

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 624.04

СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СОСТАВНОЙ АРОЧНОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

М. Н. Кирсанов¹

Национальный исследовательский университет "МЭИ"¹
Россия, г. Москва

¹Д-р физ.-мат. наук, проф., тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

Дается вывод формул для прогиба плоской статически определимой фермы. Алгоритм вывода формул зависимости прогиба конструкции от размеров фермы и числа панелей основан на методе индукции. Расчет усилий в стержнях и реакции опор выполнен в системе символьной математики Maple. Для вычисления прогиба используется интеграл Мора. Расчет ферм с различным числом панелей дает последовательности коэффициентов в формуле для прогиба. Общий член этих последовательностей выявляется с применением специализированных операторов системы Maple. Получены асимптотики решения по двум независимым параметрам, задающим пропорции конструкции. Графики построенных решений обнаруживают некоторые особенности конструкции.

Ключевые слова: ферма, индукция, Maple, арка, прогиб.

Введение

Метод конечных элементов в различных вариантах [1-6] для расчета строительных конструкций является одним из основных, но не единственным, в инженерной практике. Еще один метод — аналитический. Несмотря на ограниченность возможностей аналитических решений они являются достаточно важными элементами как в практических расчетах, выполняя функции контроля и предварительной оценки, так и в теоретическом анализе предлагаемых схем. Ценность аналитических решений определяется как удобством их применения, так и возможностью использования для расчета конструкций широкого класса. Так, аналитические решения, представленные в рядах с неперменной необходимостью оценки остаточного члена, или в виде программ, которые требуют использования компьютера для доведения до конечного ответа [7-10], не так ценны как простые формулы. В расчете ферм известны формула Качурина [11] с условной (приближенной) оценкой влияния схемы решетки на результат и решения для регулярных ферм Игнатьева В.А. [12,13]. Наиболее распространенным методом для получения формул зависимости прогиба от параметров регулярной (периодической) конструкции, в число которых входит и параметр регулярности схемы — число панелей, является метод индукции [14,15]. Этим методом, существенно использующим операторы символьной математики, получен ряд формул для плоских [16-21] и пространственных ферм [22, 23].

Схема фермы. Постановка задачи

Плоская с горизонтальным ригелем арочная ферма составного типа имеет высоту $(m+k+1)h$ и пролет $L = 2a(k+n+1)$ (рис. 1). Число стержней в ферме $n_R = 8(n+k+m)+2$. В это число входят и четыре стержня, заменяющие в расчете шарнирные опоры неподвижного типа. Общая длина всех стержней конструкции равна $2(k+m+2n-1)a + 2(m+2k+n+1)c + 2(k+n+2m-1)h$, где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Конструкция фермы

имеет регулярную схему с тремя независимыми параметрами m , n , k , определяющими пропорции фермы. Фермы такого типа широко используются в составе пространственных конструкций промышленных зданий и сооружений. Однако для прогиба такой конструкции, несмотря на ее простоту, нет формулы, учитывающей не только размеры, упругие свойства материала и нагрузку, но и число панелей в ее частях. В настоящей работе ставится задача о нахождении аналитической зависимости прогиба арки в центральной ее части от числа панелей. Предполагая все соединения стержней шарнирными, получаем статически определенную модель, усилия в стержнях которой вместе с реакциями опор находим из уравнений равновесия узлов.

