

DOI 10.36622/VSTU.2021.31.4.001
УДК 624.041.5, 539.4

**ДЕФОРМАЦИИ РЕШЕТЧАТОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ
С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ**

М. Н. Кирсанов

Национальный исследовательский университет «МЭИ»
Россия, г. Москва

Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин,
тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

Предлагается схема статически определимой балочной фермы регулярного типа с криволинейным верхним поясом. Для трех видов нагрузки методом индукции по числу панелей в системе компьютерной математики Maple находится зависимость прогиба середины пролета фермы от величины нагрузки, размеров и числа панелей. Прогиб середины пролета и горизонтальный сдвиг подвижной опоры находятся в аналитической форме по формуле Максвелла – Мора. Показано, что при определенном числе панелей система становится геометрически изменяемой. Приводятся диаграмма распределения усилий по стержням конструкции и линейная асимптотика зависимости прогиба от числа панелей.

Ключевые слова: ферма, прогиб, Maple, индукция, число панелей, асимптотика

Постановка задачи. Для расчета усилий и деформаций стержневых конструкций в инженерной практике используются численные методы, основанные, как правило, на методе конечных элементов [1-5]. Аналитические методы расчета применяются для простых статически определимых моделей регулярных конструкций [6-9]. Формулы для прогиба плоских внешне статически неопределимых ферм в зависимости от числа панелей в системе Maple получены в [10,11]. Нижние границы собственных частот регулярных ферм в аналитической форме в приближении Донкерлея получены методом индукции в [12, 13]. Деформации пространственной фермы в системе Maple для произвольного числа панелей получены в [14]. В монографии В.А. Игнатьева [15] приведены аналитические решения для расчета деформаций и частот колебаний регулярных ферм. В справочнике [16] собраны формулы для расчета прогиба плоских регулярных статически определимых балочных и решетчатых ферм под действием различных нагрузок. Основные особенности регулярных статически определимых стержневых систем изучались в [17-19].

В настоящей работе рассматривается новая схема регулярной балочной фермы с двойной решеткой (рис. 1). Ставится задача найти аналитическую зависимость прогиба фермы от числа панелей для трех видов нагрузок. Ферма имеет длину пролета $L = 2(2n - 1)a$, где n – число панелей в половине пролета, и высоту $3h$. Решетка фермы двойная. Ферма состоит из $K = 8n + 6$ стержней, включая три стержня, моделирующие опоры. Нагрузка равномерно распределена по узлам нижнего (рис. 1) или верхнего (рис. 2) пояса.

Расчет усилий. Для определения прогиба по формуле Максвелла – Мора требуются выражения для усилий в стержнях. Расчет усилий производится в системе Maple методом

вырезания узлов. Составляется система уравнений равновесия всех узлов в проекции на оси координат. В качестве неизвестных в систему входят реакции опор. Неподвижная опора моделируется двумя стержнями, подвижная (левая) – одним вертикальным стержнем. Коэффициентами системы являются направляющие косинусы усилий, для вычисления которых используются координаты узлов и порядок соединения стержней в узлах.

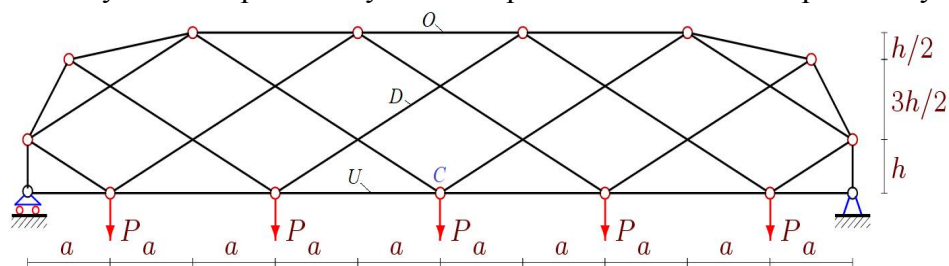


Рис. 1. Ферма под действием равномерной узловой нагрузки по нижнему поясу (нагрузка 1), $n=3$

