

УДК 531(075.8)

ПЛОСКИЕ ФЕРМЫ. МЕТОДЫ РЕШЕНИЙМ.Н. Кирсанов¹¹ *mpei2004@yandex.ru*; Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Описаны численные, графические и аналитические с привлечением системы компьютерной математики Maple алгоритмы получения решений задач статики плоских ферм. Рассмотрены случаи кинематической изменяемости некоторых схем ферм.

Ключевые слова: ферма, прогиб, Maple, индукция, кинематическая изменяемость.

СОДЕРЖАНИЕ:

1	Предисловие	25
2	Метод вырезания узлов	27
3	Метод сечений	29
4	Принцип возможных перемещений	31
5	Метод замены стержней	33
6	Кинематически изменяемые фермы	37
7	Maple-программа для расчета усилий и прогиба	40
	Литература	45

1. Предисловие

Новые схемы статически определимых ферм всегда интересовали инженеров. Во-первых, этот интерес вызван желанием получить какие-то оптимальные решения по прочности, жесткости и экономии затрат на материалы и монтаж. Во-вторых, здесь проявляется интерес к архитектурной выразительности конструкций мостов, покрытий, корпусов зданий. Не все инженерные конструкции выполнены в виде простых треугольных, раскосных или решетчатых схем. Можно привести примеры известных оригинальных конструкций мостов, основой которых являются статически определимые фермы (рис. 1 – 3).



Рис. 1. Мост через залив Ферт-оф-Форт, Шотландия¹

Целеустремленным поиском таких схем, плоских и пространственных, занялись Hutchinson R. G. и Fleck N. A., неслучайно назвав эти поиски "охотой на статически определимые схемы"[99, 100].

В чистом виде статически определимые конструкции ферм вероятно нигде не используются по крайней мере потому, что шарниры чаще всего заменяются жесткими или полужесткими соединениями или просто дополнительные стержни для обеспечения жесткости превращают исходную статически определимую ферму в статически неопределимую. Статически определимую ферму можно считать моделью реальной конструкции или основной системой при расчете методом сил.

Статически определимые фермы еще интересны простотой расчета, который в большинстве случаев выполняется численно. Современные программные средства символической математики (Maple, Mathematica, Derive, Reduce и др.) позволяют выполнить эти же расчеты и аналитически.

¹ Размеры моста впечатляют: пролеты по 521 м, диаметр стержней (труб) до 3,6 м, опоры высотой 100 м.



Рис. 2. Харбор-Бридж, Сидней, Австралия

Достаточно заменить при вводе данных числа на символы и будет получена конечная формула для прогиба или усилия в каком-то стержне в зависимости от нагрузки, размеров и упругих характеристик материала конструкции. В этой формуле можно менять размеры фермы, величину нагрузки и модули упругости стержней, выбирая из соображений прочности и жесткости оптимальный вариант, но область применения такой формулы все-таки ограничена конкретной конструкцией.



Рис. 3. Автомобильный мост в штате Вашингтон, Сиэтл, США

Значительно интереснее формулы, которые можно применять для целого класса конструкций. Такие формулы можно получить для регулярных систем, обладающих некоторой симметрией и периодичностью структуры. Элементом периодичности может быть панель фермы или группа стержней. В более сложных случаях в ферме могут быть выделены несколько независимых групп периодичности, например, в рамках группы панелей по длине пролета и панели по высоте. Тогда индукция проводится по двум натуральным числам и сфера применения полученных формул становится еще шире.

Методам расчета регулярных стержневых систем (в основном численным) посвящены монографии профессора Игнатъева В.А [35, 22]. Операторы системы компьютерной математики, применительно к решениям задач механики, описаны в [55, 57, 25, 24].

Методы нахождения усилий в стержнях плоских статически определимых рам описаны во множестве учебников по теоретической механике [55, 57, 31], строительной механике [76] и сопротивлению материалов [3, 59].

Рассмотрим основы некоторых методов на примере решения задач.

2. Метод вырезания узлов

Одним из наиболее распространенных методов определения усилий в стержнях плоских и пространственных ферм является метод вырезания узлов. Этот метод положен в основу компьютерной программы (с. 40), по которой составлялся данный справочник. Рассмотрим ферму 4.

