

Министерство образования и науки Российской Федерации
Российский фонд фундаментальных исследований
Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

**Международный научный семинар
«Нелинейные модели в механике,
статистике, теории поля и космологии»
GRACOS-17**

**Международная школа
«Математическое моделирование фундаментальных объектов
и явлений в системах компьютерной математики»
KAZCAS-17**

**Международная научно-практическая конференция
«Информационные технологии в образовании и науке»
(ИТОН-2017)**

Сборник трудов

(4 – 6 ноября 2017 г., Казань)



Казанский (Приволжский) федеральный университет

2017

УДК 519.711.3+530.12+531.51+517.944+519.713+514.774
ББК 22.632
М43

*Печатается по рекомендации Ученого Совета Института математики
и механики им. Н.И. Лобачевского*

Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук,
проф. Ю.Г. Игнатьева

М43 **Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» – GRACOS-17. Международная школа по математическому моделированию в системах компьютерной математики – «KAZCAS-2017». Международная научно-практическая конференция – «ИТОН–2017».** // Материалы семинара, школы и конференции. / Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук, проф. Ю.Г. Игнатьева — Казань: Академия наук РТ, 2017. - 279 с.

ISBN 978-5-9690-0389-7

Материалы сборника предназначены для научных сотрудников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области физико-математических, информационных и образовательных наук.

International science seminar «Nonlinear models in the mechanics, statistics, theory field and cosmology» – GRACOS-17. The international scientifically-practical conference «ITES-2017». International seminar-school of mathematical modelling in CAS «KAZCAS-2017». // Materials of conference and seminar-school works. Under the general edition of Yu.G. Ignat'ev. – Kazan: Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan Press, 2017. – 279 p.

Materials are intended for the young scientific Scientists, post-graduate students, magisters and students of older years, specializing in area physical and mathematical, information and educational sciences. Materials are recommended as the manual of post-graduate students, magisters and students of the older years specializing in area physical and mathematical, information and educational sciences, in subjects of mathematical and computer modelling.

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований – грант РФФИ – 17-01-20299 г.

УДК 519.711.3+530.12+531.51+517.944
+519.713+514.774
ББК 22.632

ISBN 978-5-9690-0389-7

© Коллектив авторов, 2017
© Лаборатория информационных технологий
в математическом образовании Института
математики и механики КФУ, 2017
© Издательство АН РТ, 2017

COSMOLOGICAL SCENARIO WITH MULTIPHASE BEHAVIOR
IN THE THEORY OF INDUCED GRAVITY

F. Zaripov

This research is an extension of the author's article (Grav. & Cosm., 13 (2007), No. 4; Zaripov F.Sh.//Astr. and Space Sci. : Volume 352, Issue 1 (2014), Page 289-305.), in which conformally invariant generalization of string theory was suggested to higher-dimensional objects. Special cases of the proposed theory are Einstein's theory of gravity and string theory. In this model time-evolving gravitational (G_{eff}) and cosmological (Λ_{eff}) "constants" take place which are determined by the square of scalar fields $Y \equiv (X, X)$. The values of which can be matched with the observational data. The study is done to solve these equations for the case of the cosmological model. The theory describes the two systems (stages): Einstein and "restructuring" (the name suggested by the author). This process is similar to the phenomenon of phase transition, where the different phases (Einstein gravity system, but with different constants) transit into each other.

Keywords: cosmological model, dark energy, dark matter, scalar field.

УДК 624.24

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВАРИАНТОВ СХЕМ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ
ФЕРМЫ В СИСТЕМЕ MAPLE**М.Н. Кирсанов¹

¹ c216@ya.ru; Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Предложены две новые схемы плоской фермы балочного типа. Строится математическая модель деформирования конструкции под действием различных нагрузок. Методом индукции выводятся формулы для прогиба в зависимости от числа панелей. Обнаружены случаи кинематического вырождения. Построены схемы виртуальных скоростей.

Ключевые слова: ферма, прогиб, Maple, индукция, кинематическая изменяемость.

