

УДК: 624.074
DOI: 10.52409/20731523_2022_3_36
EDN: PRRORX



Аналитический расчет прогибов плоской внешне статически неопределимой фермы

М.Н. Кирсанов¹

¹Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
г. Москва, Российская федерация

Аннотация. *Постановка задачи.* Плоская статически определимая решетчатая ферма с прямолинейным нижним поясом и криволинейным верхним имеет три подвижные и одну неподвижную опоры. Для такого случая требуется вывести формулу зависимости от числа панелей величины прогиба фермы и горизонтального смещения подвижных опор. Цель работы – исследовать конструкцию на ее кинематическую изменяемость и получить формулу зависимости от числа панелей прогиба конструкции и сдвига подвижной опоры при трех типах нагружения фермы. Задачи исследования заключаются в разработке схемы статически определимой фермы с четырьмя опорами, определении условий кинематической изменяемости конструкции и получении аналитических зависимостей прогиба и усилия в некоторых стержнях от числа панелей. Для определения усилий в стержнях и реакций опор составляется и решается система уравнений равновесия шарнирных узлов. Прогиб определяется с помощью интеграла Мора. Обобщение аналитических решений ряда ферм с различным числом панелей на случай произвольного числа панелей выполнено с помощью операторов символьной математики Maple. Коэффициенты при подобных выражениях в искомой формуле определяются из рекуррентных уравнений, составленных в этой системе на основе анализа последовательности решений.

Результаты. Показано, что для некоторого числа панелей ферма обладает свойством мгновенной изменяемости. Это подтверждается найденным распределением виртуальных скоростей шарниров конструкции. Рассмотрено действие равномерной распределенной узловой нагрузки по криволинейному верхнему или нижнему поясам и действие сосредоточенной нагрузки на середину пролета. Получены аналитические зависимости усилий в наиболее растянутых и сжатых элементах от числа панелей в ферме.

Выводы. Предложена схема фермы, допускающая получение конечной формулы для зависимости прогиба и усилий в стержнях при произвольном числе панелей. Показано, что прогиб скачкообразно зависит от числа панелей, что дает возможность увеличить жесткость, подобрав оптимальное число панелей. Предложенный алгоритм вывода расчетных формул может быть использован при нахождении аналитических решений для других регулярных конструкций.

Ключевые слова: ферма, прогиб, Maple, индукция, кинематическая изменяемость

Для цитирования: М.Н.Кирсанов Аналитический расчет прогибов плоской внешне статически неопределимой фермы//Известия КГАСУ №3(61), с.36-44,
DOI: 10.52409/20731523_2022_3_36, EDN: PRRORX

Analytical calculation of deflections of a planar externally statically indeterminate truss

M.N. Kirsanov¹

¹National Research University "Moscow Power Engineering Institute"
Moscow, Russian Federation

Abstract. *Problem statement.* A planar statically determinate lattice truss with a straight lower chord and a curvilinear upper chord has three movable and one fixed supports. The task is to derive a formula for the dependence of the amount of deflection of the truss and the horizontal displacement of the movable supports on the number of panels. To determine the forces in the rods and the reactions of the supports, a system of equilibrium equations for hinge joints is compiled and solved. The deflection is determined using the Mohr's integral. The generalization of analytical solutions for a number of trusses with a different number of panels to the case of an arbitrary number of panels is performed using Maple symbolic mathematics operators. The coefficients for similar expressions in the desired formula are determined from recursive equations compiled in this system based on the analysis of the sequence of solutions.

Results. It is shown that for a certain number of panels the truss has the property of instantaneous change. This is confirmed by the found distribution of the virtual velocities of the construction hinges. The actions of a uniform distributed nodal load along the curvilinear upper or lower chords and the action of a concentrated load on the middle of the span are considered. Analytical dependences of forces in the most stretched and compressed elements on the number of panels in the truss are obtained.

