

активации разрушения. Структурно-чувствительный коэффициент увеличивается по степенному закону с ростом размеров структурных неоднородностей материала (рис. 5). Так как ν имеет физический смысл размерного коэффициента перенапряжения межатомных связей, то, естественно, должен наблюдаться рост этого коэффициента с увеличением размеров структурных неоднородностей и уменьшением «живого» сечения материала, что и подтверждается рис. 5 и табл. 2.

Таким образом, определяя параметры U_0 , ν и d^* , можно делать выводы о структуре композиционных материалов, их прочности и влиянии технологии изготовления на механические свойства.

Из всего вышесказанного следует, что предложенный метод регистрации импульсного электромагнитного излучения при разрушении композиционных материалов позволяет на стадии их изготовления и испытания оперативно определять основные константы прочности, внося своевременную коррекцию в технологию изготовления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журков С.Н. Кинетическая концепция прочности твердых тел // Вестн. АН СССР. — 1968. — № 3. — С. 46—52.
2. Журков С.Н., Куксенко В.С., Петров В.А. Физические основы прогнозирования механического разрушения // ДАН СССР. — 1981. — Т. 259, вып. № 6. — С. 1350—1353.
3. Томашевская И.С., Хамидуллин Я.Н. Возможность предсказания момента разрушения образцов горных пород на основе флуктуационного механизма роста трещин // ДАН СССР. — 1972. — Т. 207, вып. № 3. — С. 580—582.
4. Шемякин Е.И. О свободном разрушении твердых тел // ДАН СССР. — 1988. — Т. 300, вып. 5. — С. 1090—1094.
5. Мирошниченко М.И., Куксенко В.С. Излучение электромагнитных импульсов при зарождении трещин в твердых диэлектриках // ФТТ. — 1980. — Т. 22, вып. 5. — С. 1531—1533.
6. Дерягин Б.В., Кротова Н.А., Смилга В.П. Адгезия твердых тел. — М.: Наука, 1973.
7. Иванов В.В., Егоров П.В., Колпакова Л.А., Пимонов А.А. Динамика трещин и электромагнитное излучение нагруженных горных пород // ФТПРПИ. — 1988. — № 5. — С. 20—27.

г. Кемерово

Поступила 8/VII 1992 г.,
в окончательном варианте — 2/XI 1993 г.

УДК 539.376

М.Н. Кирсанов

ВЫПУЧИВАНИЕ ВЯЗКОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ЖЕСТКОМ НАГРУЖЕНИИ

Проблеме выпучивания реологических конструкций посвящены многочисленные работы, обзор которых можно найти в [1, 2]. В большинстве случаев явление рассматривается при постоянных нагрузках. В настоящей работе изучается возможность выпучивания стержня в процессе наращивания сжимающей силы при заданной постоянной скорости деформирования. Используется теория особых точек [3], уточняющая псевдобифуркационный подход [4] в задачах выпучивания идеальных систем при ползучести.

Определяющее соотношение примем в виде [5]

$$(1) \quad \dot{p}r^\alpha = A\sigma^n,$$

© М.Н. Кирсанов, 1994

где $p = \epsilon - \sigma/E$ — деформация ползучести; A, n, α — параметры среды. Рассмотрим материал, в котором упругой деформацией σ/E можно пренебречь, т.е. $E \rightarrow \infty, p = \epsilon$.

Равновесие стержня длиной l под действием нагрузки T вблизи от прямолинейного положения подчинено уравнениям, следующим из гипотезы плоских сечений и уравнения моментов относительно нейтральной оси:

$$(2) \quad \int_{\Omega} \Delta p z d\Omega = Jv'', \quad \int \Delta \sigma z d\Omega = -Tv.$$

Здесь Ω, J — площадь и момент инерции поперечного сечения; значком Δ помечено приращение соответствующей величины; v — прогиб стержня; v'' — вторая производная прогиба по продольной координате y .

