УДК 517.911

ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

© М.Н.Кирсанов

В статье рассматриваются две независимые задачи: определение точек нестабильности обобщенной задачи Коши (с начальными условиями для производных порядка более высокого, чем порядок уравнения) и определение условия понижения порядка обыкновенного дифференциального уравнения. Общим в этих задачах является некоторый оператор, свойства которого изучаются. Показывается, что оператор от линейной функции порождает полином Эрмита порядка, равному порядку оператора. Рассматривается приложение к задаче механики о реакции центрально сжатого стержня на возмущения производных прогиба высших порядков.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, оператор, реология, стабильность, задача Коши, выпучивание.

1. Введение

Вопросы, рассматриваемые в настоящей статье, ведут свое происхождение из анализа процесса выпучивания реологических систем [1]. Математический аппарат, используемый в этих задачах, может быть обобщен на исследования особенностей некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений. Ниже приводится оператор дифференциального типа, свойства которого определяют поведение нелинейных реологических систем и задают условия для преобразования и упрощения дифференциальных уравнений. Показано также, что этот оператор связан с ортогональными полиномами Эрмита и цилиндрическими функциями.

Дадим следующее определение оператора K_N, действующего в общем случае на $M+1$ функцию, каждая из которых обладает $N-1$ производной:

$$K_N\left(h_0(t), h_1(t), ..., h_M(t)\right) = \det\, A_N .$$

Элементы матрицы A_N размера N имеют вид $a_{mn} = \sum_{j=0}^{M+1} h_j^{(m-n+j)} C_{n-j-1}^{m-1}$ где $C_n^m = m!/\left((m-n)!n!\right)$, $C_n^m = 0$ при $n<0$ или $n<m, h_{M+1} = 1$, верхний индекс в скобках указывает на порядок производной. Для более наглядного представления о структуре матрицы A_N заметим, что справедливо соотношение $a_{mn} = a_{m-1,n-1} + \dot{a}_{m-1,n}$. Приведем два примера.

Пример 1. Пусть $N=3, M=2$. Матрицу A_N запишем в виде суммы

$$A_N = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 \\ \dot{h}_i & h_0 & 0 \\ \ddot{h}_0 & 2\dot{h}_0 & h_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & h_1 & 0 \\ 0 & \dot{h}_1 & h_1 \\ 0 & \ddot{h}_1 & 2\dot{h}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & \dot{h}_2 \\ 0 & 0 & \ddot{h}_2 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Пример 2. $N=4, M=0$:

$$K_4\left(g(t)\right) = \det \begin{bmatrix} g & 1 & 0 & 0 \\ \dot{g} & g & 1 & 0 \\ \ddot{g} & 2\dot{g} & g & 1 \\ g^{(3)} & 3\ddot{g} & 3\dot{g} & g \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Выражение (1) позволяет заметить, что число аргументов $M+1$ оператора ограничено сверху: $M<N$. Приведем две математические задачи, в которых встречается оператор K_N.

2. Точки нестабильности обобщенной задачи Коши

Рассмотрим следующее обобщение начальной задачи для произвольного обыкновенного дифференциального уравнения порядка n. Имеем уравнение

$$f\left(t, u, \dot{u}, \ddot{u}, ..., u^{(n)}\right) = 0, \tag{3}$$

где $u = u(t)$, а $\dot{u}, \ddot{u}, ..., u^{(n)}$ – производные по t порядков $1, 2, \ldots, n$. При $t = t_0$ поставим n начальных условий, каждое из которых имеет вид

$$u^{(k)}(t_0) = U_k, k+1 \in \mathrm{N}, U_k \in \mathrm{R}. \tag{4}$$

Классическая задача Коши следует из (3), (4) при $k = 0,1,2,...,n-1$.

Для частного случая уравнения (3) при $n=1$

$$\dot{u} + g(t)u = 0 \tag{5}$$

введем понятие *точки нестабильности начальной задачи*. Значение $t=\tau_N$ назовем точкой нестабильности порядка N, если при $t_0 \to \tau_N$, $u^{(N)}(t_0)=U_N, u^{(i)}(t_0)\to\infty, i\ne N$.