Conclusions. The proposed scheme of the truss, which allows obtaining the final formula for the dependence of the deflection and forces in the rods for an arbitrary number of panels. It is shown that the deflection depends abruptly on the number of panels, which makes it possible to increase the rigidity by choosing the optimal number of panels.

Keywords: truss, deflection, Maple, induction, kinematic variability

For citation: M.N. Kirsanov Analytical calculation of deflections of a flat outwardly statically indeterminate truss//News KSUAE No. 3(61), p. 36-44, DOI: 10.52409/20731523_2022_3_36, EDN: PRRORX

1. Введение

Расчет прогибов и усилий в стержнях ферм обычно производится в специализированных системах численных расчетов, основанных на методе конечных элементов [1,2]. Однако существует множество задач, для которых можно найти аналитические решения, используя принятые и хорошо зарекомендовавшие себя в расчетах ферм допущения. Стержни фермы принимаются упругими, шарниры идеальными, нагрузка прикладывается в узлах конструкции. Формулы для прогибов, усилий и смещений опор различных схем статически определимых плоских регулярных ферм при произвольном числе панелей собраны в справочниках [3,4]. Проблема существования таких схем впервые была поднята в трудах Hutchinson R.G. и Fleck N.A [5, 6]. Регулярные фермы в связи с задачей их оптимизации рассмотрены в серии работ Kaveh A. [7, 8]. Отдельные решения для плоских регулярных арок получены в работах [9–11]. Решетчатые фермы в аналитической форме исследованы в статьях [12–14]. Используемый в этих работах метод обобщения решений на произвольное число панелей может быть применен и для нахождения нижней оценки первой частоты собственных колебаний ферм [15–17].

В настоящей работе рассмотрена новая решетчатая схема фермы, не вошедшая в справочники [3, 4]. Статически определимая ферма с диагональной решеткой имеет прямолинейный нижний пояс и опирается на четыре опоры, одна из которых — неподвижный шарнир. Цель работы — исследовать конструкцию на ее кинематическую изменчивость и получить формулу зависимости от числа панелей прогиба конструкции и сдвига подвижной опоры при трех типах нагружения фермы.

Задачи исследования:

- разработать схему статически определимой фермы с четырьмя опорами;
- определить условие кинематической изменяемости конструкции и вывести аналитические зависимости прогиба и усилия в некоторых стержнях от числа панелей.

2. Материалы и методы

Симметричная ферма высотой $5h$ имеет $2n$ панелей по нижнему поясу и состоит из $n_s = 8n + 10$ стержней. В это число входят пять стержней, моделирующие опоры (рис. 1). Длина всего пролета фермы равна $L_0 = 2an$. Раскосы не пересекаются, располагаясь условно в разных плоскостях.