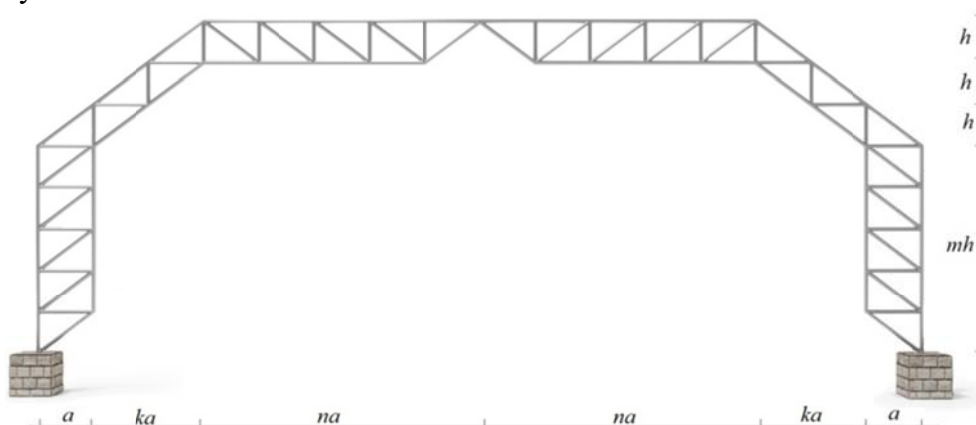


Рис. 1. Ферма, $n = 5$, $k = 2$, $m = 5$

Расчет усилий

Матрица \mathbf{G} системы уравнений равновесия узлов состоит из направляющих косинусов усилий, которые вычисляются по данным координат узлов в концах стержней $l_{1,i} = x_{N_{2,i}} - x_{N_{1,i}}$, $l_{2,i} = y_{N_{2,i}} - y_{N_{1,i}}$, $i = 1, \dots, n_R$, $l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}$. Здесь первый индекс i в номере $N_{i,j}$ соответствует номеру стержня, второй при $j = 1$ имеет номер шарнира в начале стержня, а при $j = 2$ номер его конца. Выбор начала и конца стержня условный и никак не влияет ни на знак усилия, ни на его значение. Направляющие косинусы в \mathbf{G} имеют вид:

$$G_{q,i} = -l_{j,i} / l_i, \quad q = 2N_{i,2} - 2 + j, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n_R, \quad q \leq n_R,$$

$$G_{q,i} = l_{j,i} / l_i, \quad q = 2N_{i,1} - 2 + j, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n_R.$$

Из решения системы линейных уравнений $\mathbf{G}\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{B}}$, где $\bar{\mathbf{S}}$ вектор усилий в стержнях, $\bar{\mathbf{B}}$ — вектор нагрузок, находятся усилия в стержнях фермы и реакции опор. В нечетные строки B_{2i-1} должны быть записаны горизонтальные узловые нагрузки, приложенные к узлу i (в данной задаче таких нет), в четные B_{2i} записаны вертикальные нагрузки. Методом обратной матрицы $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{G}^{-1}\bar{\mathbf{B}}$ находится решение. Прогиб фермы (вертикальное смещение сочленяющего узла C) находится с помощью интеграла Мора:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n_R-4} \frac{S_j s_j l_j}{EF}.$$

В формуле приняты обозначения: S_j — усилия в стержнях фермы от действия внешней нагрузки, s_j — усилия от единичной силы, приложенной к сочленяющему шарниру, l_j — длина стержня j . Площади сечений стержней приняты одинаковыми. Модуль Юнга для всех стержней конструкции равен E .

Сосредоточенная нагрузка в середине пролета (рис. 2). Рассмотрим случай $m=n$. Анализируя решения для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей, получаем, что общий вид формулы зависимости прогиба от параметров конструкции имеет вид:

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF). \quad (1)$$

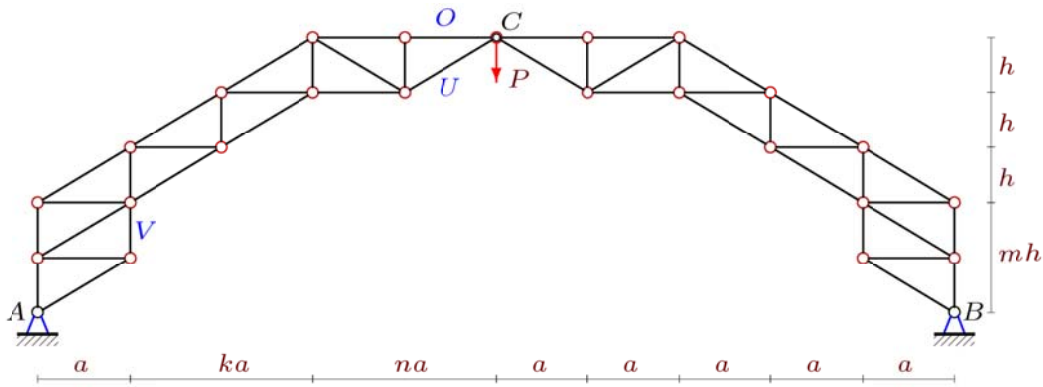


Рис. 2. Ферма под действием сосредоточенной нагрузки, $n=m=k=2$

При этом образуются последовательности коэффициентов. При $k=1$ для C_1 : 0, 3, 10, 23, 44, 75, 118, 175, для C_2 : 3/2, 5, 23/2, 21, 67/2, 49, 135/2, 89... Коэффициенты $C_1 = C_3$ не зависят от числа панелей k , для них методами системы Maple выявляются общие члены:

$$C_1 = C_3 = (n-1)(n^2 + n + 3) / 3. \quad (2)$$

Коэффициент C_2 зависит от k . Для различных значений k имеем:

$$\begin{aligned} k=1: & C_2 = 1 + 3n^2 / 2 - n, \\ k=2: & C_2 = 3 / 2 + 5n^2 / 2 - 2n, \\ k=3: & C_2 = 2 + 7n^2 / 2 - 3n, \\ & \dots \end{aligned}$$