Выясним геометрический смысл обобщенной задачи Коши. Если в классической задаче выбирается интегральная кривая, проходящая на плоскости u,t через точку $u=u_0, t=t_0$, то в обобщенной задаче из всех интегральных кривых, пересекающих прямую $t=t_0$, требуется выбрать ту, у которой в точке пересечения удовлетворяется условие $u^N(t_0)=U_N$. Например, при $N=1$ требуется найти интегральную кривую, пересекающую прямую $t=t_0$ под заданным углом. Одновременно становится понятным смысл точки нестабильности: если при $t_0\to\tau_1$ ордината пересечения стремится к бесконечности, то точка τ_1 – нестабильная.

Первый способ определения точек нестабильности состоит в использовании вида интегральной кривой уравнения (5)

$$u=U_0\exp(-J),\ J=\int_{to}^{t} g\,dt. \tag{6}$$

Дифференцируя (6), получим последовательно

$$\begin{gathered}\dot u=-U_0 g\exp(-J),\\ \ddot u=U_0\left(g^2-\dot g\right)\exp(-J),\ldots,\\ u^{(k)}=(-1)^k U_0 B_k\exp(-J),\end{gathered} \tag{7}$$

где, как легко видеть, функции $B_k(t)$ образуются по правилу

$$B_{k+1}=B_k g-\dot B_k. \tag{8}$$

Пусть задана начальная производная порядка N

$$u^{(N)}(t_0)=U_N=(-1)^N U_0 B_N. \tag{9}$$

Исключая U_0 из (9) и (7) при $t=t_0$, получим

$$u^{(k)}(t_0)=(-1)^{k-N}\left(B_k/B_N\right)U_N. \tag{10}$$

Значение $u^{(k)}(t_0)$ стремится к бесконечности при $t_0\to\tau_N$, где τ_N – нули функции B_N. Следовательно, точки нестабильности определяются корнями уравнений $B_N=0$.

Второй способ позволяет найти точки нестабильности непосредственно по дифференциальному уравнению, не используя его интеграла, и приводит к оператору K_N. Последовательно дифференцируя (5), получим систему N уравнений для переменных $u,\dot u,\ddot u,\ldots,u^{(N)}$

$$\begin{gathered}ug+\dot u=0,\\ u\dot g+\dot ug+\ddot u=0,\\ u\ddot g+2\dot u\dot g+\ddot ug+u^{(3)}=0,\\ \ldots\\ ug^{(N-1)}+(N-1)\dot ug^{(N-2)}+\ldots+C_i^{n-1}u^{(i)}g^{(N-1-i)}+\ldots+u^{(N)}=0.\end{gathered}$$

Принимая $u^{(N)}$ за известную величину и относя ее в правую часть, получим систему N уравнений для N переменных $u^{(i)}$, $i=0,1,\ldots,N-1$, определитель которой равен $K_N(g)=B_N$ (см. пример 2). Таким образом, в нулях функций B_N связь между производными вырождается, что и определяет точки нестабильности. Раскрывая определитель матрицы (2) по элементам последнего столбца, получим

$$\begin{aligned}B_4&=g^4-6g^2\dot g+3\dot g^2+4\ddot gg-g^{(3)}=\\ &=gB_3-3\dot gB_2+3\ddot gB_1-g^{(3)}B_0,\end{aligned} \tag{11}$$

где $B_0=1, B_1=g, B_2=g^2-\dot g, B_3=g^3-3g\dot g+\ddot g.$ Соотношение (11) легко обобщить на произвольный порядок системы

$$B_{N+1}=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k C_k^N g^{(k)}B_{N-k}. \tag{12}$$

Выведем *формулу Родрига* для функций B_N. Рассмотрим следующее выражение

$$B_i=(-1)^i h(t)Q^{(i)}(t), \tag{13}$$

где $Q(t)$ – весовая функция, $h(t)$ – некоторая вспомогательная функция. Подставим (13) в (12) и воспользуемся формулой Лейбница для N-й производной произведения двух функций. Получим

$$Q^{(N+1)}=-(gQ)^{(N)}. \tag{14}$$

Интегралом (14) является соотношение

$$Q=Q_0\exp(-J). \tag{15}$$

Подставляя (15) в (13) и выбирая $h=\exp(J)/Q_0$, получим формулу Родрига, задающую функции B_N

$$B_N=\exp(J)(-1)^N\frac{d^N}{dt^N}\left(\exp(-J)\right). \tag{16}$$

При $g=2t$ имеем, согласно (6), $J=t^2$. Из (16) следует определение *ортогональных полиномов Эрмита* H_N [2]. Таким образом, полиномы Эрмита можно задать с помощью введенного оператора: $K_N(2t)=H_N(t)$.

