

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Российский фонд фундаментальных исследований  
Казанский (Приволжский) федеральный университет  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

---

**Международный научный семинар  
«Нелинейные модели в механике,  
статистике, теории поля и космологии»  
GRACOS-17**

**Международная школа  
«Математическое моделирование фундаментальных объектов  
и явлений в системах компьютерной математики»  
KAZCAS-17**

**Международная научно-практическая конференция  
«Информационные технологии в образовании и науке»  
(ИТОН-2017)**

**Сборник трудов**

*(4 – 6 ноября 2017 г., Казань)*

---



Казанский (Приволжский) федеральный университет

2017

**УДК 519.711.3+530.12+531.51+517.944+519.713+514.774**  
**ББК 22.632**  
**М43**

*Печатается по рекомендации Ученого Совета Института математики  
и механики им. Н.И. Лобачевского*

Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук,  
**проф. Ю.Г. Игнатьева**

**М43** **Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» – GRACOS-17. Международная школа по математическому моделированию в системах компьютерной математики – «KAZCAS-2017». Международная научно-практическая конференция – «ИТОН–2017».** // Материалы семинара, школы и конференции. / Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук, проф. Ю.Г. Игнатьева — Казань: Академия наук РТ, 2017. - 279 с.

**ISBN 978-5-9690-0389-7**

Материалы сборника предназначены для научных сотрудников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области физико-математических, информационных и образовательных наук.

**International science seminar «Nonlinear models in the mechanics, statistics, theory field and cosmology» – GRACOS-17. The international scientifically-practical conference «ITES-2017». International seminar-school of mathematical modelling in CAS «KAZCAS-2017».** // Materials of conference and seminar-school works. Under the general edition of Yu.G. Ignat'ev. – Kazan: Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan Press, 2017. – 279 p.

Materials are intended for the young scientific Scientists, post-graduate students, magisters and students of older years, specializing in area physical and mathematical, information and educational sciences. Materials are recommended as the manual of post-graduate students, magisters and students of the older years specializing in area physical and mathematical, information and educational sciences, in subjects of mathematical and computer modelling.

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований – грант РФФИ – 17-01-20299 г.

**УДК 519.711.3+530.12+531.51+517.944**  
**+519.713+514.774**  
**ББК 22.632**

**ISBN 978-5-9690-0389-7**

© Коллектив авторов, 2017  
© Лаборатория информационных технологий  
в математическом образовании Института  
математики и механики КФУ, 2017  
© Издательство АН РТ, 2017

3. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики: Учебное пособие / М.Н. Кирсанов. – СПб.: Изд-во Лань, – 2012. – 512 с.
4. Мартыненко Ю.Г. Динамика мобильных роботов / Ю.Г. Мартыненко // Соросовский образовательный журнал. – 2000. – Т. 6. – № 5. – С. 1–7.
5. Мартыненко Ю.Г. Управление движением мобильных колесных роботов / Ю.Г. Мартыненко // Фундаментальная и прикладная математика. – 2005. – Т. 11. – № 8. – С. 29–80.

## MODELING OF THE DYNAMIC MODEL OF A MULTICOMPONENT MECHANISM IN THE MAPLE MATHEMATICAL PACKAGE

S.P. Cherepanov

*The problem consists in deriving the equations of motion of the multicomponent model mechanism consisting of  $N$  number of individual two-wheeled modules connected with each other by means of elastic elements; research dependence of the trajectory of motion of a multicomponent mechanism in depending on the torque applied to the drives; derivation of equations moments on the drives for the realization of program movement multicomponent mechanism.*

Keywords: robot, dynamics, multicomponent mechanism, trajectory.

УДК 514.822

## ИНДУКТИВНЫЙ ВЫВОД ЗАВИСИМОСТИ ПРОГИБА И СМЕЩЕНИЯ ОПОРЫ АРОЧНОЙ ФЕРМЫ ОТ ЧИСЛА ПАНЕЛЕЙ В СИСТЕМЕ MAPLE

А.С. Широков<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [as.shirokov@yandex.ru](mailto:as.shirokov@yandex.ru); Национальный исследовательский университет «МЭИ»