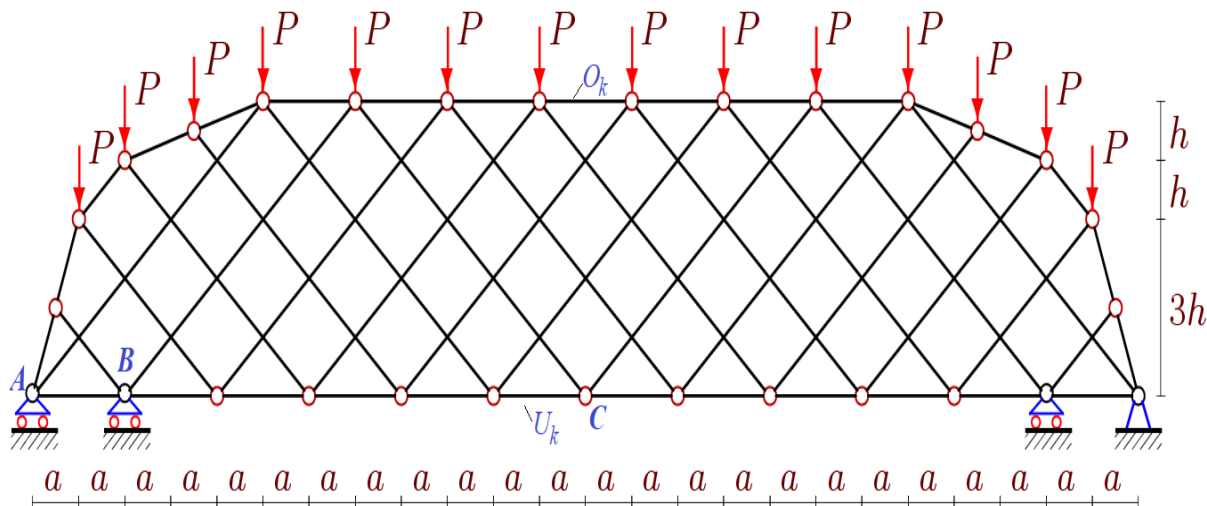


Рис. 1. Нагрузка на верхний пояс, $n=6$, (иллюстрация автора)
 Fig.1.Upper chord load, $n=6$ (illustration by the authors)

Число узлов фермы $4n + 5$, суммарная длина всех стержней:

$$L = 2(4n - 5)a + 4(5n - 3)c + 2f + 2d,$$

$$\text{где } c = \sqrt{a^2 + h^2}, \quad f = \sqrt{a^2 + 9h^2}, \quad d = \sqrt{9a^2 + h^2}.$$

Для определения усилий в стержнях используется программа в системе компьютерной математики Maple [18], позволяющая получить решение в аналитической форме. Все узлы и стержни конструкции нумеруются (рис. 2). Начало системы координат x - y находится в шарнире крайней левой подвижной опоры. Координаты шарниров на нижнем поясе, например, имеют следующий вид:

$$x_i = 2(i - 1)a, \quad y_i = 0, \quad i = 1, \dots, 2n + 1.$$

Структура соединений стержней решетки задается специальными списками, содержащими упорядоченные пары номеров узлов по концам соответствующих стержней.

Для стержней нижнего пояса списки имеют вид:

$$\bar{V}_i = [i, i + 1], \quad i = 1, \dots, 2n.$$

Стержни верхнего пояса кодируются списками:

$$\bar{V}_{2n+1} = [1, 2n + 2], \quad \bar{V}_{i+2n+1} = [i + 2n + 1, i + 2n + 2], \quad i = 1, \dots, 2n + 3,$$

$$\bar{V}_{4n+5} = [4n + 5, 2n + 1].$$

Таким же образом в циклах составляются списки кодов наклонных стержней решетки.

Система уравнений равновесия всех узлов записывается в проекциях на оси координат и имеет векторный вид: $\mathbf{GS} = \bar{\mathbf{B}}$. Каждому узлу в системе отводится два уравнения в проекции на оси x и y . Элементы матрицы \mathbf{G} системы — это направляющие

косинусы искомых усилий в стержнях и реакций опор, вычисляемые по координатам узлов и по данным списков $\bar{V}_i, i = 1, \dots, n_s$. В вектор правой части системы \bar{B} записываются величины узловых нагрузок. В четных элементах этого вектора находятся вертикальные силы, действующие на ферму, в нечетных — горизонтальные. При равномерном нагружении узлов нижнего пояса: $B_{2i} = P, i = 3, \dots, 2n - 1$. Другие компоненты вектора \bar{B} равны нулю. Усилия вычисляются из решения составленной системы уравнений равновесия: $G\bar{S} = \bar{B}$. В пакете Maple решение системы линейных уравнений, составленной в матричной форме, находится либо с помощью оператора LinearSolve из пакета LinearAlgebra, либо с использованием метода обратной матрицы. Второй вариант занимает меньше времени, что весьма существенно при анализе последовательности решений большой длины.

Случай геометрической изменяемости. Первые же расчеты усилий в ферме при разных n показали, что определитель системы уравнений обращается в ноль, если число панелей равно 3, 4, 5, 8, 9, 10, 13.... Равенство определителя нулю соответствует геометрической изменяемости конструкции. Для подтверждения этого факта можно составить картину виртуальных скоростей узлов (рис. 2).