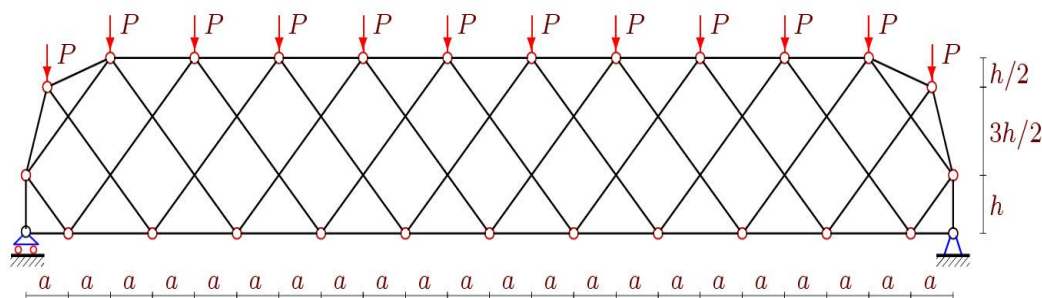


Рис. 2. Ферма под действием равномерной узловой нагрузки по верхнему поясу, (нагрузка 2), $n = 6$

Стержни и узлы нумеруются для произвольного числа панелей n (рис. 3). Значения координат вводятся в программу, написанную на языке символьной математики Maple.

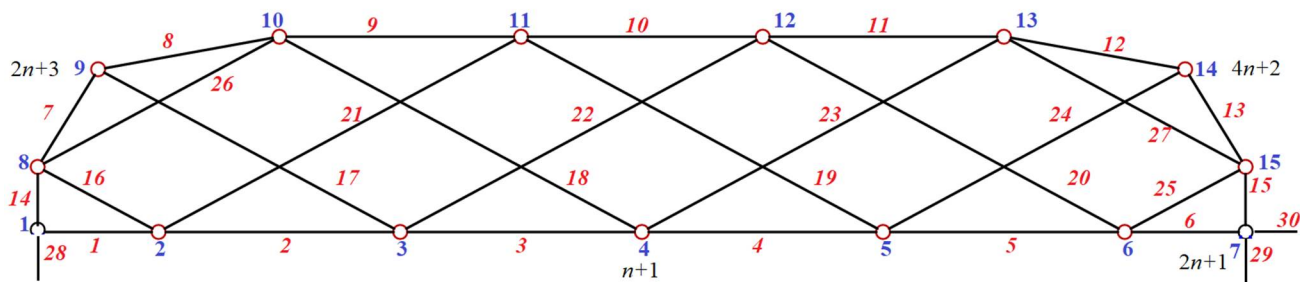


Рис. 3. Нумерация узлов и стержней, $n = 3$

Начало координат выбирается в левой опоре. Соответствующий фрагмент программы имеет вид:

```
> x[1]:=0:y[1]:=0:
> for i to 2*n-1 do x[i+1]:=2*i*a-a; y[i+1]:=0; od:
> x[2*n+1]:=x[2*n]+a: y[2*n+1]:=0:
> x[2*n+2]:=0: y[2*n+2]:=h:
> x[2*n+3]:=a/2: y[2*n+3]:=5*h/2:
> for i to 2*n-2 do x[i+2*n+3]:=2*i*a; y[i+2*n+3]:=3*h; od:
```

```
> x[4*n+2]:=x[2*n]+a/2: y[4*n+2]:=5*h/2:
> x[4*n+3]:=x[2*n+1]: y[4*n+3]:=h:
```

Расчет усилий производится с применением операторов системы Maple:

```
> for i to K do
>   Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]]:
>   Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]]:
>   L[i]:=subs(a^2+h^2=c^2,9*a^2+h^2=d^2,a^2+9*h^2=f^2,
               sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2));
>> for j to 2 do
>   jj:=2*N[i][2]-2+j:
>   if jj<=K then G[jj,i]:=-Lxy[j]/L[i]:fi;
>   jj:=2*N[i][1]-2+j:
>   if jj<=K then G[jj,i]:= Lxy[j]/L[i]:fi;
> od;
> od:
```

Здесь $Lxy[1]/L[i]$ и $Lxy[2]/L[i]$ – направляющие косинусы стержня с номером i усилий с осью x и y соответственно, $N[i][1]$, $N[i][2]$ – номера узлов в начале и конце этого же стержня.

