

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

---

УДК 624.04

## ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОГИБА АРОЧНОЙ ФЕРМЫ

М.Н. Кирсанов<sup>1</sup>

Национальный исследовательский университет "МЭИ"  
Россия, г. Москва

---

<sup>1</sup>Д-р физ.-мат. наук, проф., тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

---

В системе символьной математики Maple построена математическая модель деформирования плоской статически определимой арочной фермы. Рассмотрено действие нагрузки, равномерно распределенной по узлам нижнего пояса. Методом индукции на основе решения рекуррентных уравнений выведены формулы зависимости прогиба фермы от размеров и числа панелей и выражения для реакций опор и усилий в стержнях середины пролета. Использована формула Максвелла - Мора. Найдена квадратичная асимптотика решения.

**Ключевые слова:** арочная ферма, прогиб, метод индукции, Maple, точное решение

## FORMULAS FOR CALCULATION OF ARCH TRUSS DEFLECTION

M. N. Kirsanov<sup>1</sup>

National Research University "MPEI  
Moscow, Russia

---

<sup>1</sup>Dr of Physics and Mathematics, professor, tel.: +7(495)3627314; e-mail: c216@ya.ru

---

In the system of symbolic mathematics Maple a mathematical model of deformation of a planar statically determinate arched truss is constructed. The effect of a load uniformly distributed over the nodes of the lower belt is considered. By induction method, based on the solution of recurrent equations, formulas are derived for the dependence of the deflection of the truss on the dimensions and number of panels and the expressions for the reactions of supports and forces in the rods of the middle of the span. The Maxwell-Mora formula is used. The quadratic asymptotics of the solution is found.

**Keywords:** arched truss, deflection, induction method, Maple, exact solution

Рассмотрим арочную статически определимую плоскую ферму (рис. 1). Решетка фермы крестообразная, пояса параллельны. Ставится задача получить аналитическую зависимость прогиба фермы от числа панелей. Принимается, что число  $m$  панелей в боковых (опорных) частях фермы равно числу панелей  $n$  в половине ее средней горизонтальной части,  $b=h$ . Нагрузка равномерно распределена по узлам нижнего пояса ригеля. Ферма внешне статически неопределима. Для определения реакций опор необходимо составить и решить систему уравнений равновесия для всех узлов конструкции.

---

© Кирсанов М.Н., 2018

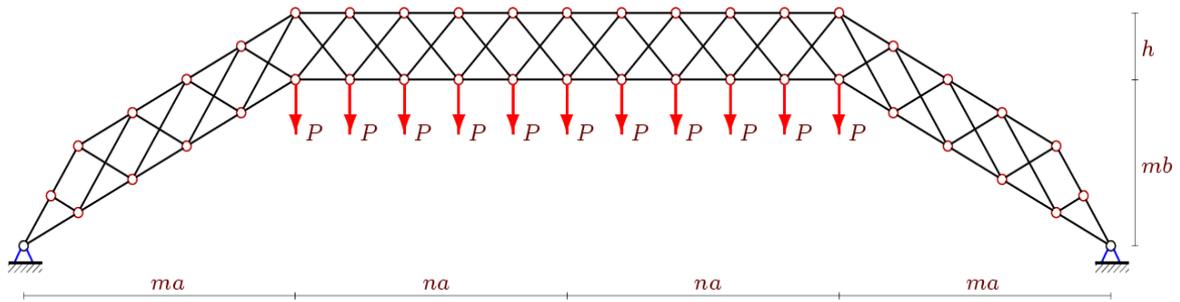


Рис. 1. Ферма при  $n=m=5, k=3$

Всего в ферме  $n_s = 8(n+m)$  стержней, включая четыре опорных стержня. Для определения аналитического выражения прогиба по формуле Максвелла - Мора необходимо вычислить усилия в стержнях в символьной форме. Решение системы уравнений равновесия узлов получается по программе [1], записанной в системе компьютерной математики Maple. Стержни и узлы нумеруются (рис. 2). Начало координат располагается в левой подвижной опоре.