Задача 1. Плоская статически определимая балочная ферма имеет две опоры, одна из которых является подвижным шарниром, другая — неподвижным (рис. 4). К узлам верхнего пояса приложены вертикальные силы $P = 1$ кН, $a = 3$ м, $h = 2$ м. Найти усилия в стержнях фермы.

Решение

1. Определяем реакции опор фермы². Отбрасываем связи (опорные шарниры) и заменяем действие этих связей реакциями X_B , Y_A , Y_B (рис. 5). Выбираем систему координат с началом в точке А. Составляем три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= X_B = 0, \\ \sum M_A &= 2aY_B - aP - 2aP = 0, \\ \sum M_B &= -2aY_A + 2aP + aP = 0.\end{aligned}$$

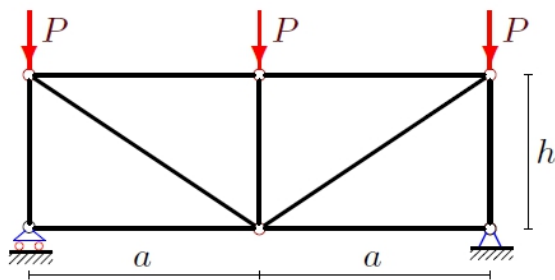


Рис. 4.

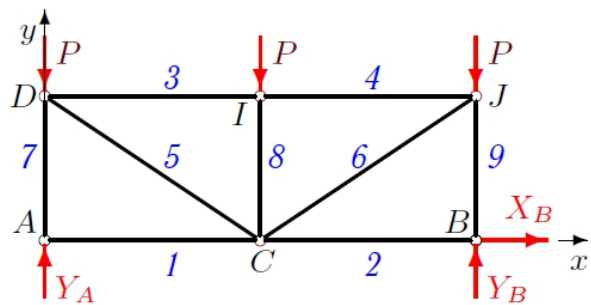


Рис. 5.

Решение системы уравнений дает реакции опор: $X_B = 0$, $Y_A = Y_B = 3P/2 = 1,5$ кН. Для проверки вертикальных реакций можно составить сумму проекций на ось y всех сил, действующих на ферму: $\sum Y_i = Y_A + Y_B - 3P = 0$. Уравнение удовлетворяется тождественно. Реакции Y_A и Y_B найдены верно³. Эта задача простейшая, и, безусловно, ее решить можно еще проще, исходя из симметрии конструкции и нагрузки. Ответ тут очевиден.

2. Почти во всех руководствах по методу вырезания узлов рекомендуется начать процедуру составления уравнений с узла, который соединен с двумя стержнями с неизвестными усилиями. В этом случае получится система двух уравнений с двумя неизвестными усилиями в стержнях. Для начала мы так и сделаем, однако в дальнейшем покажем, что такой упрощенный подход неудобен. Известны фермы, в которых все узлы соединены с тремя и более стержнями. Поэтому значительно лучше составить все уравнения равновесия для всех внутренних узлов фермы и далее решать эту систему. При этом в систему войдут, конечно, и реакции опор.

Итак, определяем усилия S_i , $i = 1, \dots, 9$, в стержнях фермы. Стержни можно пронумеровать (рис. 5)⁴.

² Считается, что определение усилий в стержнях фермы надо начинать с определения реакций опор. Однако это не всегда верно. В частности, если ферма внешне статически неопределима, то усилия в стержнях включаются в общую систему уравнений равновесия узлов фермы. Иногда, для консольных ферм, реакции опор можно вообще не определять и найти усилия в стержнях методом сечений, рассматривая ту часть отсеченной фермы, которая не содержит реакций опор.

³ Более надежная проверка, контролирующая также и реакцию X_B , состоит в проверке выполнения уравнения моментов относительно какой-либо точки, не обязательно совпадающей с узлом и желательной не лежащей на линиях действия реакций опор. Здесь это может быть, например, средний узел верхнего пояса.

⁴ В строительной механике в балочных фермах стержни часто обозначают с немецкой традицией. Стержни верхнего пояса

Усилия S_1, S_7 найдем из условия равновесия узла A (рис. 6), а усилия S_2, S_6 — из условия равновесия узла B (рис. 7). Реакции всех рассеченных стержней направляем из узла. Это соответствует принятому соглашению, согласно которому в растянутых стержнях усилия положительные, а в сжатых — отрицательные.