Обобщение этих формул по k очевидно:

$$C_2 = (n^2(2k+1) - 2nk + k + 1) / 2. \quad (3)$$

Таким образом, формула (1) с коэффициентами (2) и (3) дает решение поставленной задачи в случае сосредоточенной нагрузки. Использован метод двойной индукции. Для проверки можно провести такой же анализ в другом порядке — сначала по k , затем по n . Выпишем также и формулы для усилий в стержнях верхнего и нижнего пояса панели в середине пролета и стойке нижней боковой панели фермы, полученные одновременно с выводом формулы для прогиба:

$$O = 0, U = -Pc / (2h), V = -P / 2,$$

Реакции опор арки:

$$X_A = Pa / (2h), Y_A = Y_B = P / 2.$$

Заметим, что эти формулы при $m = n$ не зависят от числа панелей и достаточно просто получаются и без применения системы компьютерной математики. Графические средства Maple позволяют также получить картину распределения усилий в стержнях фермы (рис. 3). Толщина отрезков стержней пропорциональна усилиям, синим цветом отмечены сжатые

но оказывается выше соответствующей кривой при $h = 2$ м. Такая нелинейность характерна для распорных конструкций и отчасти объясняется полиномиальными зависимостями (4).

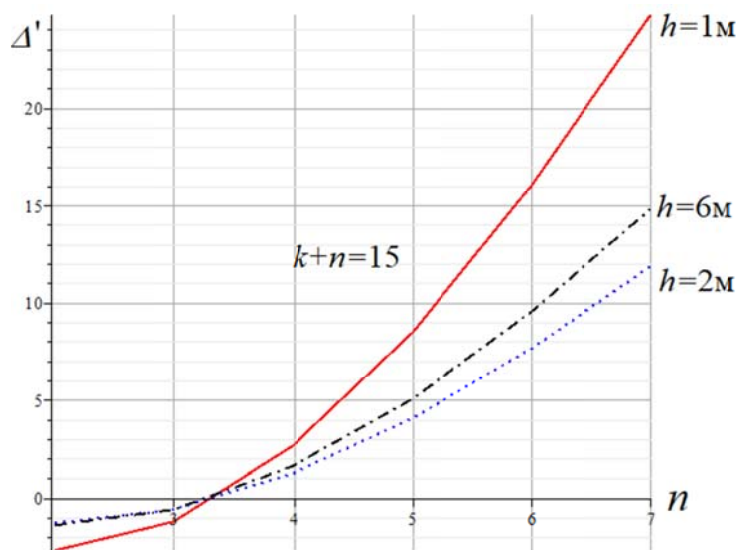


Рис. 6. Зависимость относительного прогиба от числа панелей n для распределенной по верхнему поясу нагрузки

На рис. 7 показана зависимость этого же решения от числа k при фиксированном n . Как и в предыдущем графике, чрезмерное увеличение k приводит к отрицательным прогибам. В зависимости от k меняется и порядок кривых при различных h . Интересны и точки пересечения кривых, означающие, что для разных h при некотором k прогиб может быть одинаковым. Отметим также, что независимо от высоты h прогиб обращается в ноль при одном и том же значении k .

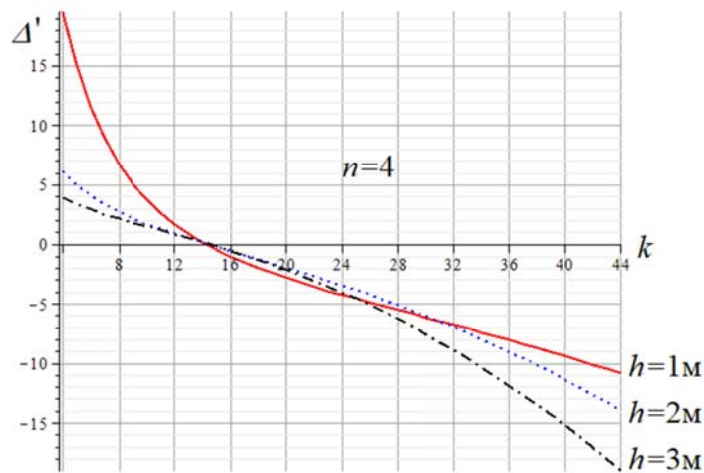


Рис. 7. Зависимость относительного прогиба от числа панелей k для распределенной по верхнему поясу нагрузки, $n=4$

Аналитическая форма решения средствами Maple позволяет найти его асимптотику как по числу n , так и по числу k :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^3 = h / (6L), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k^2 = -h(2n-1) / (24L).$$

Заключение

Получено аналитическое решение задачи о прогибе составной арочной фермы с произвольным числом панелей. Зависимости имеют вид полиномов степени не выше четвертой.