Малые приращения напряжений и деформаций удовлетворяют линеаризованному уравнению

$$(3) \quad p^\alpha \Delta \dot{p} + \alpha p^{\alpha-1} \dot{p} \Delta p = An\sigma^{n-1} \Delta \sigma.$$

Умножим (3) на z , проинтегрируем по площади поперечного сечения Ω и с учетом (1), (2) и замены $T = \sigma\Omega$ получим

$$(4) \quad pJv'' + \alpha pJv' = -np\dot{p}\Omega v.$$

Уравнению (4) удовлетворяют функции

$$(5) \quad v = U_0 \sin \mu y, \quad \dot{v} = U_1 \sin \mu y, \quad \mu = j\pi/l.$$

Подстановка (5) в (4) дает

$$(6) \quad \dot{p}(np/D - \alpha)U_0 - pU_1 = 0,$$

где $D = J\mu^2/\Omega$. Программу деформирования зададим линейной:

$$(7) \quad p = kt$$

($k = \text{const}$ — скорость деформирования). Уравнение (6) перепишем в виде

$$(8) \quad (\tau - \alpha)U_0 - tU_1 = 0.$$

Введем безразмерное время

$$(9) \quad \tau = kt/D.$$

Соотношение (8) выделяет в качестве особой точки процесса значение $\tau = \tau_1 = \alpha$ (критерий Работнова — Шестерикова [6]). Действительно, возмущение, задающее значение начального прогиба U_0 до момента τ_1 , дает прогиб, уменьшающийся сразу же после момента возмущения и увеличивающийся, если $\tau > \tau_1 = \alpha$, о чем можно судить по знаку скорости прогиба U_1 .

Для анализа ускорения прогиба стержня и его высших производных по времени в момент возмущения поднимем порядок определяющего соотношения. Ограничимся для краткости изложения третьим порядком производной. Этого достаточно, чтобы выяснить возникающие закономерности. Продифференцируем (1) 2 раза по времени:

$$(10) \quad \ddot{p}p^\alpha + \alpha p^{\alpha-1} \dot{p}^2 = An\sigma^{n-1} \dot{\sigma};$$

$$(11) \quad p^{(3)}p^\alpha + 3\alpha \ddot{p}p^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-1)\dot{p}^3 p^{\alpha-2} = An(\sigma^{n-1} \ddot{\sigma} + (n-1)\sigma^{n-2} \dot{\sigma}^2).$$

По аналогии с тем, как из (1) было получено уравнение для амплитуд (8), выведем из (10) и (11) уравнения для величин U_i , вводимых по формуле $v^{(i)} = U_i \sin \mu y$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), где $v^{(i)}$ — производная по времени порядка i .

Вариация (10) и (11) дает

$$(12) \quad t^2 \Delta \ddot{p} + 2\alpha t \Delta \dot{p} + \alpha(\alpha-1) \Delta p = nkt^2 [(n-1) \dot{\sigma} \Delta \sigma / \sigma + \Delta \dot{\sigma}] / \sigma;$$

$$(13) \quad t^3 \Delta p^{(3)} + 3\alpha t^2 \Delta \ddot{p} + 3\alpha(\alpha-1) t \Delta \dot{p} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \Delta p =$$

$$= nkt^3[(n-1)(n-2)\dot{\sigma}^2\Delta\sigma/\sigma^2 + \ddot{\sigma}\Delta\sigma/\sigma + 2(n-1)\dot{\sigma}\Delta\dot{\sigma}/\sigma + \Delta\ddot{\sigma}].$$

При $p = kt$ из (1) следует

$$(14) \quad k^{\alpha+1}t^\alpha = A\sigma^n.$$

Продифференцировав это равенство дважды, получим

$$\dot{\sigma} = \frac{\alpha}{n} \frac{\sigma}{t}, \quad \ddot{\sigma} = \frac{\alpha}{n} \left(\frac{\alpha}{n} - 1 \right) \frac{\sigma}{t^2}.$$

С учетом последних выражений выведем из (12) и (13)

$$(15) \quad \alpha(\tau - \alpha + 1)U_0 + (\tau - 2\alpha)U_1t - U_2t^2 = 0;$$

$$(16) \quad \alpha(\alpha - 1)(\tau - \alpha + 2)U_0 + \alpha(2\tau - 3\alpha + 3)U_1t + (\tau - 3\alpha)U_2t^2 - U_3t^3 = 0.$$

