

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СТЕРЖНЕВОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ КОНСТРУКЦИИ В СИСТЕМЕ MAPLE

КИРСАНОВ М.Н., ЛЕОНОВ П.Г.

НИУ МЭИ

e-mail: sqrlе@mail.ru

Приводится аналитическое решение задачи статики для пространственной статически определимой упругой фермы. Для получения решения системы при произвольном числе стержней применяется метод вырезания узлов. Используется система компьютерной математики Maple [1-4], которая существенно упрощает нахождение решения в символьном виде и вывести основные формулы для произвольных размеров фермы. Для упрощения выражений (а это весьма актуально для сложных конструкций) применяем оператор **simplify**. Выбор системы Maple из множества аналогичных программ является произвольным. В частности, можно использовать бесплатную систему Maxima.

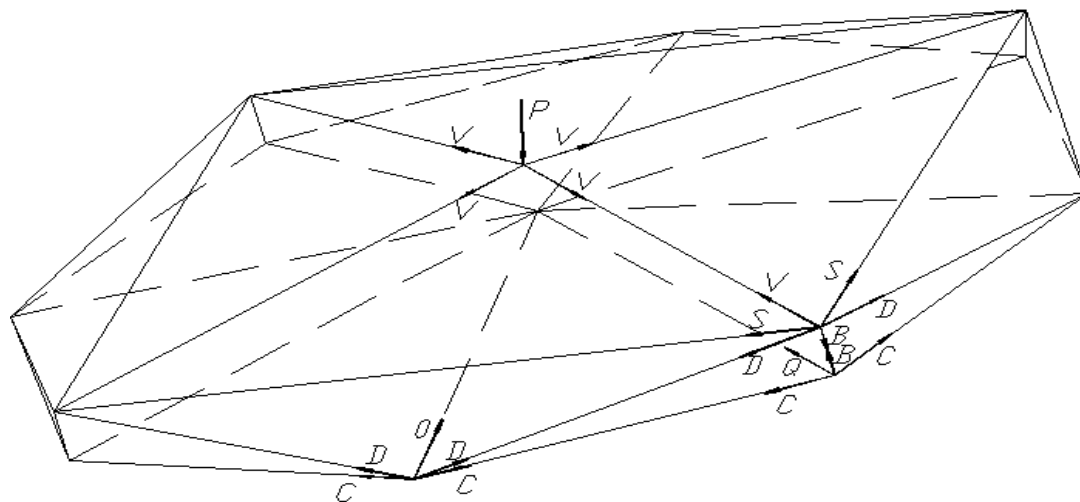


Рис. 1. Ферма при  $n=4$

Данная ферма состоит из трёх ярусов: верхний, средний и нижний. Нижний ярус фермы вогнут внутрь и закреплён на сферическом шарнире. В верхней точке фермы – цилиндрический шарнир. Третья опора, моделируемая горизонтальным стержнем в плоскости нижнего контура, предотвращает вращение вокруг вертикальной оси. К вершине фермы приложена вертикальная сила  $P$  в результате чего, реакция опоры  $Z$  в сферическом шарнире равна ей по величине. Остальные реакции опор равны нулю. Опоры на рисунке не изображены.

Ферма содержит два контура. Усилия в стержнях верхнего контура обозначим  $S$ , нижнего -  $C$ . Контуры соединены  $n$  и  $2n$  (симметричными и равными по длине) стержнями, усилия в которых обозначим  $B$  и  $D$

соответственно. Шарниры верхнего контура присоединены  $n$  стержнями с усилиями  $V$  к верхней опоре. Нижний контур присоединен к сферическом шарниру  $2n$  стержнями с усилиями  $Q$  и  $O$ .

Все результаты получены в самом общем случае, но здесь для упрощения записи примем, что радиусы контуров равны, а высот справедливо соотношение:  $h_1 = h_2 = -h_3$ . Введем обозначения для следующих безразмерных величин:

$$\varphi = \pi/n, \quad b = \operatorname{tg} \varphi + \sin \varphi, \quad c = \cos(\varphi(n-2)/2), \quad d = \cos(\varphi(n-1)/2). \quad (1)$$

Выпишем усилия в стержнях:

$$S = \frac{Pr}{2nhc}, \quad V = -\frac{P\sqrt{r^2+h^2}}{nh}, \quad B = -\frac{Ph \sin \varphi}{nbh}, \quad D = -\frac{P \operatorname{tg} \varphi \sqrt{h^2+4r^2 \sin^2(\varphi/2)}}{2nbh}, \quad (2)$$

$$C = -\frac{Pr \sin \varphi}{2nhbd}, \quad O = \frac{P \operatorname{tg} \varphi \sqrt{h^2+r^2}}{2nhbd}, \quad Q = \frac{P \sin \varphi \sqrt{h^2+r^2}}{nhb},$$

где  $r$  - радиус контура,  $h$  - высота яруса.

Прогиб (вертикальное перемещение точки приложения силы  $P$ ) определяем по формуле Максвелла-Мора, принимая жесткость стержней постоянной:

$$\Delta = P \sum_{i=1}^{9n} \frac{S_i^2 l_i}{EF_i},$$

где  $S_i$  - усилия в стержнях от действия единичной силы,  $l_i$  - длины стержней,  $E$  - модуль упругости,  $F_i$  - площади сечений.

Имеем выражение для прогиба:

$$\Delta = \frac{P}{nh^2 EF} \left[ (r^2+h^2)^{3/2} + \frac{r^3 \sin \varphi}{2c^2} + \frac{r^3 \sin^2 \varphi \sin(\varphi/2)}{d^2 b^2} + \frac{2h^3 \sin^2 \varphi + 2(\sin^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi)(r^2+h^2)^{3/2} + \operatorname{tg}^2 \varphi (h^2+4r^2 \sin^2(\varphi/2))^{3/2}}{2b^2} \right] \quad (3)$$

Получено аналитическое решение для прогиба пространственной стержневой системы для произвольного количества стержней. Это позволяет выявлять особенности и анализировать оптимальные и предельные (по жесткости и прочности) характеристики конструкции.

## Литература

1. Кирсанов М. Н. Практика программирования в системе Maple. — М.: Издательский дом МЭИ, 2011. — 208 с.
2. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК - Пресс, 2011. 800 с.
3. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
4. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб.: БХВ -Петербург, 2001. 526 с.