

УДК 624.31

## **МОДЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАБОТЫ СТЕРЖНЕВОЙ КОНСТРУКЦИИ ПОКРЫТИЯ ПРОМЫШЛЕННОГО ЗДАНИЯ**

*Доманов Евгений Викторович,*

*Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва,  
студент.*

*Кирсанов Михаил Николаевич,*

*Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва,  
доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники,  
мехатроники, динамики и прочности машин.*

### **Аннотация**

Для расчета прогиба статически определимой плоской фермы с произвольным числом панелей применяется формула Максвелла – Мора, система компьютерной математики Maple и метод индукции. Анализируется случай сосредоточенной нагрузки в середине пролета. Найдена асимптотика решения. Учтены различные жесткости стержней.

**Ключевые слова:** ферма, Maple, прогиб, индукция, точное решение.

## **MODEL ANALYSIS OF THE TRUSS COATING INDUSTRIAL BUILDING**

*Domanov Evgeny Viktorovich,*

*National Research University "MPEI", Moscow,  
student.*

*Kirsanov Mikhail Nikolaevich,*

*National Research University "MPEI", Moscow,  
Doctor of Science, Professor of the department "Robotics, mechatronics, dynamics  
and strength of machines".*

## Abstract

For calculation of deflection of statically determinate flat truss with an arbitrary number of panels the formula of Maxwell - Mohr, the system of computer mathematics Maple and the method of induction are used. We analyze the case of concentrated load at middle of span. The asymptotic solution is obtained. The different stiffness of the rods taken in to account.

**Keywords:** truss, Maple, deflection, induction, exact solution

**Введение.** Традиционная конструкция балочных ферм (одна опора подвижная, другая неподвижная) такова, что и реакции опор, и усилия в стержнях можно рассчитать, используя простые уравнения равновесия в форме уравнений проекций и моментов. В некоторых случаях возникают трудности при определении усилий в стержнях (например, когда не существует сечения Риттера, а методом вырезания узлов приходится составлять множество дополнительных уравнений), но реакции опор определяются всегда просто. Однако существуют статически определимые регулярные конструкции, в которых для определения реакций опор приходится вырезать *все* узлы фермы. Именно такая ферма и рассмотрена в настоящей работе. Понятно, что для ферм с большим числом панелей составление уравнений равновесия всех узлов с последующим решением системы уравнений большого порядка – весьма трудоемкая задача. Численные методы, склонные к естественному накоплению ошибок округления и не всегда дающие достаточную точность вычислений, здесь нежелательны. Аналитические методы с применением систем компьютерной математики (Maple, Mathematica, MatCad и др.) имеют настолько низкую скорость символьных преобразований, что им недоступны фермы уже с 100-150 стержнями. Время счета (символьных преобразований) растет очень быстро с увеличением размера матрицы системы уравнений равновесия. В работах [1-8] был найден выход из создавшегося положения. Предложенный и апробированный в этих работах метод индукции дает достаточно простые формулы для усилий в стержнях фермы и выражения для прогиба при *любом*

числе панелей (ячеек регулярности). Этот метод применяется и в настоящей работе.

**Постановка задачи.** Рассмотрим ферму, моделирующую покрытие промышленного здания (рисунок 1). Нагрузка в середине пролета моделирует вес кранового оборудования. Примем четное число панелей  $n=2k$  (по числу стержней в нижнем поясе). В этом случае ферма содержит  $m=4n+4$  стержней, включая опорные [1].

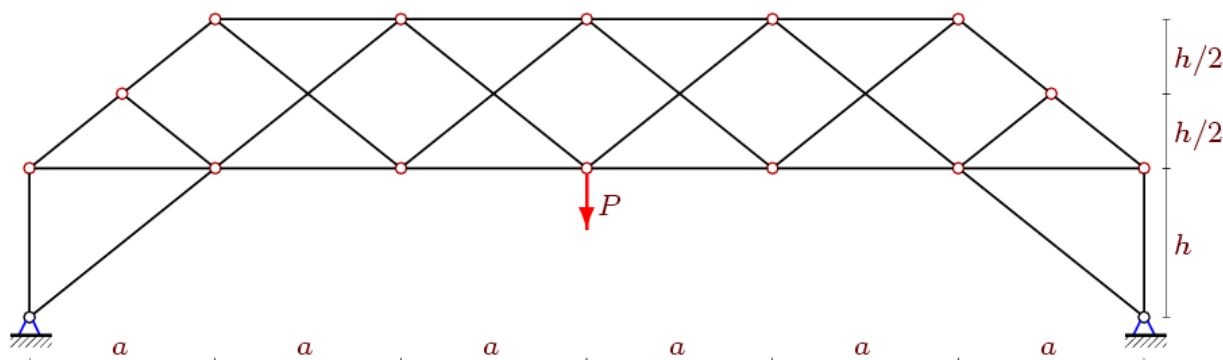


Рисунок 1 – Ферма при  $n=6$

Для расчета прогиба фермы по формуле Максвелла – Мора необходимо иметь выражения для усилий в стержнях. Заметим, что в данной конструкции четыре опорных стержня. Для реакций опор трех уравнений равновесия здесь недостаточно. Воспользуемся программой [9], написанной в системе Maple.

