

# Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы

КИРСАНОВ М.Н., д-р физ.-мат. наук, проф., НИУ МЭИ, Москва

## Аннотация

Приводится вывод зависимости прогиба плоской статически определимой фермы от размеров и числа панелей при равномерном нагружении узлов верхнего пояса. Усилия в стержнях определяются в системе компьютерной математики Maple. Для обобщения решения на произвольное число панелей привлекается метод индукции по двум параметрам.

## Ключевые слова

Арочная ферма, индукция, прогиб, число панелей, Maple

## Abstract

The article contents the derivation of the dependence of the deflection of the flat statically determinate truss on size and number of panels under the uniform loading of nodes in the upper belt. The forces in the rods are evaluated in the computer mathematics system Maple. To generalize the solution for an arbitrary number of panels the induction method on two parameters is used.

## Keywords

Arch truss, deflection, induction, Maple, number of panels

## Постановка задачи

Результаты численного расчета любой строительной конструкции, особенно на этапе проектирования, необходимо подкреплять априорными оценками на основе расчета упрощенной модели сооружения. В [1–3] получены аналитические выражения для прогиба различных плоских ферм с произвольным числом панелей под действием наиболее распространенных в практике нагрузок (равномерных или сосредоточенных в середине пролета).

Рассматриваемая ферма состоит из сочлененных между собой ферм с разным числом панелей и уклоном (рис. 1). Все стойки фермы имеют одинаковую высоту  $h$ . Уклон боковых

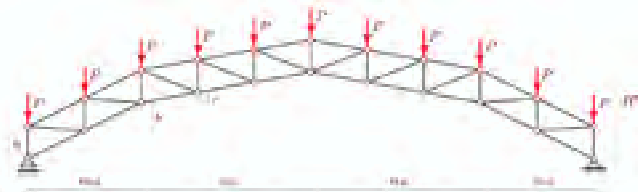


Рис. 1. Ферма,  $m = 2$ ,  $n = 3$

(нижних) частей фермы с  $m$  панелями определяется отношением  $b/a$ , уклон средних частей ( $n$  панелей в каждой части) –  $c/a$ . Нагрузка приложена к узлам верхнего пояса. В ферме стержней, из которых  $4(n+m)$  находятся в верхнем и нижнем поясах,  $4(n+m)+1$  стержня составляют решетку, и три стержня являются опорными.

## Расчет

Выводится формула для прогиба среднего узла нижнего пояса фермы от действия равномерной нагрузки при произвольном числе панелей  $n$  и  $m$  в каждой из частей фермы. Для определения усилий в стержнях в аналитической форме используется метод вырезания узлов, программно реализованный в системе компьютерной математики Maple [4] и апробированный на ряде плоских [1–3] и пространственных ферм [5, 6]. Для ввода геометрии фермы и ее структуры в программу [4] необходимо пронумеровать шарниры и стержни фермы и ввести координаты узлов. Начало координат размещено в левой опоре (рис. 2):

$$x_i = x_{i+2(n-m)+1} - a(i-1),$$

$$y_{i+2(n-m)+1} = y_i + h, \quad i = 1, \dots, 2(n-m)+1,$$

$$y_i = b(i-1), \quad y_{i+m-2n} = b(m-1-i), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$y_{i+m-1} = mb - ci, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$y_{i+m-n-1} = mb - nc - ci, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

## Исправление

Приносим извинение уважаемому автору Михаилу Николаевичу Кирсанову и читателям за техническую погрешность, допущенную в статье «Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами» № 7, с. 16, левый столбец.

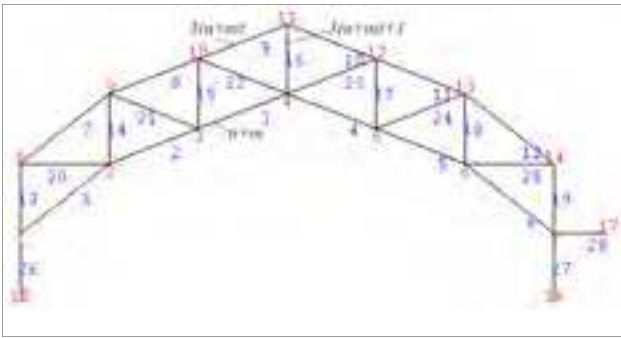


Рис. 2. Нумерация стержней и узлов,  $n = 2, m = 1$

Конфигурация решетки фермы представлена условными векторами  $\bar{N}_i, i = 1, \dots, m$ , компонентами которых являются номера  $i = 1, \dots, 2(n - m)$  шарниров по концам стержней. Стержни нижнего пояса с номерами кодируются векторами:  $\bar{N}_i = \{i, i - 1\}$ . Верхний пояс  $i = 1, \dots, 2(n - m)$  соответствует векторам