Расчет деформаций стержневых конструкций обычно выполняют в специализированных пакетах, использующих численные методы. В тех случаях, когда конструкция содержит значительное число элементов, численные методы дают неизбежные ошибки округления. Альтернативой численным методам являются аналитические преобразования, позволяющие вывести формульный вид для деформаций и напряжений в основных элементах системы [2, 3]. Наиболее сложным в таких задачах является учет числа элементов конструкции. Современные системы компьютерной математики (Maple, Mathematica) имеют специализированные операторы, составляющие и решающие рекуррентные уравнения, что дает возможность применять метод индукции. Кроме того, аналитические методы часто выявляют такие особенности конструкции, которые ускользают от исследователя и проектировщика при использовании численных методов. В настоящей работе предлагаются две близкие схемы плоской фермы, дается вывод формул для прогиба и анализ кинематической изменяемости схем.

1. Схема 1. Раскосы

Симметричная ферма (Рис. 1) содержит n панелей в половине пролета. В ферме $4n + 6$ узлов (идеальных шарниров), $m = 8n + 12$ стержней.

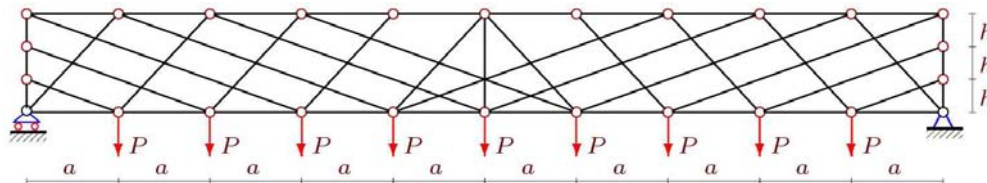


Рис. 1. Схема 1, $n = 5$.

Для определения прогиба фермы под действием нагрузки, равномерно распределенной по узлам нижнего пояса, используем формулу Максвелла- Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} S_i N_i l_i / (EF),$$

где S_i — усилия в стержнях от действия нагрузки, N_i — усилия от единичной (безразмерной) силы, приложенной к центральному узлу фермы, l_i — длина стержня i , EF — жесткость стержней. Усилия определяются методом вырезания узлов по программе [3]. В программу вводятся координаты узлов. Стержни и узлы нумеруются, начало координат помещается в левую подвижную опору. Приведем соответствующий фрагмент программы на языке Maple

```
for i to 2*n+1 do
  x[i]:=a*(i-1);   y[i]:=0;
  x[i+2*n+3]:=x[i]; y[i+2*n+3]:=3*h;
od:
for i to 2 do
  x[i+2*n+1]:=0;   y[i+2*n+1]:=h*i;
  x[i+4*n+4]:=x[2*n+1]; y[i+4*n+4]:=3*h-h*i;
od:
```

Структура решетки задается специальными векторами $N[i]$ с номерами концов соответствующих стержней. Пояса, например, кодируются следующим образом:

```
for i to 2*n do N[i]:=[i,i+1]; od:
for i to 2*n+4 do N[i+2*n]:=[i+2*n+1,i+2*n+2]; od:
```

Матрица уравнений равновесия узлов состоит из направляющих косинусов усилий, определяемых через длины $L[i]$ стержней и проекции L_{xy} их векторных представлений на оси координат:

```
for i to m do
  Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]];
  Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]];
  L[i]:=sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2);
```

```

for j to 2 do
  jj:=2*N[i][2]-2+j:
  if jj<=m then G[jj,i]:=-Lxy[j]/L[i]: fi;
  jj:=2*N[i][1]-2+j:
  if jj<=m then G[jj,i]:= Lxy[j]/L[i]: fi;
od;#j
od:#i

```

Условные операторы ограничивают ввод размерами матрицы $m \times m$. Решение системы уравнений с матрицей G и правой частью, зависящей от внешней нагрузки, дает выражения для усилий в символьной форме. Это позволяет получить аналитическое выражение для прогиба. Последовательный расчет ферм с различным числом панелей выявил особенность конструкции. Оказалось, что для ферм с числом панелей 3, 4, 7, 8, 11 ... определитель равен нулю. Это показывает, что такие фермы кинематически изменяемы. Подтверждением этого является схема возможных скоростей узлов, найденная при $n = 3$ (Рис. 2).

