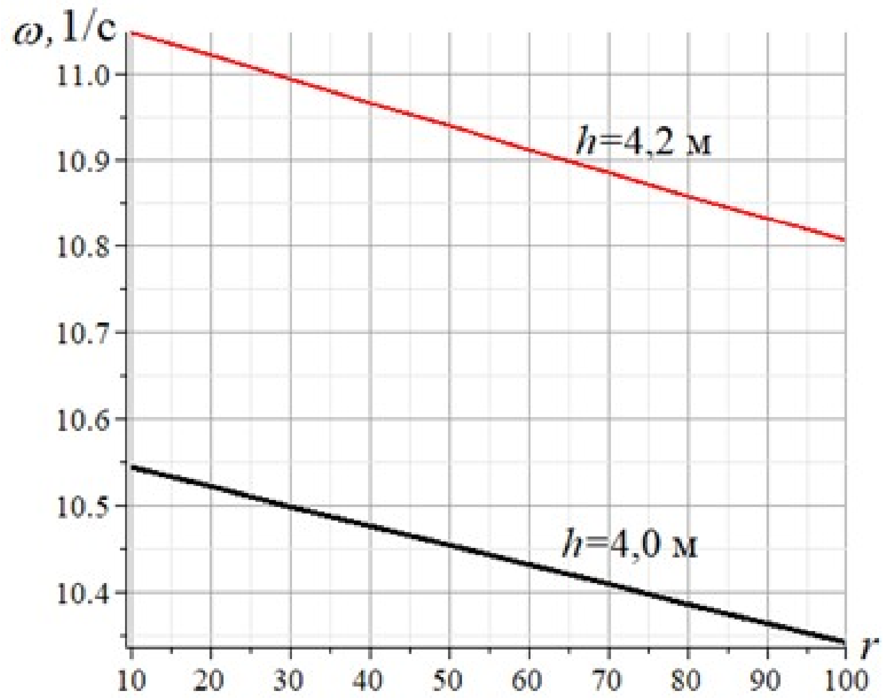
Погрешность оценки по Донкерлею



Численное решение

Численные эксперименты с подбором жесткости опор показали, что этот параметр весьма незначительно влияет на значение первой собственной частоты.

Зависимость первой частоты от коэффициента относительной жесткости опор



Заключение

1.При некоторых значениях числа панелей ферма кинематически изменяема.
2.Большая часть нагрузки, распределенной равномерно по узлам верхнего пояса приходится на среднюю опору независимо от числа панелей.
3.Оценка Донкерлея с учетом произвольного числа панелей имеет компактный вид и дает приемлемую точность, особенно при большом числе панелей.
4.С увеличением высоты фермы точность аналитического решения растет.
5.Решение, полученное для ромбовидной конструкции, не только хорошо описывает зависимость частоты от числа панелей плоской фермы, но и дает в этом случае большую точность.
6.Влияние жесткости опор на первую частоту незначительно.