$$\bar{N}_{i+2(n-m)} = \{i+2(n-m) - 1, i - 2(n-m) - 2\}.$$

Матрица уравнений равновесия в проекциях на оси координат состоит из направляющих косинусов  $l_{j,i} / l_i$ , где  $l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}$  – длина стержня с номером  $i = 1, \dots, n_s$ , а  $l_{1,i} = x_{N_{2,i}} - x_{N_{1,i}}, l_{2,i} = y_{N_{2,i}} - y_{N_{1,i}}$  – проекции векторных представлений стержней на оси координат. В номере  $N_{j,i}$  первый индекс соответствует номеру компоненты вектора  $\bar{N}_i$  (начало или конец вектора), второй – номеру самого стержня. Из решения полученной системы линейных уравнений определяются усилия в стержнях. Для определения прогиба (вертикальное смещение шарнира с номером  $n + m + 1$ ) применяется формула Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-3} S_i s_i l_i / (EF),$$

где  $S_i, s_i$  – усилия в  $i$ -м стержне фермы от приложенной равномерной нагрузки и от единичной вертикальной силы в узле  $n + m + 1$  соответственно. Суммирование ведется по всем стержням фермы, кроме трех опорных, принятых жесткими. Решение ряда задач для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей показывает, что вид формулы для прогиба не меняется (свойство регулярности конструкции):

$$\Delta_{n,m} = \frac{P(C_{1,n,m}a^3 + C_{2,n,m}h^3 + C_{3,n,m}d^3 + C_{4,n,m}g^3)}{8h^2EF}, \quad (1)$$

где  $d = \sqrt{a^2 + h^2}, g = \sqrt{a^2 + 9h^2}$ , различаясь лишь величинами коэффициентов. Рассмотрим случай  $b = h, c = h/2$ . Поскольку решение зависит от двух параметров  $n$  и  $m$ , для получения зависимостей коэффициентов формулы от этих чисел необходимо сначала провести индукцию по одному параметру, например,  $n$ , при фиксированном другом, затем найденные формулы обобщить на произвольное значение  $m$ . Так, для  $m = 1$  при  $n = 1, 2, \dots, 10$  получены коэффициенты в (1) при  $g^3$ : 6, 34, 109, 266, 550, 1016, 1729, 2764, 4206, 6150. Оператор `rgf_findrecur` системы Maple выявил рекуррентное уравнение, которому удовлетворили члены этой последовательности:  $C_{4,n,1} = 5C_{4,n-1,1} - 10C_{4,n-2,1} + 10C_{4,n-3,1} - 5C_{4,n-4,1} + C_{4,n-5,1}$ . Решение этого уравнения дает оператор `rsolve`:  $C_{4,n,1} = n(5n^3 - 20n^2 - 37n - 10)/12$ . Таким же образом определяется коэффициент при  $m = 2$ :  $C_{4,n,2} = n(5n^3 - 40n^2 - 127n - 92)/12$ . Всего потребовалось восемь таких формул ( $m = 1, 2, \dots, 8$ ), чтобы найти закономерность образования коэффициентов при степенях  $n$ . В результате получена формула

$$C_{4,n,m} = n(5n^3 - 20mn^2 - (30m^2 - 7)n + 2m(6m^2 - 1))/12.$$

Аналогично определяются и другие коэффициенты формулы (1):

$$C_{1,n,m} = 4m(2n - m),$$

$$C_{2,n,m} = 2n^3 + 2(3m - 2)n^2 - 4(2m^2 - 1)n + m(3m^2 - 2m - 1),$$

$$C_{3,n,m} = 2m(4n(2m^2 - 1) - m(5m^2 - 1))/3.$$

#### Анализ

Введем обозначение для безразмерного прогиба  $\Delta^* = \Delta / (P_\Sigma L) / (EF)$ , где  $L$  – длина пролета фермы,  $P_\Sigma = P(2(n - m) - 1)$ . Графики зависимости (1) от числа панелей при  $n = m$ , построенные для различных высот фермы, обнаруживают экстремальные точки при малых числах  $n$  (рис. 3). Соответствующие длины панелей (до 10 м) на практике не применяются и поэтому практического значения эти точки не имеют. Интересно отметить