Понятие нестабильности имеет приложение в механике. Рассмотрим прямолинейный шарнирно опертый стержень длиной l, сжатый постоянной по времени осевой силой T. Материал стержня подчиняется нелинейному реологическому определяющему соотношению

$$\dot{p}p^{\alpha} = f(\sigma), \tag{17}$$

где $p = \varepsilon - \sigma/E$ – деформация ползучести, $\dot{p} = dp/dt$ – скорость деформации ползучести, σ, ε – напряжение и деформация; α, E – параметр упрочнения и модуль упругости; $f(\sigma)$ – функция, показывающая зависимость деформации ползучести от уровня напряжений. Под действием некоторого возмущения сжатый стержень примет форму, отличную от прямолинейной, а напряжения и деформации ползучести получат малые приращения $\Delta\sigma$ и Δp, удовлетворяющие линеаризованному соотношению (17)

$$p^{\alpha}\Delta\dot{p} + \alpha\dot{p}p^{\alpha-1}\Delta p = f'\Delta\sigma, \tag{18}$$

где $f' = df/d\sigma$. Пользуясь гипотезой плоских сечений и уравнением равновесия, получим из (18) дифференциальное уравнение для амплитуды U прогиба, представленного в виде $\Delta v = U\sin\mu y$, $\mu = m\pi/l$; μ – число полуволн по длине стержня [1]

$$(\alpha - \xi)(\dot{p}/p)U + \dot{U} = 0. \tag{19}$$

Здесь введена величина ξ, монотонно связанная со временем t

$$\xi = p(f'/f)E\sigma/(\sigma_E - \sigma),$$

(σ_E – критическое напряжение упругого стержня). Кривая ползучести $p(t) = \left[(1+\alpha)tf\right]^{1+\alpha}$ получается интегрированием (17) при $\sigma = \mathrm{const}$.

Точки нестабильности обобщенной задачи Коши для уравнения (19) соответствуют таким значениям времени прямолинейного деформирования, когда возмущения высших производных прогиба вызывают неограниченный прогиб. Найдем эти точки.

Функции $K_N\left((\alpha - \xi)(\dot{p}/p)\right) = B_N$, нулями которых являются точки нестабильности, представим в виде $B_N(t) = (-1)^N b_N(\xi)(\dot{p}/p)^N$, где b_N являются полиномами по ξ. Выпишем первые четыре полинома [1]

$$b_1 = \xi - \alpha,$$

$$b_2 = \xi^2 - 3\xi\alpha + \alpha(2\alpha + 1),$$

$$b_3 = \xi^3 - 6\alpha\xi^2 + \alpha(4 + 11\alpha)\xi - \alpha(2\alpha+1)(3\alpha+2),$$

$$b_4 = \xi^4 - 10\alpha\xi^3 + 5\alpha(2+7\alpha)\xi^2 - 5\alpha(2\alpha+1)(5\alpha+2)\xi + \\ + \alpha(2\alpha+1)(3\alpha+2)(4\alpha+3).$$

Точки нестабильности связаны здесь со значениями величины ξ. Каждая точка нестабильности определяет некоторую кривую $\sigma(t)$, проходящую через точку $\sigma = \sigma_E, t = 0$, которая соответствует мгновенной потере устойчивости при достижении эйлеровой критической нагрузки упругого стержня. Зная уровень приложенного напряжения, можно вычислить опасные моменты $t = \tau_N$ $(N = 1, 2, \ldots)$, в которых в соответствии с определением возмущение N-х производных прогиба вызывает выпучивание – бесконечные прогибы в начальный момент.