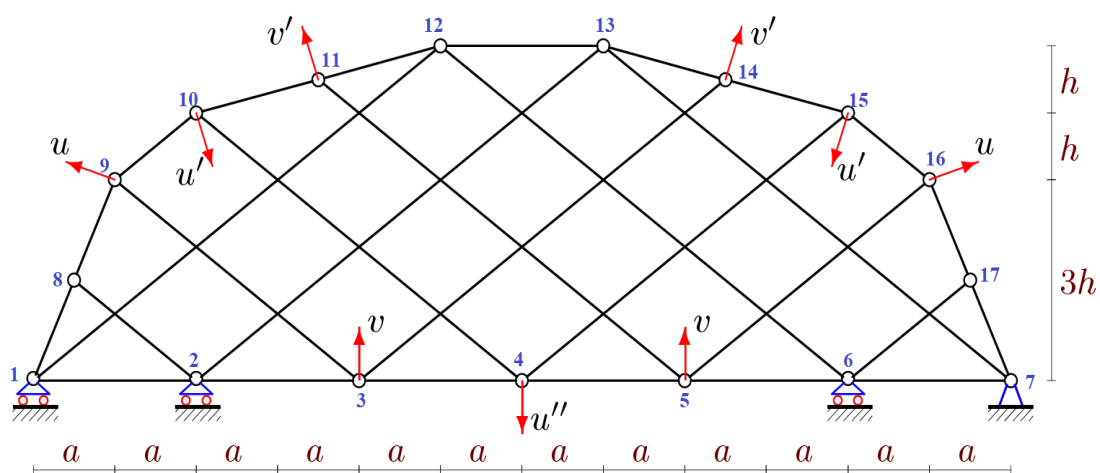


Рис. 2. Распределение виртуальных скоростей узлов, $n = 3$ (иллюстрация автора)

Fig.2. Distribution of virtual node velocities (illustration by the authors)

Большинство стержней совершают мгновенное плоское движение, некоторые вращательное, стержни 1-2, 6-7, 1-8, 7-17, 1-12, 12-6, 2-13, 13-7 остаются неподвижными. Неподвижны все четыре опорные узлы и узлы 12 и 13. Уравнения кинематики (равенства проекций векторов скоростей на отрезки стержней) дают следующие соотношения скоростей:

$$u'' = 4u'a/d, \quad u'(3a-h)/d = u(3h-a)/f, \quad vf = 4au.$$

Исключив из рассмотрения недопустимые числа панелей, введем следующую функцию: $n = (10k - 3(-1)^k + 11) / 4$. При $k = 1, 2, 3, \dots$ эта функция принимает значения 6, 7, 11, ... для которых ниже будут выведены зависимости усилий в критических стержнях и прогиба от числа панелей.

Численный результат расчета усилий в стержнях при $a = 4$ м, $h = 2$ м, $n = 6$ отображен на рисунке 3. Толщина отрезков стержней условно пропорциональна модулям усилий в стержнях. Несколько нисходящих раскосных стержней при такой нагрузке остаются ненапряженными (тонкие линии без подписей). Значения усилий, отнесенные к P , округлены до двух значащих цифр. Основные усилия приходятся на нижний и верхний пояс, однако наиболее растянутые стержни в нижнем поясе находятся не в середине, как это можно было бы предположить.