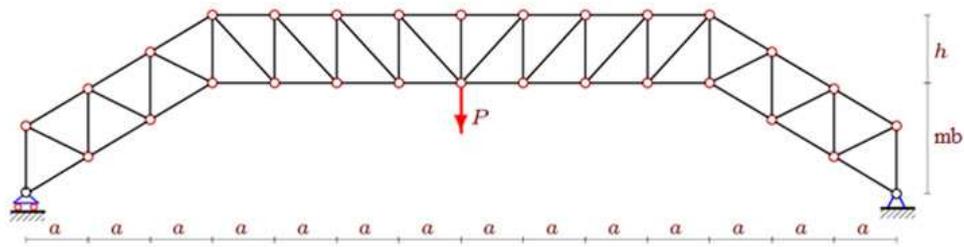
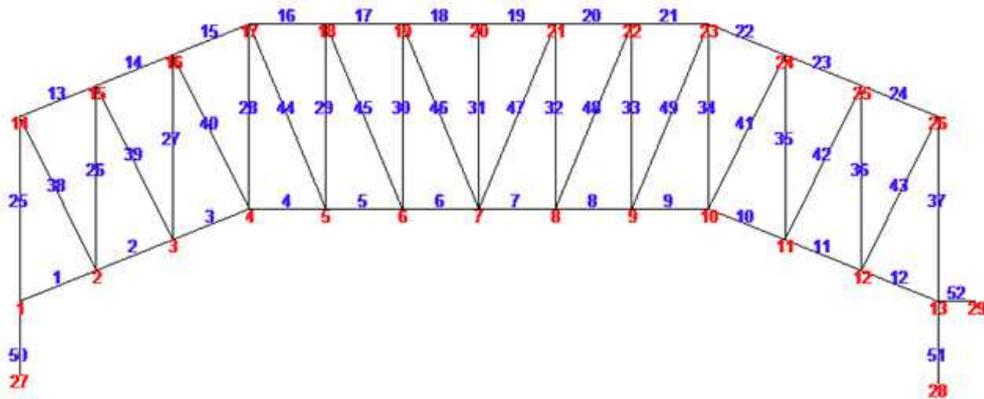
*В плоской ферме, имеющей две опоры, аналитически находим выражение вертикального смещения среднего узла и горизонтального смещения опоры. Воспользовавшись методом вырезания углов, в системе компьютерной математики Maple определяем в символьной форме усилия в стержнях. Используя метод индукции, получаем зависимости от нагрузки, размеров и количества панелей фермы.*

**Ключевые слова:** Maple, метод индукции, арочная ферма, прогиб фермы.

Пропорции фермы определяются размерами ее панелей  $a$ ,  $b$ ,  $h$  и числом панелей в средней и боковых частях (рис. 1). Для определения прогиба фермы примем за  $2n$  число горизонтальных панелей фермы верхнего пояса, а за  $t$  число боковых панелей. Соответственно  $2t + 2n$  — общее количество панелей, так как ферма симметрична относительно середины.

Все преобразования выполним в системе компьютерной математики Maple, определение усилий в стержнях — по программе [1] на основе метода вырезания узлов. Обобщение частных решений на произвольное число панелей выполним методом двойной индукции. Этим же способом (но с более простой однократной индукцией) получены решения для плоских ферм [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

Начало координат поместим в левую подвижную опору. Нумеруем узлы и стержни (рис.2).

Рис. 1. Ферма при  $n=4, m=3$ Рис. 2. Нумерация узлов и стержней,  $n=3, m=3$ 

Для программы зададим в цикле специальные векторы, определяющие номера шарниров на концах соответствующих стержней. Структуру стержней нижнего и верхнего пояса задают следующие операторы системы Maple:

```
r:=2*m+2*n+1; for i to r-1 do N[i]:=[i,i+1]; N[i+r-1]:=[i+r,i+1+r]; od:
```

Структуру решетки задают операторы:

```
for i to r do N[i+2*r-2]:=[i,i+r]; od:
```

```
for i to m do
```

```
  N[i+3*r-2]:=[i+1,i+r];
```

```
  N[i+3*r-2+m]:=[i+2*n+m,i+3*n+2+4*n+2];
```

```
od:
```

```
for i to n do
```

```
  N[i+3*r-2+2*m]:=[i+m+1,i+3*m+2*n+1];
```

```
  N[i+3*r-2+2*m+n]:=[i+m+n,i+3*m+3*n+2];
```

```
od:
```

Ферма содержит  $m_0 = 4r = 4(2m + 2n + 1)$  стержней. Составляются уравнения равновесия стержней методом вырезания узлов. В матрицу системы уравнений равновесия входят направляющие косинусы стержней. В нечетные строки с номером содержатся косинусы с горизонтальной осью  $x$ , в четные – с вертикальной осью  $y$ . Вектор правой части формируется из компонент внешних усилий.