Определяя место предложенного подхода к анализу выпучивания конструкций среди других теорий, заметим, что теория точек нестабильности не является теорией устойчивости ни в классическом смысле ни с какой-либо поправкой на вид возмущения. Скорее всего, теория нестабильности начальной задачи включается в теорию катастроф, так как, согласно [3], катастрофой называется скачкообразные изменения, возникающие в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий. Если предполагать, что стержень в каждый момент времени, начиная со времени приложения осевой нагрузки, тестируется как угодно малыми возмущениями прогиба и производными прогиба по времени, то точка нестабильности – это момент времени, когда возмущение вызывает заметные (или бесконечно большие) прогибы, тогда как в другие моменты времени реакция на такое возмущение будет также как угодно малой величиной, которой можно пренебречь и считать стержень прямым. Таким образом, в упомянутом определении катастрофы "плавное изменение внешних условий" – это течение времени опыта сжатия стержня, "скачкообразное изменение" – наличие конечного отклика в точке нестабильности.

Рассмотрим один частный случай: $\alpha = 1$. Имеет место зависимость

$$b_N = (1 - 2N)b_{N-1} + \xi^2 b_{N-2}. \tag{20}$$

Из (8) следует

$$b_{N+1} = b_N(\xi - 2N - 1) + b_N'\xi, \tag{21}$$

где $b_N' = db_N/d\xi$. Зависимости (20) и (21) дают дифференциальное уравнение для b_N

$$b_N\xi + 2b_N(\xi - N) - 2Nb_N = 0. \tag{22}$$

Уравнение (22), родственное уравнению Бесселя, имеет общее решение вида [4]

$$b_N(\xi) = \xi^{\nu}e^{-\xi}Z_{\nu}(i\xi), \nu = (1+2N)/2.$$

Следовательно, при определенном выборе констант в решении $Z_{\nu} = C_1 J_{\nu} + C_2 Y_{\nu}$, b_N представимы линейной комбинацией функций Бесселя (с множителем $\xi^{\nu}e^{-\xi}$). Найдя функцию g из сопоставления (15) и (19)

$$g = (\alpha/p - \lambda)\dot{p}, \lambda = (f'/f)E\sigma/(\sigma_E - \sigma), \tag{23}$$

получим

$$K_N\left(\left(1-\lambda\sqrt{2tf}\right)\big/(2t)\right)=\xi^{1-\nu}\exp(-\xi)\left(C_1J_\nu+C_2Y_\nu\right).$$

Заметим, что явление нестабильности может проявляться и в других процессах. Например, в [4] исследуется стабильность движения кулисы, а в [5] построена модель точения полимеров, обнаруживающая явление нестабильности.

3. Некоторые свойства оператора $K_N(g)$

1. Теорема разделения нулей. Сохраним обозначение $K_N(g)=B_N(t)$. Докажем теорему, упорядочивающую нули функции $B_N(t)$.

Теорема. *Между нулями $\tau_{N,1}$ и $\tau_{N,2}$ функции $B_N(t)$ (если они существуют) лежит по крайней мере один нуль функции $B_{N+1}(t)$: $\tau_{N,1}<\tau_{N+1}<\tau_{N,2}$.*

Доказательство. Равенство (8) представляет собой линейное дифференциальное уравнение для $B_N(t)$. Предположим, что функция $B_N(t)$ имеет два нуля $\tau_{N,1}$ и $\tau_{N,2}$. Выпишем решение (8) с начальным условием $B_N(\tau_{N,1})=0$,

$$B_N(t)=\exp(J)\int_{\tau_{N,1}}^{t}B_{N+1}(t)\exp(-J)\,dt,$$

где $J=\int_{\tau_{N,1}}^{t}gdt$. Если взять здесь в качестве аргумента второй корень уравнения $B_N=0, t=\tau_{N,2}$, то интеграл от функции B_{N+1} (с положительным множителем $\exp(-J)$) на интервале от $\tau_{N,1}$ до $\tau_{N,2}$ оказывается равным нулю. Следовательно, эта функция, являясь непрерывной, меняет знак, пересекая ось t между $\tau_{N,1}$ и $\tau_{N,2}$. Таким образом, корень уравнения $B_{N+1}=0$ лежит в этом интервале, что и требовалось доказать.