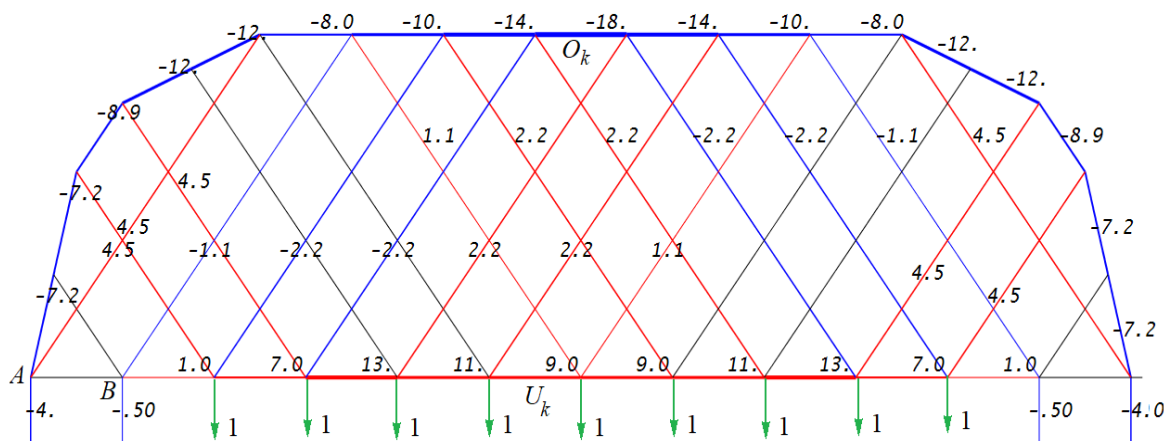


Рис. 3. Распределение усилий в стержнях от действия нагрузки на нижний пояс (иллюстрация автора)

Fig.3. Distribution of forces in the rods from the action of the load on the lower chord (illustration by the authors)

Усилия в некоторых стержнях можно найти в аналитической форме. Последовательно рассчитывая усилие в среднем стержне верхнего пояса для ферм с числом панелей $k = 1, 2, 3, \dots$, получим следующий ряд значений этого усилия:

$$O_1 = -9Pa / h, O_2 = -8Pa / h, O_3 = -28Pa / h, O_4 = -25Pa / h, \dots$$

Оператор `rgf_findrecur` системы Maple из специального пакета `genfunc` дает однородное линейное рекуррентное уравнение, которому удовлетворяет общий член этой последовательности:

$$O_k = O_{k-1} + 2O_{k-2} - 2O_{k-3} - O_{k-4} + O_{k-5}.$$

Для работы оператора `rgf_findrecur` требуется четное число членов последовательности. В данной задаче минимальная длина последовательности, у которой можно найти общий член, равна десяти.

Решить это уравнение и получить общий член последовательности можно с помощью оператора `rsolve`:

$$O_k = -Pa(10k^2 + 2(11 - 7(-1)^k)k - 9(-1)^k + 17) / (8h).$$

Аналогично находятся и зависимости от числа панелей усилие в стержне на нижнем поясе и реакции опор:

$$U_k = Pa(10k^2 + 2(9 - (-1)^k)k - 5(-1)^k + 1) / (8h),$$

$$Y_A = P(4k - (-1)^k + 3) / 2, Y_B = P(2k - (-1)^k - 1) / 4.$$

Прогиб и смещение опоры. Прогиб фермы свяжем с вертикальным смещением среднего узла (шарнира) C нижнего прямолинейного пояса. Для вычисления прогиба используется интеграл Мора в виде:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n_s-5} N_j \tilde{N}_j l_j / (EF), \tag{1}$$

где E — модуль упругости материала стержней, F — площадь поперечного сечения стержней, N_j — усилия в стержне с номером j от действия приложенной нагрузки, \tilde{N}_j — усилие от единичной (безразмерной) вертикальной силы, приложенной к узлу C , l_j — длина стержня. Пять стержней, моделирующие опоры, приняты недеформируемыми и их усилия в сумму интеграла Мора не входят.