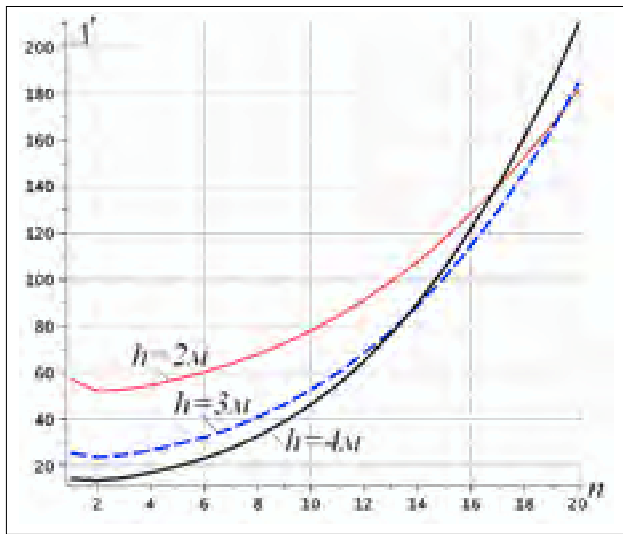


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей, L=90м

точки пересечения кривых, построенных для разных высот. Эта неоднозначность решения позволяет оптимизировать конструкцию, выбрав наиболее экономный ее вариант.

**Критические усилия**

Для оценки устойчивости и прочности конструкции в целом полезно знать зависимость усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях от параметров фермы. В отличие от балочных ферм с прямолинейными поясами, где наиболее сжатый стержень традиционно находится в середине верхнего пояса, а наиболее растянутый – в нижнем, в арочных фермах положения критических по нагрузкам стержней могут меняться. Однако, как и в балочных фермах, особенно при небольших подъемах арки, наиболее критическими стержнями остаются все-таки стержни в середине пролета. Методом индукции по двум параметрам получаем усилие в среднем стержне нижнего пояса (рис. 2):

$$S_{n+m} = P((n - m)^2 - 1)g / (4h). \quad (2)$$

Усилие в сжатом стержне верхнего пояса

$$S_{3n+3m} = -P(n - m)^2 g / (4h).$$

Интересный и несколько неожиданный результат получается для средней вертикальной стойки. Растягивающее усилие в ней не зависит от размеров фермы, а зависит только от числа панелей:

$$S_{5n+5m} = P((n - m) - 2) / 2.$$

Сравнивая (2) и (3), получаем условие, при котором наиболее растянутый стержень находится в нижнем поясе:  $(n + m)^2 < (1 - 4h/g) / (1 - 2h/g)$ .

Учитывая выражение  $g = \sqrt{a^2 - 9h^2} - 3h$ , можно сделать вывод, что это условие выполняется всегда, и расчет на прочность следует вести по усилию в стержне с номером  $n + m$ .

**Заключение**

Предложенная схема арочной безраспорной фермы допускает аналитическое выражение для прогиба и критических усилий в стержнях. Выведенные формулы имеют не только практическое значение для оценки точности и достоверности численных решений, полученных в стандартных пакетах, но и теоретическое. На этапе проектирования конструкции полученные формулы могут подсказать инженеру наиболее выгодное соотношение числа панелей в отдельных частях фермы, выбрать их размеры, рассчитать критические усилия. Особенно эффективно применение полученных формул для большепролетных конструкций, где численные методы могут давать погрешность за счет неизбежного накопления ошибок округления.

**Литература**

1. Астахов С.В. Вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы под действием нагрузки в середине пролета // Строительство и архитектура. – 2017. – Том 5. – № 2 (15). – С. 50–54.
2. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. – 2017. – 2 (271). – С. 4–10.
3. Boloitina T.D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels // Bulletin of Scientific Conferences. – 2016. – № 4–3 (8). – P. 7–8.
4. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. – СПб.: Лань, 2012.
5. Доманов Е.В. Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей // Научный альманах. – 2016. – № 6–2 (19). – С. 214–217.
6. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. – 2016. – No. 4. – P. 52–58.

Для связи с автором:  
 Михаил Николаевич Кирсанов, 8(495)362-73-14,  
 c216@ya.ru