Воспользовавшись формулой Максвелла – Мора, вычислим прогиб:

$$\Delta = P \sum_{i=1}^{n_s-3} S_i^2 l_i / (EF),$$

где  $S_i$  — усилия в стержнях, от внешней единичной вертикальной нагрузки  $P$ , действующей на всю ферму,  $l_i$  — длины стержней,  $n_s$  — число стержней,  $EF$  — жесткость стержней. Опорные стержни (два в неподвижной и один в подвижной опоре) в сумму не входят. Деформация этих стержней не учитывается. Рассмотрим сначала случай  $m = 3$ . В процессе расчета ферм обнаруживается, что расчетная формула не меняется при разных  $n$  и имеет вид

$$\Delta EF = P(Aa^3 + Cc^3 + Hh^3 + Gg^3 + Jj^3 + B)/(2h^2),$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $j = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $g = \sqrt{a^2 + (b-h)^2}$ . Коэффициенты находим индукцией. Увеличивая количество панелей фермы, получим ряд коэффициентов при  $a^3$ : 25, 66, 127, 212, 325, 470, 651, 872. Воспользовавшись функцией **rgf\_findrecur**, пакета **genfunc** системы Maple, получаем для указанной последовательности рекуррентное соотношение:

$$A_n = 4A_{n-1} - 6A_{n-2} + 4A_{n-3} - A_{n-4}.$$

Используя оператор **rsolve**, находим решение этого рекуррентного уравнения:

$$A = n(2n^2 + 18n + 55)/3.$$

Аналогичным образом находим коэффициенты при  $A^3$ ,  $g^3$  и  $h^3$ .

$$C = n, G = 3, H = n + 3, J = 19 \text{ и } B = 9b^2h - 6bh^2.$$

Повторяем описанные выше действия для случая  $m=2$ . В этом случае коэффициенты в формуле (1) принимают значения:

$$A = n(25 + 2n^2 + 12n)/3, C = n, G = 2, H = n + 2 \\ J = 6, B = 4b^2h - 4bh^2.$$

Аналогичную операцию проводим для  $m=4$  и получаем результат:

$$A = n(2n^2 + 24n + 97)/3, C = n, G = 4, H = n + 4 \\ J = 44, B = 16b^2h - 8bh^2.$$

Из рассмотренных случаев, очевидно, что коэффициенты в ферме зависят как от  $n$ , так и от  $m$ . Поэтому для эффективного расчета ферм с любым количеством горизонтальных и боковых пролетов необходимо вывести зависимость по  $m$ . Для этого найдем зависимости  $n$  для ферм с  $m = 1..8$ . Из полученных выражений очевидным образом находятся следующие зависимости:

$$G = m, H = n + m, B = (mb)^2 - 2mbh^2.$$

Для коэффициента при  $j^3$  числовая последовательность будет выглядеть следующим образом: 1, 6, 19, 44, 85, 146, 231, 344. Воспользуемся уже известным использованным способом и определим зависимость:

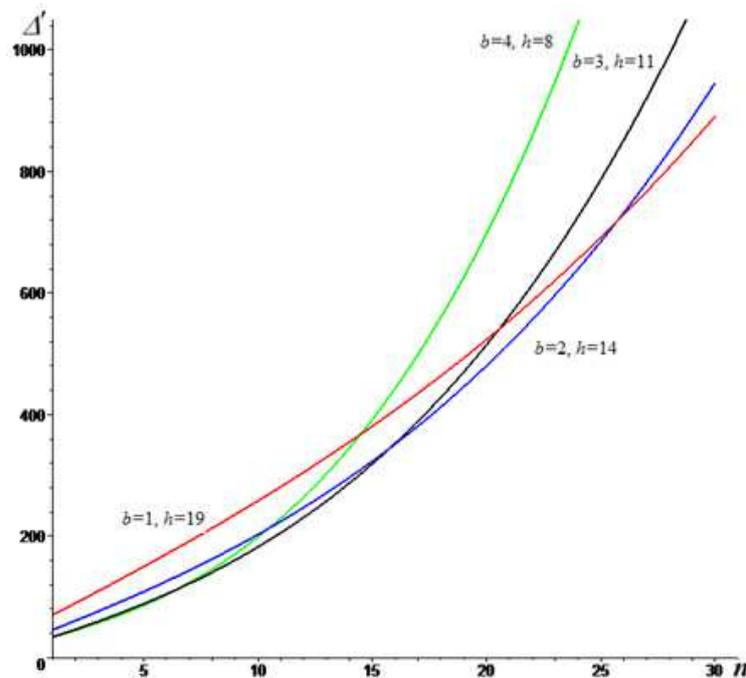
$$J = m(2m^2 + 1)/3$$

Несколько сложнее методом индукции по  $m$  получаем зависимость  $A$  от  $m$  и  $n$  в следующем виде:

$$A = n(2n^2 + 6mn + 6m^2 + 1)/3$$

Таким образом методом двойной индукции получено достаточно общее решение задач, содержащее кроме значения нагрузки три геометрических и два натуральных параметра.

В ферме существует два параметра, отвечающие за ее высоту,  $h$  — высота стойки,  $m$  — число боковых наклонных панелей. Для определения наиболее выгодной (оптимальной по жесткости) конфигурации фермы при определенных условиях построим кривые относительного прогиба  $\Delta' = \Delta EF/P$  при  $m = 3$ ,  $a = 2$  м и общей высоте фермы  $h + mb = 20$  м. Все размеры на графике даны в метрах. Построенный график изображен на рисунке 3.



**Рис. 3.** Зависимость прогиба от количества панелей фермы при фиксированной общей высоте

Построенные кривые показывают, что при  $n = 2, \dots, 6$  наименьший прогиб имеет ферма с  $b = 4$  м,  $h = 8$  м, и в тоже время её прогиб при  $n \geq 15$  значительно больше прогиба ферм с меньшим значением  $b$ .

Другой важной характеристикой деформативности фермы является величина смещения подвижной опоры под действием вертикальной нагрузки. Прикладывая горизонтальную единичную (безразмерную) силу к левой подвижной опоре, вычисляем усилия  $s_i$  в стержнях фермы. Смещение находим по формуле

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-3} S_i s_i l_i / (EF).$$

Повторяя описанную процедуру двойной индукции (сначала ищем закономерности по  $n$  при различных  $m$ , затем обобщаем решения по  $m$ ), получаем общее ре-

шение в виде

$$\Delta = P(mB + C_1 a^3 h + C_2 a^3 b) / (ah^2 EF),$$

$$B = mb^3 h - b^2 h^2 + (1 + 2m^2)bc^3/3 + bg^3 + bh^3 + (m - 1)c^3 h/2,$$

$$C_1 = (n^2 + n(2m - 1))/2, \quad C_2 = mn(n + 2m).$$

В [9] дан вывод формулы прогиба для фермы, допускающей при некотором числе панелей кинематическую изменяемость. Описанный подход позволяет рассчитывать в аналитической форме и внешне статически неопределимые фермы [10, 11]. Решетчатые фермы рассчитаны в [12, 13], пространственные — в [14, 15, 16]. Задача о смещении опоры решена в аналитической форме в [17], арочная ферма рассчитана в [18]. Обзор работ, использующих индуктивный вывод формул для прогиба, содержится в [19].

## Литература

1. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решение задач механики / М.Н. Кирсанов. – СПб.: Изд-во Лань, 2012. – 512 с.
2. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях симметричной балочной фермы / М.Н. Кирсанов // Строительство и реконструкция. – 2017. – № 1(69). – С. 19–23.
3. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type / M.N. Kirsanov // Architecture and Engineering. – 2016. – № 3, Vol. 1. – P. 14–17.
4. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа «butterfly» / М.Н. Кирсанов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2016. – № 4. – С. 2–5.
5. Тиньков Д.В. Формулы для расчёта прогиба впарушенной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей / Д.В. Тиньков // Строительная механика и конструкции. – 2016. – Т. 2, № 13(13). – С. 10–14.
6. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load / M.A. Ponamareva // Science Almanac. – 2016. – № 4-3(18). – С. 257–259.
7. Voropai R.A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice / R.A. Voropai // Science Almanac. – 2016. – № 4-3(18). – С. 238–240.
8. Bolotina T.D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels / T.D. Bolotina // Bulletin of Scientific Conferences. – 2016. – № 4-3(8). – P. 7–8.
9. Кирсанов М.Н. Индуктивный метод вывода формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематического вырождения // Строительство и архитектура. 2017. – Т. 5. Вып. 2 (15). – С. 45–49.
10. Астахов С.В. Вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы под действием нагрузки в середине пролета / С.В. Астахов // Строительство и архитектура. – 2017. – Т. 5, № 2. – С. 50–54.
11. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей / М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. – 2017. – № 3 (873). – С. 26–29.
12. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы / М.Н. Кирсанов, А.Н. Маслов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2017. – № 2(271). – С. 4–10.
13. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме / М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. – 2017. – № 4(874). – С. 20–23.
14. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы / М.Н. Кирсанов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2016. – № 5(268). – С. 19–22.

15. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы пространственного покрытия с крестообразной решеткой / М.Н. Кирсанов // Инженерно-строительный журнал. – 2016. – № 4(64). – С. 52–58.
16. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью / М.Н. Кирсанов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. – № 2. – С. 2–6.
17. Широков А.С. Смещение опор двухпролетной неразрезной фермы, нагруженной сосредоточенной силой / А.С. Широков // Научный альманах. – 2017. – № 2-3(28). – С. 290–292.
18. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы / М.Н. Кирсанов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – № 5. – С. 50–55.
19. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций / Д.В. Тиньков // Инженерно-строительный журнал. – 2015. – № 5(57). – С. 66–73.

#### INDUCTIVE EVALUATION OF DEPENDENCE OF DEFLECTION AND SHIFTING OF SUPPORT IN ARCH TRUSS FROM THE NUMBER OF PANELS IN THE MAPLE SYSTEM

A.S. Shirokov

*In a flat truss with two supports, the expressions for the vertical displacement of the middle node and the horizontal displacement of the support in analytical form are obtained. Using the method of cutting corners, in the system of computer mathematics Maple we determine in the symbolic form the forces in the rods. Using the method of induction, we obtain dependencies on the load, size and number of panels in the truss.*

Keywords: aple, induction method, arch truss, deflection truss.

УДК 37.026.4

#### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ПРОЕКТОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ФРАКТАЛОВ

О.А. Широкова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> shirokova2602@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В статье представлены некоторые разделы практикума по курсу «Фрактальная графика». В основе данного курса лежит объектно-ориентированное проектирование программного продукта, при помощи которого пользователю предоставляется возможность изучить особенности фрактальной графики.*

**Ключевые слова:** фрактальная графика, объектно-ориентированное проектирование.

В данной статье рассматривается создание объектов фрактальной графики ([1]-[2]) на примере построения алгебраических фракталов: множества Мандельброта и множества Жюлиа.

Показана эффективность использования визуальных проектов ([3]-[5]) интегрированной среды разработки Delphi при демонстрации фрактальной графики. В настоящее время объектно-ориентированный стиль применяется при разработке широкого круга приложений ([3]-[4]).

## **МАТЕРИАЛЫ**

**МЕЖДУНАРОДНОГО НАУЧНОГО СЕМИНАРА  
«НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ В МЕХАНИКЕ, СТАТИСТИКЕ, ТЕОРИИ ПОЛЯ И  
КОСМОЛОГИИ» – GRACOS-17,**

**МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ  
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ  
В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ –  
«KAZCAS-2017»**

**и**

**МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ  
КОНФЕРЕНЦИИ – «ИТОН–2017»**

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления - **А.А. Агафонов**

Техническая редакция, набор и верстка: **А.А. Агафонов, И.А. Кох, З.Х. Надршина,  
Г.А. Рахимова, А.Р. Самигуллина**

Оформление обложки - **А.А. Агафонов, Р.Ф. Мифтахов**

Набор сборника осуществлен в издательском пакете LaTeX2 $\epsilon$  в учебно - научной лаборатории «Информационных технологий в математическом образовании» Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского университета.

В сборнике трудов опубликованы **53** статьи, посвященная современным проблемам информатизации образования, математическому и компьютерному моделированию в системах компьютерной математики.

Подписано в печать 26.10.17.  
Формат 60×84/8 Бумага офсетная. Усл. печ. л. 16,2  
Тираж 500 экз. Первый завод 125. Заказ 26.10/17-1

Издательство Академия наук РТ.  
420111, г. Казань, ул. Баумана, 20.