2. Методом математической индукции с использованием (8) легко доказать следующие свойства оператора K_N:

$$K_N(cg(t))=c^NK(g(t/c)), \tag{24}$$

$$K_N(a/(t+c))=a(a+1)\ldots(a+N-1)/(t+c)^N, \tag{25}$$

$$K_N(g(t)+a)=\sum_{i=0}^{N}C_i^NK_i(g(t))a^{N-i}, \tag{26}$$

где a,c – некоторые вещественные константы. Свойство (24) имеет практическое значение при вычислении точек нестабильности процесса деформирования сжатого стержня при ползучести. Согласно (23), замена $g(t)$ на $cg(t)$ означает, что скорость деформации ползучести увеличивается в c раз. Пересчет точек нестабильности при этом производится просто: картина их распределения на оси t в соответствии с (24) сжимается в c раз.

Свойство (25) устанавливает, что в ядро оператора K_N входят функции $g=-m/(t+c)$, $m=0,1,\ldots,N-1$. Рассуждения о ядрах оператора, действующего на несколько функций, приводит нас к следующему результату, связанному с решением обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Условие редукции дифференциального уравнения

1. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение порядка N

$$\begin{gathered}y^{(N)}+y^{(N-1)}h_{N-1}(t)+\ldots+\ddot{y}h_2(t)+\\+\dot{y}h_1(t)+yh_0(t)=0.\end{gathered} \tag{27}$$

Последовательно дифференцируя исходное уравнение $N-1$ раз, составим систему N уравнений, которую запишем в виде

$$G\vec{U}=0, \tag{28}$$

где $\vec{U}=\left\{y,\dot{y},\ddot{y},\ldots,y^{(2N-1)}\right\}$. Матрицу G, размером $N\times 2N$ представим суммой $G=\sum_{i=0}^{N}G_i$. Каждое слагаемое G_i отвечает функции $h_i(t)$ и имеет структуру (на примере $N=4$)

$$G_i=\begin{bmatrix}0&\ldots&0&h_i&0&0&0&0&\ldots&0\\0&\ldots&0&\dot{h}_i&h_i&0&0&0&\ldots&0\\0&\ldots&0&\ddot{h}_i&2\dot{h}_i&h_i&0&0&\ldots&0\\0&\ldots&0&h_i^{(3)}&3\ddot{h}_i&3\dot{h}_i&h_i&0&\ldots&0\end{bmatrix}.$$

Номера ненулевых столбцов матрицы равны $i+1,i+2,\ldots,i+N-1$. Каждая k-я строка матрицы представляет собой коэффициенты при $y^{(m)}$, $i\le m\le i+k-1$ в формуле Лейбница для $k-1$-й производной произведения $h_i(t)y^{(i)}$.

Разделим матрицу G на две части. Первые N столбцов образуют матрицу A_N, последние – матрицу C. Запишем систему (27) в виде

$$A_N\vec{V}=-C\vec{W}, \tag{29}$$

где $\vec{V}$ вектор, составленный из первых N элементов $\vec{U}$, а $\vec{W}$ – из N последних. Представим правую часть системы (28) в виде вектора $\vec{F}=-C\vec{W}$, в компоненты которого входят только старшие производные функции y (порядка от N до $2N-1$). Запишем решение (28) по правилу Крамера $y^{(i)}D=D_i, i=0,1,2,\ldots,N-1,$ где D –

определитель матрицы A_N или в соответствии с определением оператора $D = K_N\left(h_0, h_1, ..., h_{N-1}\right)$, а D_i – определитель матрицы, полученной заменой i-го столбца матрицы A_N на вектор $\vec{F}$. Если $D = 0$, то

$$\begin{gathered} D_i = y^{(2N)} g_N(t) + ... + y^{(N+1)} g_1(t) + \\ + y^{(N)} g_0(t) = 0, \end{gathered} \qquad (30)$$

где коэффициенты $g_i(t)$ выражаются через функции $h_i(t)$ и их производные. Вводя обозначение $v = y^{(N)}$, получим из (29) линейное дифференциальное уравнение для v порядка $N-1$. Легко показать, что это уравнение не зависит от номера столбца i, заменяемого в матрице A_N на вектор $\vec{F}$. Таким образом, функции, составляющие ядро оператора $K_N\left(h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}\right)$, являются коэффициентами при соответствующих производных дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$f(t)\ddot{y} + g(t)\dot{y} + h(t)y = 0. \qquad (31)$$

Система (28) имеет для этого уравнения вид

$$\begin{bmatrix} h & g \\ \dot{h} & \dot{g} + h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f\ddot{y} \\ \left(\dot{f} + g\right)\ddot{y} + f\dddot{y} \end{bmatrix}.$$