Формула Максвелла–Мора имеет вид:

$$\Delta_n = P \sum_{i=1}^{m-4} S_i^2 l_i / (EF), \quad (1)$$

где  $S_i$  – усилия в стержнях фермы от действия единичной вертикальной нагрузки  $P=1$ ,  $l_i$  – длины стержней,  $E$  – модуль упругости,  $F$  – площадь сечения стержней. Данные о конфигурации и размерах фермы вводятся через координаты ее узлов. В сумму (1) не входят четыре опорных стержня, которые приняты жесткими. Систему  $m$  уравнений равновесия удобно записать в матричной форме  $\mathbf{G}\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{B}}$ , где  $\bar{\mathbf{S}}$  – вектор усилий в стержнях,  $\bar{\mathbf{B}}$  – вектор

нагрузок. В нечетные элементы  $B_{2i-1}$  записываются горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу  $i$ , в четные  $B_{2i}$  – вертикальные. Решение системы линейных уравнений находим в символьной форме, пользуясь системой компьютерной математики Maple [9] с помощью обратной матрицы.

**Решение.** Для вывода формулы зависимости прогиба от размеров фермы и числа панелей методом индукции необходимо сначала получить последовательность аналитических решений задачи для ферм с одной, двумя, тремя и т. д. панелями. Для регулярных ферм решения приобретают подобную форму, в которой выделяются слагаемые одного вида, но с разными числовыми коэффициентами. Коэффициенты при подобных слагаемых образуют последовательность, общие члены которых находятся средствами системы Maple. Для рассматриваемой фермы выражение для прогиба имеет вид

$$EF\Delta_n = P \frac{A_n a^3 + 4C_n c^3}{12h^2},$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ . С помощью операторов «`rgf_findrecur`» и «`rsolve`» получены коэффициенты

$$A_n = 9(-1)^n + 15(-1)^{n+1}n - 9n^2 + 17n - 9 + 4n^3 + 9(-1)^n n^2,$$

$$C_n = 2n - 1 + (-1)^n.$$

На рисунке 2 показано изменение прогиба в зависимости от размеров фермы и числа панелей. Кривые относительного (безразмерного) прогиба  $\Delta' = \Delta_n EF / P$  построены при фиксированной длине пролета  $L = an = 10$  м, размер  $h$  на рисунке в метрах.

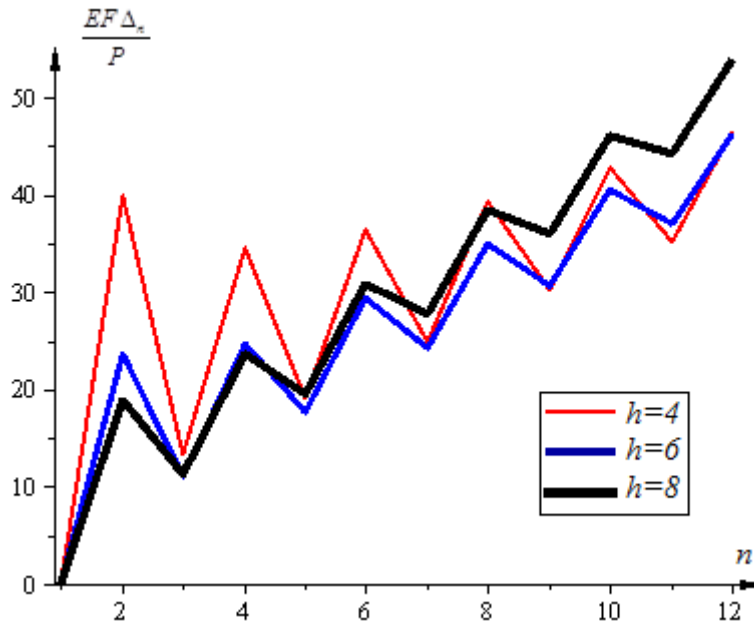


Рисунок 2 – Зависимость прогиба от числа панелей,  $L=10\text{м}$

Особенностью решения являются значительные скачки кривых. При больших значениях  $n$  скачки уменьшаются.

Асимптотику решения можно оценить, вычислив предел. Оператор **limit** системы Maple дает:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k = h / (2L)$ . В обзоре [16] проведены аналогичные сравнительные асимптотические исследования для плоских статически определимых ферм с различной решеткой.

Для обобщения решения на различные площади сечений наклонных (длиной  $c$ ) и горизонтальных стержней достаточно ввести коэффициенты  $F_i = \gamma_i F_0$ ,  $i=1,2$ , где номер соответствует площади сечений горизонтальных стержней, 2 – наклонных:

$$EF_0 \Delta_n = P \frac{A_n a^3 / \gamma_1 + 4C_n c^3 / \gamma_1}{12h^2}.$$

**Заключение.** Получена формула для прогиба фермы, которая может быть использована как тестовое решение в проектных и теоретических расчетах. Скачкообразное изменение прогиба указывает на возможность существенного увеличения жесткости изменением числа панелей всего на одну. Аналогичные точные решения получены методом индукции в системе Maple для

пространственных ферм [10-15]. Сравнительный обзор аналитических решений для плоских ферм можно найти в [16,17].

### **Библиографический список:**

1. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5(39). С. 61-68.
2. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. № 1(61). С. 33-41.
3. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3(266). С. 16-19.
4. Кирсанов М.Н. О влиянии наклона подвижной опоры на жесткость балочной фермы // Вестник МГСУ. 2016. № 10. С. 35-44.
5. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5(268). С. 19-22.
6. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5(57). С. 58-65.
7. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 1. № 12. С. 19-24.
8. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. No. 3. Vol. 1. Pp. 14-17.
9. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
10. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5(40). С. 52-58.

11. Доманов Е.В. Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей // Научный альманах. 2016. № 6-2(19). С. 214-217.
12. Voropai R.A., Kirsanov M.N. On the deformation of spatial cantilever trusses under the action of lateral loads // Science Almanac. 2016. № 9-2(23). Pp. 17-20.
13. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2(259). С. 2-6.
14. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6. С. 28-34.
15. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 1(53). С. 32-38.
16. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5(57). С. 66-73.
17. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1(7). С. 247-254.