При этом на рисунках выделенных узлов каждая реакция (усилие) появляются дважды и направления этих векторов противоположные. Заметим, что здесь мы целенаправленно не помечаем усилия векторами. Иначе пришлось бы к одному узлу прикладывать вектор, например, \vec{S}_k , а к другому (на противоположном конце стержня) \vec{S}'_k и далее пояснять: $\vec{S}_k = -\vec{S}'_k$. Это внесет лишние переменные со штрихом и ненужную путаницу в решение. Проще считать, что на чертежах подписаны значения проекций усилий стержней на ось, направленную из узла.

Вырезаем последовательно узлы I (рис. 8), C (рис. 9), B (рис. 10), J (рис. 11).

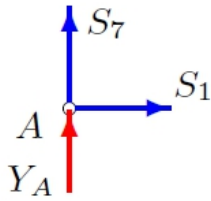


Рис. 6.

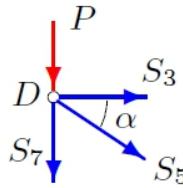


Рис. 7.

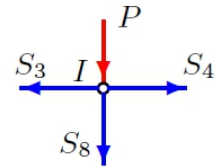


Рис. 8.

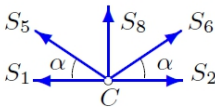


Рис. 9.

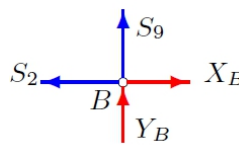


Рис. 10.

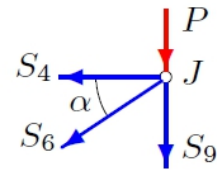


Рис. 11.

Записываем уравнения равновесия узла A

$$\sum X_i = S_1 = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = S_7 + Y_A = 0. \quad (2)$$

Уравнения равновесия узла D :

$$\sum X_i = S_3 + S_5 \cos \alpha = 0, \quad (3)$$

$$\sum Y_i = -S_7 - P - S_5 \sin \alpha = 0, \quad (4)$$

где $\sin \alpha = h/c$, $\cos \alpha = a/c$, $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ — длина раскосов.

Уравнения равновесия узла I :

$$\sum X_i = -S_3 + S_4 = 0, \quad (5)$$

$$\sum Y_i = -S_8 - P = 0. \quad (6)$$

Уравнения равновесия узла C :

$$\sum X_i = -S_1 + S_2 - S_5 \cos \alpha + S_6 \cos \alpha = 0, \quad (7)$$

$$\sum Y_i = S_8 + S_5 \sin \alpha + S_6 \sin \alpha = 0. \quad (8)$$

(*ober* — верхний): $S_8 = O_1$, $S_9 = O_2$, нижнего пояса (*untere* — нижний): $S_1 = U_1$, $S_2 = U_2$, раскосы (*diagonale* — раскос или диагональ): $S_4 = D_1$, $S_6 = D_2$, стойки (*vertikal* — стойка или вертикаль): $S_3 = V_1$, $S_5 = V_2$, $S_7 = V_3$.

Уравнения равновесия узла B :

$$\sum X_i = -S_2 + X_B = 0, \quad (9)$$

$$\sum Y_i = S_9 + Y_B = 0. \quad (10)$$

Уравнения равновесия узла J :

$$\sum X_i = -S_4 - S_6 \cos \alpha = 0, \quad (11)$$

$$\sum Y_i = -S_9 - S_6 \sin \alpha - P = 0. \quad (12)$$

Решаем систему уравнений (1–12), в число неизвестных которой включаем и реакции опор (для проверки), и находим: $S_1 = S_2 = 0$, $S_3 = S_4 = -Pa/(2h) = -0,75$ кН, $S_5 = S_6 = Pc/(2h) = 0,90$ кН, $S_7 = S_9 = -3P/2 = -1,50$ кН, $S_8 = -P = -1$ кН, $X_B = 0$, $Y_A = Y_B = 3P/2 = 1,50$ кН.

3. Метод сечений

Другой известный метод определения усилий в стержнях предложил в 1882 г. Август Риттер. Этот метод еще называют методом сечений, так как усилия в стержнях находятся после рассечения фермы на две части. При этом отсекаемая часть должна содержать по крайней мере один стержень, а сечение выбирается так, что оно пересекает три (не больше и не меньше) стержня фермы и делит ее на две части. По сравнению с методом вырезания узлов метод сечений имеет ограничения в применении. Не всякий стержень входит в требуемое сечение. Поэтому как правило метод сечений дополняется методом вырезания узлов.