Условием редукции является соотношение $h(\dot{g} + h) = \dot{h}g$, представляющее собой дифференциальное уравнение для g (или для h). На основании его решения получим следующую связь коэффициентов $g = -(t+a)h$, где a – произвольная константа. Уравнение (30) при условии (31) сводится к уравнению первого порядка для $v = \ddot{y}$

$$\begin{vmatrix} h & f\ddot{y} \\ \dot{h} & \left(\dot{f} + g\right)\ddot{y} + f\, y^{(3)} \end{vmatrix} = hf\dot{v} + \left[\left(\dot{f} + g\right)h - \dot{h}f\right]v = 0.$$

3. Если уравнение N-го порядка линейно относительно всех производных функции кроме высшей, то условие редукции такого уравнения не отличается от соответствующего линейного. В результате описанной процедуры исходное уравнение сводится также к нелинейному, но порядка на 1 ниже.

Пример 3. Рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка

$$\left(\ddot{y}\right)^k - (t+a)h(t)\dot{y} + h(t)y = 0.$$

Описанным методом сведем его к уравнению первого порядка

$$\left(k/(k-1)\right)h\dot{v} - \dot{h}v = -gh.$$

для $v = \left(\ddot{y}\right)^{k-1}$. Это уравнение имеет решение

$$v = h^{(k-1)/k}\left(\frac{k-1}{k}\int_{\tau}^{t} h^{1/k}(t+a)\,dt + C_1\right).$$

Пример 4. Уравнение третьего порядка $s(t)y^{(3)} + f(t)\ddot{y} + g(t)\dot{y} + hy = 0$ $\left(h = \text{const}\right)$ порождает систему уравнений с матрицей

$$A_3 = \begin{bmatrix} h & g & f \\ 0 & \dot{g} + h & \dot{f} + g \\ 0 & \ddot{g} & \ddot{f} + 2\dot{g} + h \end{bmatrix}.$$

Условие редукции $\det A_3 = 0$ сводится к соотношению

$$\left(\dot{g} + h\right)\left(\ddot{f} + 2\dot{g} + h\right) = \ddot{g}\left(\dot{f} + g\right).$$

При этом для переменной $v = y^{(3)}$ получим уравнение

$$\begin{gathered} \ddot{v}s\left(h + \dot{g}\right) + \dot{v}\left[\left(2\dot{s} + f\right)\left(h + \dot{g}\right) - s\ddot{g}\right] + \\ + v\left[\left(\ddot{s} + 2\dot{f} + g\right)\left(h + \dot{g}\right) - f - \dot{s}\right] = 0. \end{gathered}$$

* * * * * * * * * *

1. *Kirsanov M.N.* Singular points of the creep deformation and buckling of a column // Int. J. Eng. Sci. – 1997. – Vol.5. – №3. – P.221-227.
2. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
3. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 127 с.
4. *Кирсанов М.Н.* Определение и анализ стабильности движения с использованием системы Maple // Exponenta Pro. Математика в приложениях. – 2004. – №3-4. – С.134-137.
5. *Еренков О.Ю., Ивахненко А.Г., Ивахненко Е.О.* Стабильность технологической системы при точении полимерных материалов // Изв. Орловского гос. технич. ун-та. Сер. Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2008. – №3-7. – С.14-23.

DEFINITION, PROPERTIES AND APPLICATIONS OF ONE NONLINEAR DIFFERENTIAL OPERATOR

M.N.Kirsanov

We consider two independent problems: the definition of points of instability in the generalized problem (with initial conditions for the derivatives of order higher than that of the equation) and the definition of the condition of lowering the order in the ordinary differential equation. The common feature of these problems is the operator whose properties are studied. It is shown that the operator of the linear function generates a Hermite polynomial of the same order of the operator. The application to the mechanics of the reaction of a centrally compressed rod on the perturbations of higher order derivatives of the deflection is considered.

Key words: differential equation, operator, rheology, stability, Cauchy, buckling.

* * * * * * * * * *

Кирсанов Михаил Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики и мехатроники Московского энергетического института (Технического университета).

E-mail: mpei2004@yandex.ru

Поступила в редакцию 17.10.2010