Уравнения (8), (15) образуют систему для переменных U_0, U_1, U_2 . Пусть в результате некоторого возмущения стержень получил заданную начальную величину ускорения амплитуды прогиба U_2 . Прогиб U_0 и его скорость U_1 выражаются через U_2 с помощью решения системы уравнений (8), (15):

$$U_0 = t^2 U_2 B_0 / B_2, \quad U_1 = t U_2 B_1 / B_2$$

$$(B_0 = 1, B_1 = \tau - \alpha, B_2 = \tau^2 - 2\alpha\tau + \alpha(\alpha + 1)).$$

Аналогично, если задана величина U_3 , начальные значения U_0, U_1, U_2 выражаются через U_3 из решения системы (8), (15), (16). Запишем ее в матричном виде

$$(17) \quad \begin{vmatrix} \tau - \alpha & -t & 0 \\ \alpha(\tau - \alpha + 1) & (\tau - 2\alpha)t & -t^2 \\ \alpha(\alpha - 1)(\tau - \alpha + 2) & \alpha(2\tau - 3\alpha + 3)t & t^2(\tau - 3\alpha) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ t^3 U_3 \end{vmatrix}.$$

Из решения (17) имеем

$$U_0 = t^2 U_3 B_0 / B_3, \quad U_1 = t U_3 B_1 / B_3, \quad U_2 = t U_3 B_2 / B_3,$$

где $B_3 = \tau^3 - 3\alpha\tau^2 + 3\alpha(\alpha + 1)\tau - \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)$ — определитель матрицы системы.

Особая точка порядка N τ_N соответствует равенству нулю определителя системы порядка N . Начальные значения амплитуд U_0, U_1, \dots, U_{N-1} , как видно из решений при $N = 2$ и $N = 3$, неограниченно растут. Полином B_2 корней не имеет, следовательно, особой точки второго порядка в этой задаче не существует. Особая точка третьего порядка может быть найдена численно из решения уравнения $B_3 = 0$. Продолжая далее процесс построения полиномов по рассмотренной схеме, выведем

$$B_4 = \tau^4 - 4\alpha\tau^3 + 6\alpha(\alpha + 1)\tau^2 - 4\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\tau + \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3).$$

Легко проверить общую формулу

$$B_N = \sum_{i=0}^N (-1)^{N+i} \tau^i C_i^N(\alpha)_{N-i},$$

где C_i^N — биномиальные коэффициенты; $(\alpha)_j = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + j - 1)$ — символ Похгаммера; $(\alpha)_0 = 1$. Кроме того, при поиске корней может быть полезна следующая дифференциальная зависимость:

$$B'_N = NB_{N-1}.$$

Численный счет показывает, что четные полиномы корней не имеют, корни нечетных монотонно растут с увеличением α и упорядочены по порядкам полиномов (см. рисунок).

Особой точке порядка N соответствует критическое время t_N , определяемое зависимостью (9):

$$(18) \quad t_N = \frac{\tau_N}{kn} D.$$

Напряжение в стержне возрастает за это время от нуля до величины, которую найдем из (14):

$$\sigma = \left(\frac{k}{A}\right)^{1/n} \left(\frac{\tau_N D}{n}\right)^{\alpha/n}.$$

Полученное решение можно использовать, например, для оценки безопасной в отношении выпучивания скорости приложения нагрузки в опыте на выпучивание при постоянной нагрузке σ_* . Для того чтобы еще на стадии роста нагрузки от нуля до рабочего значения σ_* не произошло выпучивания, время наращивания усилия должно быть меньше, чем время, соответствующее первой особой точке t_1 . Отсюда, согласно (14) и (18), имеем

$$k > A\sigma_*^n \left(\frac{\alpha D}{n}\right)^{-\alpha}.$$

Сравним предлагаемый подход с результатами, следующими из некоторых известных условных критериев устойчивости при ползучести. Заметим сразу, что эти критерии разрабатывались для случая постоянной нагрузки и среды, обладающей некоторым модулем упругости E . Перенос условных критериев на анализ нагружения $p = kt$ мгновенно-жесткого материала в какой-то степени формален.