Картина распределения усилий в стержнях фермы с нагрузкой по верхнему поясу, отнесенных к нагрузке P в численном виде при $n=4$, $a=3$ м, $h=2$ м представлена на рис. 4. Линии по толщине условно пропорциональны модулям соответствующих усилий. Сжатые элементы выделены синим цветом, красным – растянутые. Стержни, в которых усилия нулевые, обозначены тонкими черными линиями. Числом указано значение относительного усилия с точностью до двух знаков. Верхний пояс при такой нагрузке сжат, нижний – растянут. Для случая равномерного узлового нагружения нижнего пояса распределение усилий представлено на рис. 5. Следует отметить, что наиболее растянутые стержни для нагрузки 2 оказались не в середине нижнего пояса, а наиболее сжатые при нагрузке 1 (нижнего пояса) не в середине верхнего. Это характерно для решетчатых ферм [11, 16].

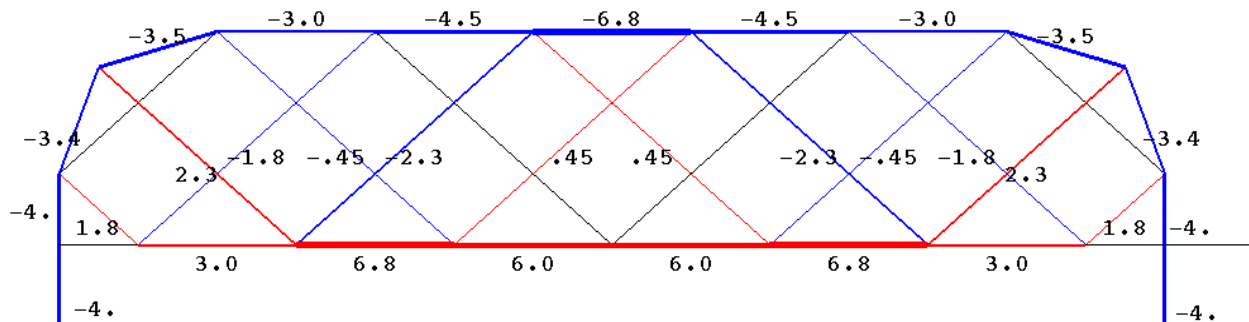


Рис. 4. Нагрузка 2 по верхнему поясу. Распределение усилий в стержнях, $n = 4$

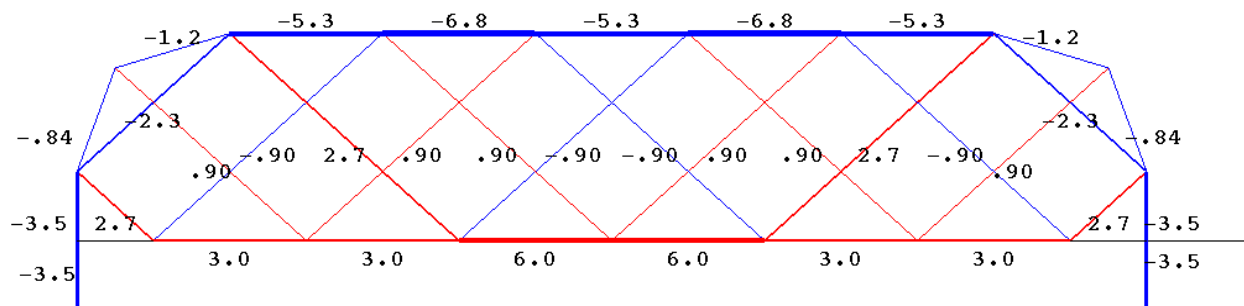


Рис. 5. Нагрузка 1 по нижнему поясу. Распределение усилий в стержнях, $n = 4$

В процессе численного счета было замечено, что при некоторых значениях числа панелей определитель системы уравнений равновесия узлов вырождается. Обнаружена закономерность: при $n = 2, 5, 8, \dots$ или при $n = 3k - 1, k = 1, 2, \dots$ ферма становится геометрически изменяемой. Найдена картина распределения возможных скоростей для этих случаев, подтверждающая найденный эффект (рис. 6, 7).