Графики этих зависимостей обнаружили некоторые особенности, обычно ускользающие от исследователей, применяющих только численные методы. Полученные формулы могут быть использованы в решении задач оптимизации конструкций, а использованный метод двойной индукции — для вывода аналогичных зависимостей для других стержневых конструкций. Введением поправочных коэффициентов в (1) решение легко обобщается на случай различных жесткостей стержней различных длин.

Библиографический список

1. Резунов А.В., Лютоева Ю.Н. Анализ напряженно-деформированного состояния прямоугольной плиты при различных способах опирания краев и произвольном загрузении // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 2(21). С. 20-31.
2. Козлов А.В. Классификация конструкций объединения железобетонной плиты со стальными балками. 2019. № 2(21) С. 50-63.
3. Игнатъев А.В., Габова В.В. Алгоритм статического расчета плоских стержневых систем по методу конечных элементов в смешанной форме // *Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета*. Серия: Естественные науки. 2007. № 6. С. 72-77.
4. Игнатъев А. В., Игнатъев В. А., Онищенко Е. В. Решение геометрически нелинейных задач статике шарнирно-стержневых систем на основе метода конечных элементов в форме классического смешанного метода // *Вестник МГСУ*. 2016. №. 2. С. 20-33.
5. Игнатъев А.В. Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Часть 1 // *Вестник МГСУ*. 2014. № 11. С. 37-57.
6. Ignatyev A.V., Ignatyev V.A., Onischenko E.V. Analysis of systems with unilateral constraints through the finite element method in the form of a classical mixed method // В сборнике: *Procedia Engineering*. 2016. С. 1754-1759.
7. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages // В сборнике: 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP) 2015. С. 382-385.
8. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A superposition method in the analysis of an isotropic rectangle // *Applied Mathematical Sciences*. 2016. Т. 10. № 54. С. 2647-2660.
9. Рыбаков Л. С. Линейная теория плоского призматического каркаса // *Известия РАН. Механика твердого тела*. – 2001. – №. 106-118.
10. Рыбаков Л. С. Линейная теория плоской ортогональной решетки // *Известия РАН. Механика твердого тела*. – 1999. – №. 4. – С. 174-189 .
11. Качурин В. К. Теория вантовых систем. Статический расчет. – Ленинград–Москва : Строиздат, 1962. – 224 с.
12. Галишникова В.В., Игнатъев В.А. Регулярные стержневые системы. Теория и методы расчета. – Волгоград: ВолГАСУ, 2006.
13. Игнатъев В.А. Расчет регулярных стержневых систем – Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
14. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // *Инженерно-строительный журнал*. 2012. № 5 (31). С. 38-42.
15. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // *Architecture and Engineering*. 2016. Т. 1. № 3. С. 14-17.
16. Tinkov D. V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures // *Magazine of civil Engineering*. 2015. № 5(57). Pp. 66-73. doi: 10.5862/MCE.57.6
17. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // *Инженерно-строительный журнал*. 2016. №1(61). С. 25–32) doi: 10.5862/MCE.61.3

18. Тиньков Д.В. Формулы для расчёта прогиба вваренной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 2. № 13 (13). С. 10-14.
19. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
20. Воробьев О. В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // Строительная механика и конструкции. 2020. Т. 1. №. 24. С. 25-38.
21. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // Строительная механика и конструкции. 2019. Т.1. № 20. С. 21-29.
22. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 165-171.
23. Ларичев С.А. Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 4-8.