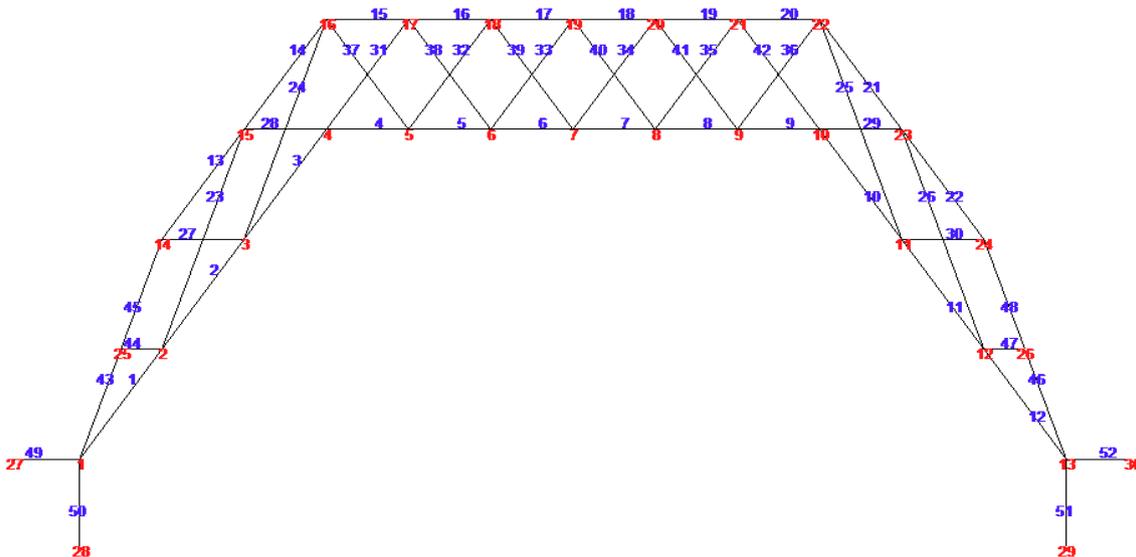


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней при  $n=m=3, k=2$

Фрагмент программы ввода координат имеет вид:

```
> r:=2*m+2*n+1;
> for i to m do
  y[i]:=(i-1)*b: y[i+m+2*n+1]:=m*b-(i-1)*b-b:
od:
> for i to 2*n+1 do y[i+m]:=m*b; od:
> for i to r do x[i]:=(i-1)*a: od:
> for i to r-2 do
  x[i+r]:=i*a: y[i+r]:=y[i+1]+h;
od:
> x[2*r-1]:=x[r+1]/2: y[2*r-1]:=y[r+1]/2:
> x[2*r]:=x[r]-a/2: y[2*r]:=y[2*r-1]:
```

Направляющие косинусы усилий в системе уравнений равновесия узлов определяются по координатам узлов и длинам стержней. Решение в системе Maple дает аналитические выражения для усилий во всех стержнях. Для расчета прогиба используется формула Максвелла – Мора в виде

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-4} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Обозначено:  $S_i^{(P)}$  — усилия в стержнях от заданной нагрузки,  $l_i$  — длины стержней,  $S_i^{(1)}$  — усилия от единичной силы, приложенной к середине нижнего пояса,  $E$  — модуль упругости,  $F$  — площадь сечения стержней. Считается, что жесткость  $EF$  всех стержней одинаковая.

Последовательный расчет прогиба для ферм с числом панелей  $k=1,2,..14$  дает ряд коэффициентов в формуле для прогиба:

$$\Delta = \frac{P(A_k a^3 + C_k c^3 + D_k d^3)}{8h^2 k^2 EF}, \quad (1)$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $d = \sqrt{a^2 + 4h^2}$ . При поиске закономерности в последовательности коэффициентов при  $a^3$  получены числа 9, 1276, 21011, 139910, 587917, 1868384, 4920631, 11320906, 23521745, 45129732, 81221659, 138699086. Оператор `rgf_findrecur` пакета `genfunc` системы Maple для этой последовательности (требуется четное число анализируемых чисел) дает следующее линейное однородное рекуррентное уравнение седьмого порядка

$$A_k = 7A_{k-1} - 21A_{k-2} + 35A_{k-3} - 35A_{k-4} + 21A_{k-5} - 7A_{k-6} + A_{k-7}.$$

Интересно заметить некоторую симметрию в закономерности образования средних (без общего множителя 7) коэффициентов с чередующимися знаками этого уравнения: 1, 3, 5, 5, 3, 1. Оператор `rsolve` позволяет решить полученное рекуррентное уравнение. Решение имеет вид полинома шестого порядка по  $k$

$$A_k = (160k^6 - 256k^5 + 96k^4 + 28k^3 + 14k^2 - 21k + 6) / 3.$$

Аналогично, коэффициент  $C_k$  удовлетворяет уравнению

$$C_k = 5C_{k-1} - 10C_{k-2} + 10C_{k-3} - 5C_{k-4} + C_{k-5},$$

также полученному оператором `rgf_findrecur`, и имеет вид

$$C_k = 4k(20k^3 - 28k^2 + 13k - 2) / 3.$$

Коэффициент  $D_k$  получается из решения уравнения  $D_k = 3D_{k-1} - 3D_{k-2} + D_{k-3}$  и имеет простой вид  $D_k = k(2k - 1)$ .

Зависимость безразмерного прогиба  $\Delta' = EF\Delta / (P_{sum}L)$ , вычисленного по (1) при постоянных длине пролета фермы  $L=2(n+m)a=100$  м и ее высоте  $H=mh$ , построена на рис. 3. Суммарная нагрузка на ферму принимается постоянной, не зависящей от числа панелей  $P_{sum} = (2n + 1)P$ . Принято  $H=4$ м,  $L=30$  м.