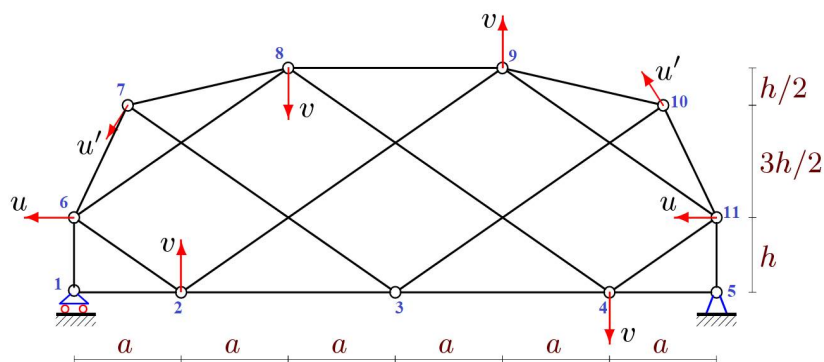


Рис. 6. Ферма при $n = 2$. Виртуальные скорости узлов изменяемой фермы,

$$v/a = u/h = u'/(4c), \quad c = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Стержни 2-6 и 4-11 совершают вращательное движение вокруг опор. Стержневые треугольники 6-7-8 и 9-10-11 вращаются вокруг мгновенных центров скоростей, элементы 2-9 и 4-8 имеют поступательное движение. Неподвижных стержней нет. Определитель матрицы системы уравнений равновесия узлов в данном случае обращается в ноль.

Для случаев, исключаяющих изменяемость системы, принята следующая последовательность числа панелей $n = (5 - (-1)^k + 6k) / 4, k = 1, 2, 3, \dots$. Последовательно рассчитывая усилия в стержне O на середине верхнего пояса, получаем для нагрузки сосредоточенной силой в среднем узле C нижнего пояса значения:

$$O_{k=1} = -3aP / (2h), \quad O_{k=2} = -aP / (2h), \quad O_{k=3} = -5aP / (2h), \quad O_{k=4} = -3aP / (2h), \dots$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Обобщая методами Марле эти решения на произвольное значение k , получаем искомую зависимость усилия от числа панелей $O = -aP(-3(-1)^k + 1 + 2k) / (4h)$. Аналогично находим решения для раскоса D из середины пролета и стержня U нижнего пояса:

$$D = -cP(-1)^k / (2h), \quad U = aP(2k - 1 + (-1)^k) / (4h).$$

Для равномерного нагружения узлов нижнего пояса имеем зависимости:

$$\begin{aligned}
O &= -aP(6k^2 - 2(-1)^k - 3)k - (-1)^k - 3) / (8h), \\
U &= aP(6k^2 + 2(3 - (-1)^k)k - (-1)^k + 1) / (8h), \\
D &= -cP / (2h).
\end{aligned}$$

Для равномерного нагружения узлов верхнего пояса:

$$\begin{aligned}
O &= -aP(6k^2 + 2(3 - (-1)^k)k - (-1)^k + 5) / (8h), \\
U &= aP(6k^2 + (-2(-1)^k + 6)k - (-1)^k + 1) / (8h), \\
D &= cP / (4h).
\end{aligned}$$

Вычисление прогиба. Прогиб (вертикальное смещение узла С) определяется по формуле Максвелла-Мора:

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{K-3} S_{\alpha}^{(P)} S_{\alpha}^{(1)} l_{\alpha} / (EF). \quad (1)$$

Сумма составляется по всем упругим стержням конструкции, кроме трех опорных, которые приняты жесткими. Введены обозначения: $S_{\alpha}^{(P)}$ – усилие в стержне с номером α от действия внешней нагрузки, $S_{\alpha}^{(1)}$ – усилие в этом же стержне от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу С, l_{α} – длина стержня, EF – жесткость стержня.