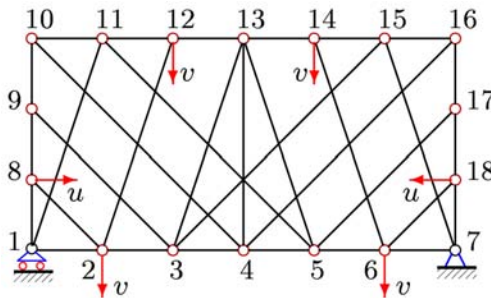


Рис. 2. Схема возможных скоростей, $n = 3$.

Узлы 3-5, 7, 9-11, 13, 15-17 при этом остаются неподвижными, стержни 2-8, 1-2, 1-8, 8-9, 11-12, 12-13 и симметричные им совершают мгновенные вращения вокруг соответствующих узлов. Заметим, что найденное распределение скоростей не является единственным. Скорости связаны соотношением $v/a = u/h$.

Для того, чтобы исключить недопустимые значения числа панелей и составить последовательность частных решений, по которой можно в дальнейшем методу индукции найти общее решение, зададим следующую функцию

$$n = (1 + (-1)^k + 4k)/2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

В этом случае последовательность значений n не включает в себя числа панелей, при которых определитель обращается в нуль. Расчет прогиба по формуле Максвелла - Мора показал, что форма решения остается постоянной для всех n и имеет вид

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 h^3 + C_3 c^3 + C_4 d^3)/(18h^2 EF), \quad (1)$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $d = \sqrt{a^2 + 9h^2}$. Последовательность коэффициентов при a^3 имеет вид 87, 198, 1146, 1997, 5607, 8368, 17520, 23901, 42555, 54806, 88002, 108913, 162771, 195672, 277392, 326153, 444015, 513046... Оператор **rgf_findrecur** из пакета **genfunc** по данным этой последовательности дает рекуррентное уравнение девятого поряд-

ка

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + 4C_{1,k-2} - 4C_{1,k-3} - 6C_{1,k-4} + 6C_{1,k-5} + 4C_{1,k-6} - 4C_{1,k-7} - C_{1,k-8} + C_{1,k-9}.$$

Вместе с начальными условиями $C_{1,1} = 70$, $C_{1,2} = 603$, $C_{1,3} = 1290$, $C_{1,4} = 5733$, $C_{1,5} = 8798$, $C_{1,6} = 24351$, $C_{1,7} = 32834$, $C_{1,8} = 70537$, $C_{1,9} = 88758$ оператор **rsolve** возвращает решение

$$C_1 = (80k^4 + 80((-1)^k + 1)k^3 + (60(-1)^k + 136)k^2 + (145 - 11(-1)^k)k - 51(-1)^k + 57)/6.$$

Аналогично находятся и другие коэффициенты:

$$C_2 = 27((7 - 3(-1)^k)k + 2(-1)^k + 2)/2,$$

$$C_3 = 27(10k^2 + (10 - 2(-1)^k)k - (-1)^k + 1)/8,$$

$$C_4 = (10k^2 + (10(-1)^k + 6)k + 3(-1)^k + 5)/8.$$

Опуская выкладки приведем также решение при загрузении верхнего пояса. Соотношение (1) не меняется, а коэффициенты имеют вид

$$C_1 = (80k^4 + 80((-1)^k + 1)k^3 + (60(-1)^k + 136)k^2 + (37 - 11(-1)^k)k + 33(-1)^k - 27)/6,$$

$$C_2 = 27((7 - 3(-1)^k)k + 2(-1)^k - 2)/2,$$

$$C_3 = 27(10k^2 + 2(1 - (-1)^k)k + 3(-1)^k - 3)/8,$$

$$C_4 = (10k^2 + (10(-1)^k + 6)k + 3(-1)^k + 5)/8.$$

2. Схема 2. Стойки

Разработанная математическая модель позволяет легко изменить схему конструкции и проанализировать выполненное изменение. Рассмотрим случай, когда восходящие раскосы (кроме крайних, Рис. 1) заменяются стойками (Рис. 3).