Критерий касательного модуля [7]. Исключив время t из равенства (14) и закона нагружения (7), получим уравнение изохронной кривой $kp^\alpha = A\sigma^n$. Продифференцируем его по p . Найдем касательный модуль $E_k = \alpha\sigma/(np)$. Критическое время определится по формуле Эйлера с модулем E_k вместо E : $\sigma = E_k D$. Отсюда вытекает

$$t_{\text{Шнл}} = \frac{\alpha}{nk} D.$$

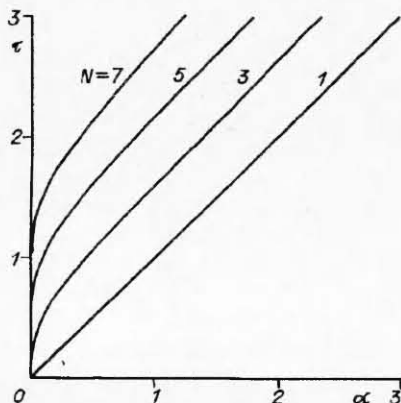
Критерий критической деформации [8]. Для упругого стержня деформация, соответствующая эйлеровой нагрузке σ_y , имеет вид $\epsilon = \sigma_y/E = D$. В нашем случае $p = D$, откуда сразу же следует

$$t_{\text{Дж}} = \frac{D}{k}.$$

Критическое время здесь не зависит от свойств среды.

Критерий релаксации возмущения [9]. При равновесии стержня в отклоненном состоянии под действием некоторой возмущающей нагрузки (момента m) второе уравнение (2) должно быть заменено на

$$(19) \quad \int_{\Omega} \Delta \sigma z d\Omega = -Tv - m.$$



В качестве критического принимается время, когда при постоянном прогибе ν момент m , удерживающий это состояние, уменьшится до нуля. Учитывая, что $\nu = \text{const}$, из (2), (3), (19) при $\dot{p} = k$ получим уравнение для амплитуды M возмущающего момента ($m = M \sin \mu y$):

$$M = U_0 T (D\alpha / (tnk) - 1).$$

Момент уменьшается от бесконечно большого значения при $t = 0$ до нуля за время

$$t_{\text{ив}} = \frac{\alpha}{nk} D,$$

совпадающее по величине с $t_{\text{шнл}}$ и с особой точкой первого порядка t_1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Колмановский В.Б. Устойчивость вязкоупругих тел и конструкций // Итоги науки и техники. Мех. деф. твердого тела. — М.: ВИНТИ, 1987. — Т. 19.
2. Куршин Л.М. Устойчивость при ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. — 1978. — № 3.
3. Кирсанов М.Н., Ключников В.Д. Определение особых точек процесса деформирования сжатого стержня в условиях ползучести // Изв. РАН. МТТ. — 1993. — № 3.
4. Ключников В.Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем. — М.: Изд-во МГУ, 1986.
5. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966.
6. Работнов Ю.Н., Шестериков С.А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести // ПММ. — 1957. — Т. 21, № 3.
7. Shanley F.R. Weight-strength analysis of aircraft structures. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co, 1952.
8. Gerard G. A creep buckling hypothesis // J. Aeron. Sci. — 1956. — V. 23, N 9.
9. Иванов Г.В. Об устойчивости равновесия сжато-изогнутых тонких стержней при неупругих деформациях // ПМТФ. — 1961. — № 3.

г. Воронеж

Поступила 26/VII 1993 г.

УДК 539.374; 534.1

А.Г. Иванов, В.А. Огородников, Г.Я. Карпенко,
А.Д. Ковтун, А.А. Демидов, Л.А. Толстикова

О ВЛИЯНИИ СДВИГОВОЙ ПРОЧНОСТИ НА РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ТОРМОЖЕНИИ СХОДЯЩИХСЯ ОБОЛОЧЕК

В [1] рассмотрены вопросы развития детерминированных возмущений у цилиндрических оболочек, заполненных воздухом и разгоняемых продуктами взрыва. Было установлено, что сдвиговая прочность материала оболочки заметным образом влияет на форму и амплитуду возмущений на стадии разгона оболочки к оси симметрии. Представляет интерес случай, когда сжимаемая оболочкой полость заполнена частично или, как, например, в [2], полностью более плотной, чем воздух, средой. При этом появляется возможность для изучения процессов торможения и последую-

© А.Г. Иванов, В.А. Огородников, Г.Я. Карпенко, А.Д. Ковтун, А.А. Демидов, Л.А. Толстикова, 1994