3. Результаты

Рассмотрим вертикальную нагрузку, равномерно распределенную по узлам верхнего пояса (рис. 1). Последовательность выражений для прогиба, вычисленного по формуле (1) для $k=1,2,3..$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= P(122a^3 + 5c^3) / (h^2EF), \\ \Delta_2 &= P(2648a^3 - 40c^3 + 7d^3 + 12f^3) / (8h^2EF), \\ \Delta_3 &= 4P(404a^3 + 5c^3) / (h^2EF), \\ \Delta_4 &= P(23464a^3 + 48c^3 + 15d^3 + 20f^3) / (8h^2EF), \\ \Delta_5 &= 3P(2558a^3 + 15c^3) / (h^2EF), \dots\end{aligned}$$

В общем случае:

$$\Delta_k = P(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3d^3 + C_4f^3) / (h^2EF). \quad (2)$$

Также как и при выводе формул для усилий и реакций опор коэффициенты в этой формуле определяются индукцией с использованием операторов `rgf_findrecur` и `rsolve` системы Maple:

$$\begin{aligned}C_1 &= (250k^4 + 4(263 - 35(-1)^k)k^3 + 2(823 - 255(-1)^k)k^2 + \\ &\quad + 4(229 - 205(-1)^k)k - 333(-1)^k + 189) / 48, \\ C_2 &= (10k^2 + 2(1 - 9(-1)^k)k - 29(-1)^k - 19) / 8, \\ C_3 &= (4((-1)^k + 1)k - (-1)^k - 1) / 16, \\ C_4 &= (k + 1)(1 + (-1)^k) / 4.\end{aligned}$$

Аналогично, при загрузении узлов с номерами $3, \dots, n-1$ нижнего пояса результат будет иметь вид (2) с коэффициентами:

$$\begin{aligned}C_1 &= (250k^4 + 4(263 - 35(-1)^k)k^3 + 2(745 - 243(-1)^k)k^2 + \\ &\quad + 8(89 - 83(-1)^k)k - 195(-1)^k + 147) / 48, \\ C_2 &= (10k^2 + 2((-1)^k + 11)k + 27(-1)^k + 37) / 8, \\ C_3 &= C_4 = (k + 1)((-1)^k + 1) / 4.\end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты в (2) при действии на ферму сосредоточенной силы, приложенной к узлу C , имеют вид:

$$\begin{aligned}C_1 &= (20k^3 + 6((-1)^k + 11)k^2 + 14(3(-1)^k + 8)k - 21(-1)^k + 9) / 12, \\ C_2 &= (10((-1)^k + 2)k + 11(-1)^k + 21) / 4, \\ C_3 &= C_4 = ((-1)^k + 1) / 4.\end{aligned}$$

Разработанная математическая модель фермы для расчета прогибов позволяет легко перенастроить ее на расчет других деформаций. Например, при действии на ферму вертикальных нагрузок подвижные опоры сдвигаются по горизонтали. Для расчета этих деформаций по формуле (1) под усилиями l_j следует понимать усилия от единичной горизонтальной силы, приложенной к левой подвижной опоре A . В этом случае решение задачи о сдвиге δ опоры под действием вертикальной нагрузки, распределенной по нижнему поясу, может быть получено также индукцией:

$$\delta = Pa^2(k + 1)(50k^2 + (103 - 45(-1)^k)k + 18 - 30(-1)^k) / (6hEF). \quad (4)$$

Рассмотрим пример решения по формуле (2) с коэффициентами (3) в случае нагружения нижнего пояса. Обозначим значение суммарной нагрузки, действующей на ферму, $P_0 = P(2n - 3)$. Графики зависимости безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L_0)$ от числа панелей при длине пролета $L_0 = 50\text{ м}$ построены на рисунке 4. Характерны скачкообразные изменения прогиба при изменении числа панелей. Для малого числа панелей перепад значений прогиба достигает 50%. Это дает широкие возможности для оптимизации конструкции. Изменение числа панелей всего на одну может существенно увеличить или уменьшить жесткость конструкции. При увеличении числа панелей кривые изменения прогиба сглаживаются, колеблясь около некоторой, почти не меняющейся, средней величины. Асимптотика этих быстро осциллирующих зависимостей не выявляется. Такой тип зависимости прогиба от числа панелей характерен для решетчатых ферм [13, 14] и объясняется наличием в решении слагаемых с коэффициентом $(-1)^k$, зависящим от четности числа панелей.