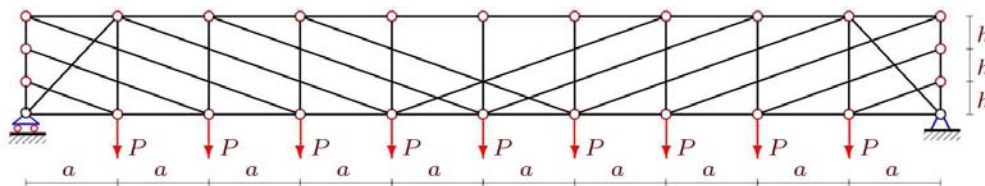


Рис. 3. Схема 2, $n = 5$.

Алгоритм расчета и вывода формулы для прогиба не меняется. Не меняется и вид формулы (1). Коэффициенты в (1) имеют вид

$$C_1 = (270k^4 + 180(5 - (-1)^k)k^3 + 18(77 - 25(-1)^k)k^2 + 4(137 - 289(-1)^k)k - 307(-1)^k + 371)/64,$$

$$C_2 = 27(2k^2 + (-6(-1)^k - 2)k + 3(-1)^k + 5)/8,$$

$$C_3 = 27(2k^2 + (-2(-1)^k + 2)k - (-1)^k + 1)/8,$$

$$C_4 = (((-1)^k + 1)k + (-1)^k + 1)/2.$$

Как и в схеме 1 эта ферма также имеет скрытый и крайне опасный дефект. При $n = 2, 5, 8, 11 \dots$ определитель системы уравнений равновесия обращается в ноль.

Именно поэтому для получения последовательности решений, необходимой для вывода обобщенной формулы, справедливой для любого допустимого числа панелей, выполнена замена $n = (5 - (-1)^k + 6k)/4$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Пример схемы возможных скоростей, подтверждающей дефект конструкции при $n = 2$, приведен на рисунке 4.

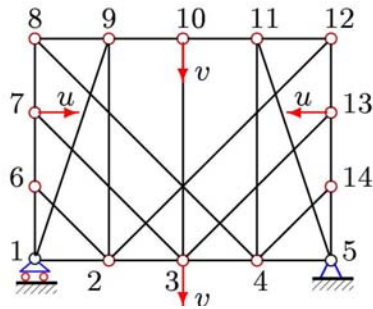


Рис. 4. Схема возможных скоростей, $n = 2$.

Графики зависимости прогиба от числа панелей при фиксированной нагрузке на ферму $P_s = P(2n - 1)$ и заданной длине пролета $L = 2na$, построенные по выведенным формулам, (Рис. 5) показывают, что схема 2 с вертикальными стойками более жесткая. Введено обозначение для безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta EF/(PL)$. Оба решения при $n = 13$ имеют экстремальные точки — минимальный прогиб (если не учитывать достаточно резкие скачки и судить по некоторой условной огибающей, сглаживающей изломы). Следует помнить, что оба решения справедливы только при определенных числах n , отмеченных точками на кривых, а отрезки, соединяющие эти точки, даны только для наглядности.