Расчет прогиба ряда ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей дает общую зависимость прогиба от числа панелей

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3 + C_4 d^3 + C_5 f^3) / EF, \quad (2)$$

где $d = \sqrt{9a^2 + h^2}$, $f = \sqrt{a^2 + 9h^2}$. Коэффициенты $C_1(k), \dots, C_5(k)$ в этой зависимости определяются методом индукции. Например, для нагружения 1 коэффициент C_1 определяется из решения однородного линейного рекуррентного уравнения девятого порядка

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + 4C_{1,k-2} - 4C_{1,k-3} - 6C_{1,k-4} + 6C_{1,k-5} + 4C_{1,k-6} - 4C_{1,k-7} - C_{1,k-8} + C_{1,k-9}.$$

Искомые выражения для коэффициентов имеют вид:

$$\begin{aligned}
C_1 &= (30k^4 + 20(3 - (-1)^k)k^3 + 6(7 - 5(-1)^k)k^2 + 4(11(-1)^k + 7)k + 3(-1)^k - 11) / 16, \\
C_2 &= (6k^2 + 6(5(-1)^k + 1)k + 23(-1)^k - 3) / 8, \\
C_3 &= (6k + 3 - (-1)^k) / 4, \\
C_4 &= C_5 = (3(-1)^k - 1 - 2k) / 32.
\end{aligned} \quad (3)$$

Для нагружения верхнего пояса имеем решение:

$$\begin{aligned}
C_1 &= (30k^4 + 20(3 - (-1)^k)k^3 + (46 - 30(-1)^k)k^2 + 32(1 - 2(-1)^k)k - 11(-1)^k + 19) / 16, \\
C_2 &= (6k^2 + 6(1 - 5(-1)^k)k - 22(-1)^k + 11) / 8, C_2 = (5 - (-1)^k + 6k) / 4, \\
C_4 &= -((-1)^k + k) / 16, C_5 = -((-1)^k + k + 1) / 16.
\end{aligned}$$

Наиболее простое решение получается для случая сосредоточенной нагрузки, приложенной к середине нижнего пояса (узел С):

$$C_1 = (4k^3 + 2(3 - (-1)^k)k^2 + 2(8 - (-1)^k)k - 5(-1)^k + 3) / 4,$$

$$C_2 = (18k + 13 - 3(-1)^k) / 4, C_3 = 1/2, C_4 = C_5 = 1/16.$$

Вычисление сдвига подвижной опоры. Под действием вертикальной нагрузки подвижная левая опора получает горизонтальное смещение. Для получения формул для этой величины можно воспользоваться тем же алгоритмом, что и при выводе формул для прогиба. В формуле (1) в случае поиска горизонтального смещения под силой $S_\alpha^{(1)}$ следует понимать горизонтальную силу, приложенную к подвижной опоре. Методом индукции получим формулу сдвига для нагрузки 1:

$$\delta = Pa^2(6k^3 + 3(3 - (-1)^k)k^2 - (3(-1)^k + 1)k + 2(-1)^k - 2) / (2hEF).$$

Сдвиг от нагрузки 2 и от сосредоточенной силы в середине пролета вычисляются как функции числа панелей соответственно по формулам:

$$\delta = 3Pa^2(2k^3 + (3 - (-1)^k)k^2 + (3 - (-1)^k)k - (-1)^k + 1) / (2hEF),$$

$$\delta = Pa^2(6k^2 + 2(3 - (-1)^k)k - (-1)^k + 1) / (4hEF).$$

Численный пример. Проиллюстрируем найденную зависимость прогиба от числа панелей для фермы длины $L = 2(2n - 1)a = 100$ м с общей нагрузкой на нижний пояс $P_0 = (2n - 1)P$. Введем обозначение для безразмерного прогиба: $\Delta' = EF\Delta / (P_0L)$. На рис. 7 даны три кривые, построенные по формулам (2), (3). Наклонная асимптота зависимости прослеживается, несмотря на скачкообразное изменение прогиба. Угол ее наклона можно найти средствами системы Maple:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k = h / (4L).$$