Для решения (4) задачи о сдвиге имеется горизонтальная асимптотика:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta EF / (P_0 L_0) = L_0 / (15h).$$

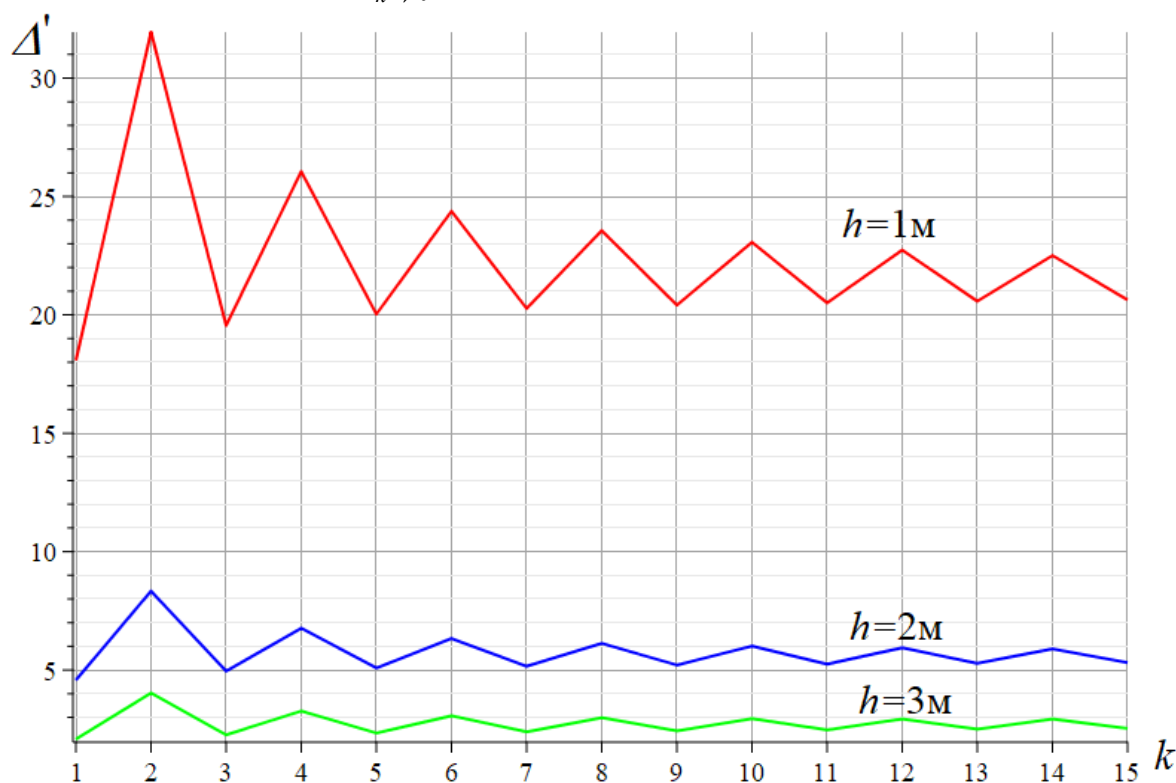


Рис. 4. Зависимость прогиба от числа панелей, (иллюстрация автора)

Fig.4. Dependence of the deflection on the number of panels (illustration by the authors)

Предложенная схема статически определимой регулярной фермы допускает аналитическое решение задачи о прогибе для произвольного числа панелей. При этом схема имеет скрытое и опасное свойство — при определенном числе панелей ферма становится кинематически изменяемой. Этот пример показывает, необдуманый перенос готового решения на ферму с измененным числом панелей может привести к ошибке. Например, фермы при $n = 12$ и $n = 13$ внешне почти неотличимы, однако в первом случае ферма неизменяема, а во втором конструкция имеет свойство мгновенно изменяемого механизма, что не дает возможность использовать ее как несущую конструкцию. В численных расчетах эта особенность не проявляется за счет неизбежных погрешностей округления. Определитель системы уравнений равновесия при численном расчете близок к нулю, но в ноль не обращается, и кинематического вырождения можно не заметить.

4. Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Разработана схема статически определимой фермы с четырьмя опорами. Дополнительные опоры снимают в какой-то степени концентрацию напряжений по концам фермы.
2. Определено условие кинематической изменяемости конструкции. Для подтверждения этого эффекта приведена схема возможных скоростей.
3. Выведены аналитические зависимости прогиба и усилия в некоторых стержнях от числа панелей.

Благодарности

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Фундаментальные и прикладные исследования космоса».

Список литературы/ References

1. Kuznetsov I., Salakhutdinov M., Shakirzyanov F., Khaydarov L., Aripov D. An investigation of the influence of the reduced elasticity modulus on strength of pultruded frp members in bending // Iop conference series. Materials Science and Engineering. Kazan, Russia, 2020. С. 012047.
2. Volovitskaya A., Salakhutdinov M., Kuznetsov I. Investigation and calculation of a composite arch construction // E3S Web of Conferences. Сер. "International Scientific Conference "Construction Mechanics, Hydraulics and Water Resources Engineering, CONMECHYDRO 2021" 2021. 2067.
3. Kirsanov M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Newcastle upon Tyne, GB: Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, 2020. 178 с.
4. Kirsanov M. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Newcastle upon Tyne, GB: Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, 2019. 198 с.
5. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. № 9(85). С. 607–617. DOI:10.1002/zamm.200410208.
6. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. № 4(54). с. 756–782. DOI:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
7. Kaveh A., Zolghadr A. Meta-heuristic methods for optimization of truss structures with vibration frequency constraints. № 10(229)Springer-Verlag Wien, 01.10.2018.
8. Kaveh A., Mahdavi V.R. Colliding-Bodies Optimization for Truss Optimization with Multiple Frequency Constraints // Journal of Computing in Civil Engineering. 2015. № 5(29). С. 04014078. DOI:10.1061/(asce)cp.1943-5487.0000402.
9. Rakhmatulina, A.R., Smirnova A.A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels // Science Almanac. 2017. № 2–3(28). с. 268–271. DOI:10.17117/na.2017.02.03.268.
10. Voropay, R., Domanov E. Analytical solution of the problem of shifting a movable support of a truss of arch type in the Maple system // Postulat. 2019. (1).
11. Kazmiruk I.Y. On the arch truss deformation under the action of lateral load // Science Almanac. 2016. № 3–3(17). с. 75–78. DOI:10.17117/na.2016.03.03.075.
12. Tinkov D. V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of truss structure deflection // Magazine of Civil Engineering. 2015. № 5(57). с. 66-73. DOI:10.5862/MCE.57.6.
13. Ilyushin A.S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame // Structural mechanics and structures. 2019. № 3(22). с. 29–38.
14. Dai Q. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // AlfaBuild. 2021. (17). DOI:10.34910/ALF.17.1.
15. Kirsanov M. Deformations And Spatial Structure Vibrations Frequency of The Rectangular Contour Type Cover: Analytical Solutions // AlfaBuild. 2021. (98). с. 9805. DOI:10.4123/CUBS.98.5.
16. Petrenko V.F. The natural frequency of a two-span truss // AlfaBuild. 2021. № 20. с. 2001.

DOI:10.34910/ALF.20.1.

17.Vorobev O.V. Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. № 7(92). с. 9204–9204. DOI:10.18720/CUBS.92.4.

Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuks D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // Vestnik MGSU. 2020. № 4(4). С. 510–517. DOI:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.

Информация об авторе

Михаил Николаевич Кирсанов, доктор физико-математических наук, профессор Национального исследовательского университета «Московский энергетический институт», Москва, Российская Федерация
E-mail: c216@ya.ru

Information about the authors.

Mikhail N. Kirsanov, doctor of physical-mathematical sciences, professor of National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russian Federation
E-mail: c216@ya.ru