Для определения усилий S_1 , S_3 , S_5 используем метод Риттера⁵. Произведем сечение I–I (рис. 12).

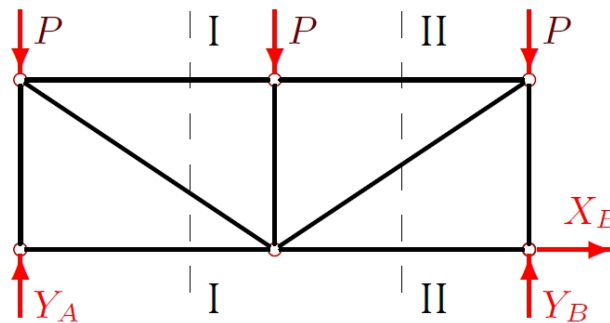


Рис. 12.

Отбрасываем правую часть фермы (рис. 13). Действие рассеченных стержней заменяем силами, направленными в сторону сечения. Выбор направлений реакций обеспечивает принятое ранее правило. Сжатые стержни имеют отрицательные усилия, растянутые — положительные.

Рассматриваем равновесие оставшейся левой части, состоящей из одного вертикального стержня. Находим моментные точки R_1 , R_3 на пересечениях линий действия усилий в сечении. Обозначать эти точки можно произвольно, но для определенности лучше именовать их номером стержня, усилие которого не проходит через эту точку и подлежит определению. Точек Риттера может быть две (как в этом примере) или три. Точек Риттера не существует для диагонального стержня, входящего в сечение с параллельными стержнями. Составляем уравнения моментов относительно найденных точек:

$$\sum M_{R_3} = -hS_3 + aP - aY_A = 0,$$

$$\sum M_{R_1} = hS_1 = 0.$$

Решая уравнения, получаем $S_1 = 0$, $S_3 = -Pa/(2h) = -0,75$ кН. Результаты, как и следовало ожидать, совпали с решением системы уравнений (1–12) метода вырезания узлов, с. 29.

⁵ August Ritter (1826–1906) — немецкий механик.

Для стержня 5 точки Риттера нет, так как стержни 1 и 3 параллельны. В этом случае усилие S_5 можно найти из уравнения проекций на ось, перпендикулярную параллельным стержням⁶.

$$\sum Y_i = -S_5 \sin \alpha + Y_A - P = 0. \quad (13)$$

Отсюда $S_5 = (Y_A - P) / \sin \alpha = Pc / (2h) = 0,90$ кН.

Для определения усилий S_2, S_6, S_4 произведем сечение II-II (рис. 12, 14).

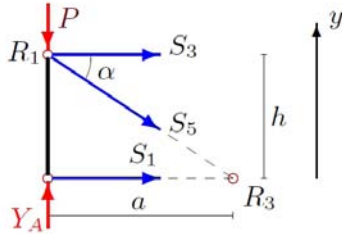


Рис. 13.

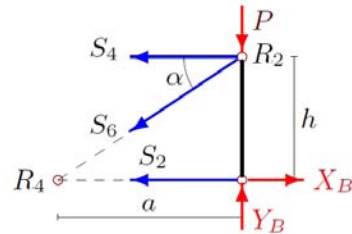


Рис. 14.

Отбрасываем левую часть фермы (рис. 14) и рассматриваем равновесие правой части фермы, фактически равновесие одного стержня (правой стойки) под действием реакций стержней S_2, S_4, S_6 , силы P и найденных заранее реакций опор X_B и Y_B . Разрезанные стержни заменяем усилиями, направленными по стержням в сторону сечения. Составляем уравнения моментов относительно найденных точек Риттера:

$$\sum M_{R_2} = -hS_2 + hX_B = 0,$$

$$\sum M_{R_4} = hS_4 + aY_B - aP = 0.$$

Решая уравнения, получаем $S_2 = 0, S_4 = -Pa / (2h) = -0,75$ кН.

Реакцию раскоса 6 находим из уравнения проекций на ось y :

$$\sum Y_i = -S_6 \sin \alpha + Y_B - P = 0. \quad (14)$$

Получаем $S_6 = (Y_B - P) / \sin \alpha = Pc / (2h) = 0,90$ кН.

Остаются неопределенными усилия для стоек 7, 8 и 9. Но для них нет сечения Риттера. Это недостаток метода. В таком случае усилия необходимо определить иначе.