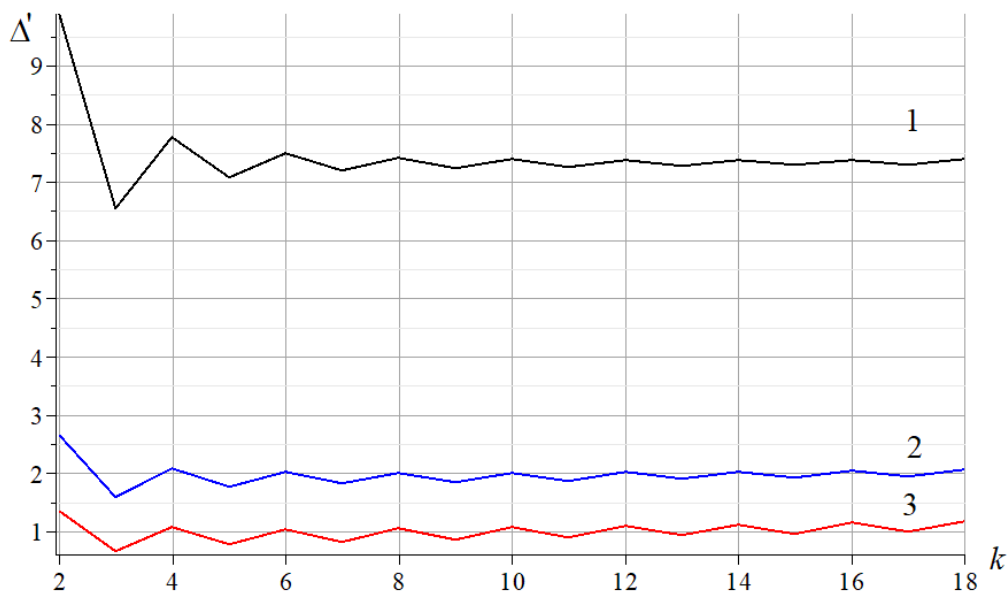


Рис. 7. Зависимость прогиба от числа панелей, $L=100$ м, 1 — $h = 2$ м; 2 — $h = 4$ м; 3 — $h = 6$ м

Зависимость сдвига от числа панелей также имеет асимптоту, но она в этом случае горизонтальная: $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta' = L / (36h)$, где $\delta' = EF\delta / (P_0L)$.

Заключение. Предложена схема статически определимой решетчатой регулярной фермы балочного типа. Особенность схемы – наличие скосов в верхнем поясе боковых панелей. Замечено кинематическое вырождение конструкции при определенном числе панелей. Методом индукции при допустимом числе панелей получены аналитические зависимости прогиба конструкции и сдвига подвижной опоры от числа панелей для нагрузок трех видов. Показаны распределения усилий в решетке конструкции, получены формулы для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях. Обнаружена наклонная асимптота зависимости прогиба от числа панелей. Примененный алгоритм вывода аналитических зависимостей может быть использован и в других регулярных структурах.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского государственного университета «Фундаментальные и прикладные исследования космоса».

Библиографический список

1. Дмитриева Т.Л. Алгоритм автоматизированного проектирования ферм минимального веса // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2010. № 3 (615). С. 98-105.
2. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2003. Part 51. Pp. 383–391.
3. Vatin N., Ivanov Ay., Rutman Y., Chernogorskiy, S., Shvetsov, K. Earthquake engineering optimization of structures by economic criterion. Magazine of Civil Engineering. 2017. 8(76). Pp. 67–83. DOI:10.18720/MCE.76.7.
4. Kiychenko T.S., Tabanyukhova M.V., Kharinova N.V. Determination of stresses in truss rods: numerical and physical experiment // В сборнике: IOP Conference Series: Materials Science and Engineering The conference proceedings ICCATS-2019. South Ural State University (national research university), Irkutsk National Research Technical University, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin. 2019. P. 033043.
5. Heyman J. Design of a simple steel truss // Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings. 2010. Part. 163. №. 1. Pp. 53-56.
6. Dai, Qiao; Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels; 2021; AlfaBuild; 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
7. Овсянникова В.М. Зависимость деформаций балочной фермы трапецевидной формы от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2020. №3 (26). С.13-20.
8. Петриченко Е.А. Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // Строительная механика и конструкции. 2020. №3 (26). С. 21-29.
9. Суд И. Б. Формулы для прогиба шпренгельной балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2020. №2 (25). С. 25-32.
10. Овсянникова В.М. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2020. №4 (27). С. 16-25.
11. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2021. №2 (27). С. 29-37.