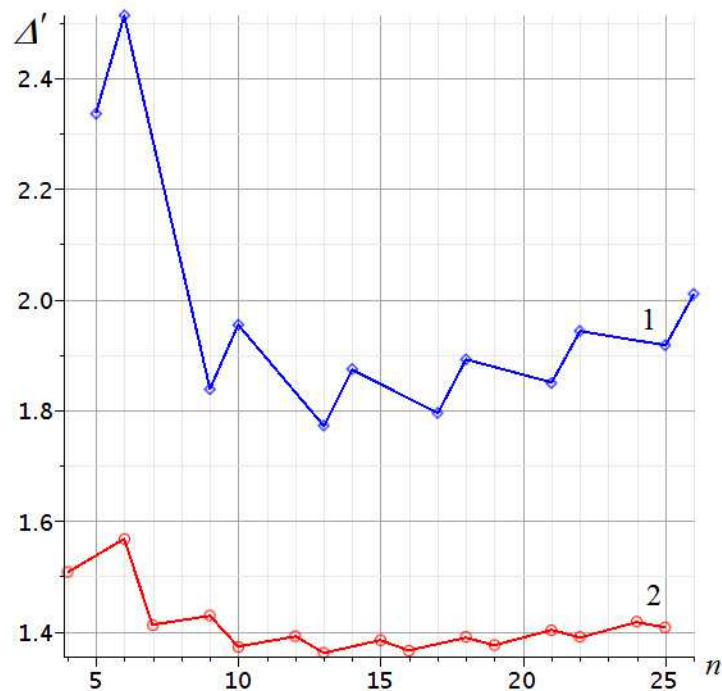


Рис. 5. Зависимость прогиба от числа панелей, $L = 100\text{м}$, $h = 5\text{м}$.

Ранее аналогичные исследования с выводом формул для прогиба плоских ферм

методом индукции при поддержке операторами системы Maple были выполнены в [4, 12, 4, 5, 6, 7, 10]. В [11] дано решение для фермы, допускающей кинематическое вырождение. В [8] метод индукции в системе Maple применен для получения формулы прогиба пространственной фермы.

Литература

1. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы / М.Н. Кирсанов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – № 5. – С. 50–55.
2. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей / М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. – 2017. – № 3(873). – С. 26–29.
3. Кирсанов М.Н. Решебник. Теоретическая механика / М.Н. Кирсанов / Под ред. А.И.Кириллова. – М.: Физматлит, 2008. – 382 с.
4. Астахов С.В. Вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы под действием нагрузки в середине пролета / С.В. Астахов // Строительство и архитектура. – 2017. – Т. 5, № 2. – С. 50–54.
5. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы / М.Н. Кирсанов, А.Н. Маслов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2017. – № 2(271). – С. 4–10.
6. Salimov M.S. The formula for deflection of a composite truss, loaded on the bottom flange / M.S. Salimov // Science Almanac. – 2017. – № 2-3(28). – P. 272–274.
7. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load / M.A. Ponamareva // Science Almanac. – 2016. – № 4-3(18). – P. 257–259.
8. Voropai R.A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice / R.A. Voropai // Science Almanac. – 2016. – № 4-3(18). – P. 238–240.
9. Shipaeva A.S. Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple / A.S. Shipaeva // Science Almanac. – 2016. – № 5-3(19). – P. 236–239.
10. Кирсанов М.Н. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы / М.Н. Кирсанов, А.П. Суворов // Вестник МГСУ. – 2017. – Т.12, Вып. 8(107). – С. 869–875.
11. Кирсанов М.Н. Индуктивный метод вывода формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематического вырождения // Строительство и архитектура. 2017. – Т. 5. Вып. 2 (15). – С. 45–49.
12. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice / M.N. Kirsanov // Magazine of Civil Engineering. – 2016. – № 4. – P. 52–58.

COMPARATIVE ANALYSIS OF VARIANTS OF SCHEMES OF A STATICALLY DEFINABLE TRUSS IN THE MAPLE SYSTEM

M.N. Kirsanov

Two new schemes of a flat truss beam type are proposed. A mathematical model of the deformation of a structure under the action of various loads is being constructed. The induction method derives formulas for the deflection depending on the number of panels. Cases of kinematic degeneracy are found. Schemes of virtual velocities are constructed.

Keywords: truss, deflection, Maple, induction, kinematic degeneration.