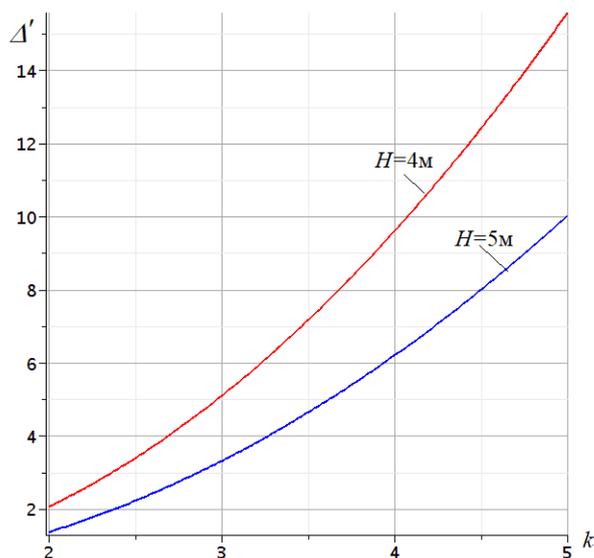


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей

Ход кривых подсказывает степенную асимптотику полученной зависимости. Вычисление предела  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\Delta' / k^2) = 5L^2 / (384H^2)$  свидетельствует о квадратичном росте прогиба с увеличением числа панелей в указанной постановке.

Для сравнения, опуская выкладки, приведем полученную аналогичным образом формулу для случая четных  $n=m=2k$ . Решение здесь удалось получить без ограничения на величины  $b$  и  $h$ :

$$\Delta = P(C_1 a^3 b^3 + C_2 a^3 b^2 h + C_3 h^3 (a^3 + c^3) + C_4 h^2 b (a^3 + c^3) + C_5 f^3 b^3) / (2b^3 h^2 EF), \quad (2)$$

где

$$C_1 = 4(10k^2 - 1)k^2 / 3, C_2 = 2(2 - 8k^2 - 3k)k / 3, C_3 = -2k, C_4 = 6k^2 + 2k, C_5 = 2k^2.$$

Сравнивая (1) и (2), замечаем отличительную и редкую в подобных задачах особенность решения (1). В знаменателе формулы стоит  $k^2$ . В известных аналитических решениях [2 – 8] такого нигде нет. Для нахождения закономерности образования коэффициентов формулы с переменным значением знаменателя (фактически определителя системы уравнений равновесия, если вспомнить правило Крамера) задачу в общем случае надо раскладывать на две. Одна закономерность ищется для числителя, другая — для знаменателя. Определенной удачей в приведенном решении оказалось то, что знаменатель имеет простую форму. В большинстве же подобных задач аналитической зависимости получить не удастся.

Использованный индуктивный метод при поддержке операторов системы компьютерной математики Maple для вывода аналитических решений в задачах о фермах применялся в работах [2 – 8].

#### Библиографический список

1. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Гриднев С.Ю., Кирсанов М.Н., Овчинников И.Г. Статический расчет двухраскосной балочной фермы // Интернет-журнал НАУКОВЕДЕНИЕ. 2016. Том 8, №6
3. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многогрешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. 2(271). С. 4–10.
4. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61-68.
5. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12.
6. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12.
7. Kirsanov M. N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels. Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. No. 1(37). P.92 – 99
8. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
9. Кирсанов М.Н., Заборская Н.В. Деформации периодической фермы с раскосной решеткой // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 3(71). С. 61–67

#### References

1. Kirsanov M. N. Maple and Maplet. Solutions of mechanics problems. SP.: Publishing house LAN, 2012. 512 p.
2. Gridnev S.Yu., Kirsanov M.N., Ovchinnikov I.G. Static calculation of a double-beam girder truss // Internet-journal Naukovedenie. 2016. Volume 8, No. 6
3. Kirsanov M. N., Maslov A.N. The formula for the deflection of multiple lattice beam truss calculation // Structural mechanics and calculation of structures. 2017. 2(271). Pp. 4-10.
4. Kirsanov M. N. Sticheskiy analiz i montazhnaya skhema ploskoj fermy // Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova. 2016. No. 5 (39). Pp. 61-68
5. Tinkov D.V. Calculation of the deflection of a flat arch farm with a cross-shaped grid // Postulat. 2017. No. 12.
6. Osadchenko NV Calculation of the deflection of a flat, continuous, statically determinate truss with two spans // Postulat. 2017. No. 12.
7. Kirsanov M. N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels. Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. No. 1(37). P.92 – 99
8. Tin'kov D.V. Sravnitel'nyj analiz analiticheskikh reshenij zadachi o progibe fermennykh konstrukcij // Magazine of Civil Engineering. 2015. №5(57). Pp. 66–73.
9. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. Pp. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7.