12. Воробьев О.В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // *Строительная механика и конструкции*. 2020. № 1 (24). С. 25–38.
13. Vorobev O.V. Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. 92(7). Pp. 9204–9204. DOI:10.18720/CUBS.92.4. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2020.92.4> (date of application: 27.02.2021).
14. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2015. № 2 (259). С. 2-6.
15. Игнатьев В.А. Расчет регулярных стержневых систем. Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище.– 1973.
16. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. М.: ИНФРА-М, 2019. 238 с.
17. Zok F. W., Latture R. M., Begley M. R. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. Vol. 96. Pp. 184–203.
18. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005. Part. 85. №. 9. Pp. 607–617.
19. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. № 4. Pp. 756–782.

References

1. Dmitrieva T.L. Algorithm for computer-aided design of trusses of minimum weight. *News of higher educational institutions. Building*. 2010. No. 3 (615). Pp. 98-105.
2. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2003. Part 51. Pp. 383–391.
3. Vatin, N., Ivanov, Ay., Rutman, Y., Chernogorskiy, S., Shvetsov, K. Earthquake engineering optimization of structures by economic criterion. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. 8(76). Pp. 67–83. DOI:10.18720/MCE.76.7.
4. Kiychenko T.S., Tabanyukhova M.V., Kharinova N.V. Determination of stresses in truss rods: numerical and physical experiment. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering The conference proceedings ICCATS-2019*. South Ural State University (National Research University), Irkutsk National Research Technical University, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin. 2019. P. 033043.
5. Heyman J. Design of a simple steel truss. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings*. 2010. Part. 163. No 1. Pp. 53-56.
6. Dai, Qiao; Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels; 2021; AlfaBuild; 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
7. Ovsyannikova V.M. Dependence of the deformations of a trapezoidal girder on the number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2020. No. 3 (26). Pp.13-20.
8. Petrichenko E.A. The lower limit of the frequency of natural vibrations of the Fink truss. *Structural mechanics and structures*. 2020. No. 3 (26). Pp. 21-29.
9. Court I.B. Formulas for the deflection of a truss girder with an arbitrary number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2020. No. 2 (25). Pp. 25-32.
10. Ovsyannikova V.M. Dependence of the deflection of a planar externally statically indeterminate truss on the number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2020. No. 4 (27). Pp. 16-25.

11. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2021. No. 2 (27). Pp. 29-37.
12. Vorobiev OV On methods of obtaining an analytical solution for the problem of natural frequencies of hinged structures. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2020. No. 1 (24). Pp. 25-38.
13. Vorobiev O.V. Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020.92 (7). Pp. 9204-9204. DOI: 10.18720 / CUBS.92.4. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2020.92.4> (date of application: 27.02.2021).
14. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a spatial rod regular structure with a flat face. *Building mechanics and calculation of structures*. 2015. No. 2 (259). Pp. 2-6.
15. Ignatiev V.A. Calculation of regular rod systems. Saratov: Saratov Higher Military Chemical Military School.- 1973.
16. Kirsanov M.N. Planar trusses. Schemes and formulas: a handbook. Moscow: INFRA-M, 2019. 238 p.
17. Zok F. W., Latture R. M., Begley M. R. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. Vol. 96. Pp. 184–203.
18. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005. Part. 85. №. 9. Pp. 607–617.
19. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. № 4. Pp. 756–782.

DEFORMATIONS OF A LATTICE GIRDER WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

M. N. Kirsanov

National Research University «MPEI»
Moscow, Russia

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

The scheme of a statically definable beam girder of a regular type with a curved upper chord is proposed. For three types of load by the induction method according to the number of panels in the Maple computer mathematics system the dependence of the deflection of the middle of the truss span on the value of the load, size and number of panels is found. The deflection of the middle of the span and the horizontal displacement of the movable support in analytical form according to the Maxwell-Mohr formula are obtained. It is shown that for a certain number of panels, the system becomes geometrically variable. A diagram of the distribution of forces over the bars of the structure and the linear asymptotics of the dependence of the deflection on the number of panels are presented.

Key words: truss, deflection, Maple, induction, number of panels, asymptotics