Reference

1. Rezunov A.V., Lutoeva Yu.N. Analysis of the stress-strain state of a rectangular plate with various methods of supporting the edges and arbitrary loading. Construction Mechanics and Structures. 2019.No 2 (21). Pp. 20-31.
2. Kozlov A.V. Classification of structures for combining reinforced concrete slabs with steel beams. 2019.No 2 (21). Pp. 50-63.
3. Ignatiev A.V., Gabova V.V. The algorithm for static calculation of flat rod systems by the finite element method in mixed form. Bulletin of the Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Natural Sciences. 2007. No. 6. Pp. 72-77.
4. Ignatiev A.V., Ignatiev V.A., Onishchenko E.V. Solution of geometrically non-linear problems of the statics of hinged-rod systems based on the finite element method in the form of the classical mixed method . Vestnik MGSU. 2016. No. 2, p. 20-33.
5. Ignatiev A.V. The main formulations of the finite element method in the problems of structural mechanics. Part 1. Vestnik MGSU. 2014. No. 11. S. 37-57.
6. Ignatyev A.V., Ignatyev V.A., Onischenko E.V. Analysis of systems with unilateral con-straints through the finite element method in the form of a classical mixed method. In the collection: Procedia Engineering. 2016.Pp. 1754-1759.
7. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. Collected: 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP) 2015.S. 382-385.
8. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A superposition method in the analysis of an isotropic rec-tangle. Applied Mathematical Sciences. 2016.V. 10. No. 54. Pp. 2647-2660.
9. Rybakov L.S. Linear theory of a flat prismatic skeleton. Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics. 2001. No. 106-118.
10. Rybakov L.S. Linear theory of a plane orthogonal lattice. Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics. 1999. No. 4. Pp. 174-189.
11. Kachurin V.K. Theory of cable-stayed systems. Static calculation. Leningrad – Moscow: Stroizdat, 1962 . 224 p.
12. Galishnikova V.V., Ignatiev V.A. Regular core systems. Theory and calculation methods. - Volgograd: VolgGASU, 2006.
13. Ignatiev V.A. Calculation of regular core systems - Saratov: Saratov Higher Military Chemical Military School, 1973.
14. Kirsanov M.N. Inductive analysis of the influence of installation errors on the rigidity and strength of a flat truss. Engineering and Construction Journal. 2012. No. 5 (31). Pp. 38-42.
15. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. Architecture and Engineering. 2016.V. 1. No. 3. Pp. 14-17.

16. Tinkov D. V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures. Magazine of civil Engineering. 2015. No. 5 (57). Pp. 66-73. doi: 10.5862 / MCE.57.6
17. Tinkov D.V. Optimal geometry of a flat beam diagonal truss taking into account the linear creep of the material. Magazine of civil Engineering. 2016. No. 1(61). Pp. 25–32) doi: 10.5862 / MCE.61.3
18. Tinkov D.V. Formulas for calculating the deflection of a collapsed beam diagonal truss with an arbitrary number of panels. Structural Mechanics and Structures. 2016.Vol. 2. No. 13 (13). Pp. 10-14.
19. Osadchenko N.V. Analytical solutions to the problems of deflection of flat trusses of arch type. Structural Mechanics and Structures. 2018.V.1. No. 16. Pp.12-33.
20. Vorobyev O. V. On methods for obtaining an analytical solution for the problem of natural frequencies of hinged structures. Structural Mechanics and Structures. 2020. V. 1. No. 24. Pp. 25-38.
21. Belyankin N.A., Boyko A.Yu. Formulas for deflection of a truss beam with an arbitrary number of panels with uniform loading. Structural Mechanics and Structures. 2019. No. 1 (20). Pp. 21-29.
22. Kirsanov M.N. An analytical study of the stiffness of a spatial statically determinate truss. Vestnik MGSU. 2017.V. 12. No. 2 (101). Pp. 165-171.
23. Larichev S.A. Inductive analysis of the effect of a building lift on the stiffness of a spatial beam truss. Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. M: Infra-M. 2015.V. 1.Pp. 4-8

STATIC CALCULATION OF A COMPOSITE ARCH TRUSS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

M. N. Kirsanov¹

National Research University «MPEI»¹

Moscow, Russia

¹Dr of Physics and Mathematics, professor, tel.: +7(495)3627314; e-mail: c216@ya.ru

The derivation of the formula for deflection of statically determinate flat truss is given. The algorithm for deriving formulas for the dependence of the deflection of the structure on the size of the truss and the number of panels is based on the induction method. The calculation of the forces in the rods and the reaction of the supports is performed in the symbolic mathematics system Maple. The Mohr integral is used to calculate the deflection. The calculation of trusses with different numbers of panels gives a sequence of coefficients in the deflection formula. The common member of these sequences is identified using specialized operators of the Maple system. Asymptotics of the solution are obtained for two independent parameters that define the proportions of the construction. Graphs of the constructed solutions reveal some design features.

Keywords: Arch, truss, induction, Maple, deflection