1. В полураскосной ферме (рис. 15), можно провести нестандартное сечение, пересекающее четыре, а не три, как это требуется в алгоритме Риттера, стержня, рис. 15. Сечение проходит через стержни 1-4, делит ферму на две части, но при этом усилия трех стержней 4, 3 и 2 проходят через точку R_1 , которая таким образом является моментной точкой для усилия в стержне 1 верхнего пояса. Как всегда, можно рассматривать как левую часть фермы, так и правую, рис. 16. Уравнение для определения усилия S_1 имеет простой вид

$$\sum M_{R_1} = -S_1 2h - Y_A a = 0.$$

2. В ферме на рисунке 17 раскосы двух соседних панелей сходятся в одном узле. Если выполнить сечение по второй панели, то, несмотря на то, что сечение пересекает четыре стержня, точка Риттера для стержня 1 существует (рис. 18). Уравнение для определения усилия S_1 имеет вид

$$\sum M_{R_1} = -S_1 h - Y_A 2a + P 2a + Pa = 0.$$

Заметим, что в фермах такого типа в точке Риттера может сходитьсь и большее число стержней.

⁶ В некоторых случаях используется вариант метода сечений, когда сечение проводят через несколько стержней, три из которых имеют неизвестные усилия, и составляются три произвольных уравнения равновесия. Такой вариант решения имеет право на существование, однако тут теряется основное свойство метода Риттера — каждое усилие находится независимо от других.

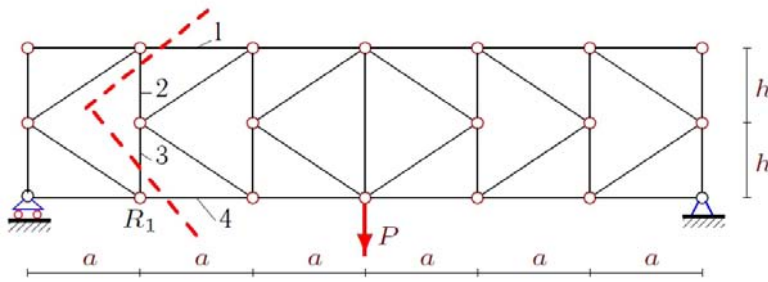


Рис. 15.

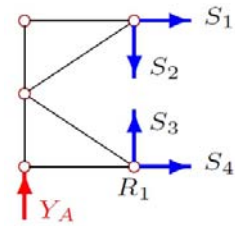


Рис. 16.

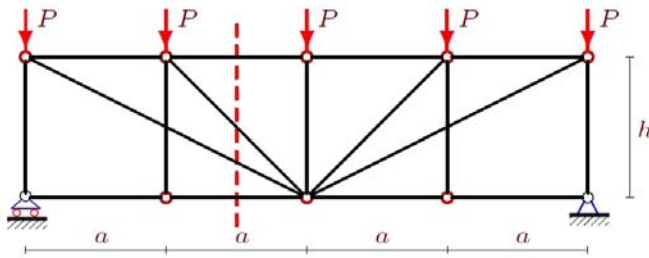


Рис. 17.

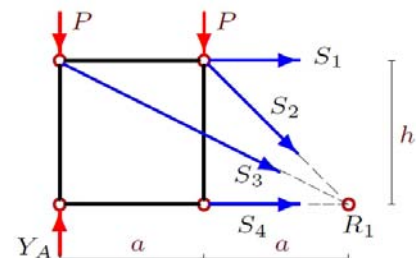


Рис. 18.

4. Принцип возможных перемещений

В практике встречаются случаи, когда определение реакций опор фермы отдельно от расчета усилий в стержнях невозможно. Это так называемые внешне статически неопределимые фермы. Для решения задачи не обязательно рассматривать равновесие всех узлов, особенно если требуются усилия не во всех стержнях. Весьма эффективным в таких задачах является применение принципа возможных перемещений. Вариант этого принципа в скоростях для систем с идеальными связями имеет форму

$$\sum_k \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k = 0, \tag{15}$$

где \vec{v}_k — возможная скорость точки приложения силы \vec{F}_k .

Если ферму освободить от связи, реакцию которой необходимо найти, то ферма превращается в механизм с одной степенью свободы, и узлы приобретают некоторые скорости. Оставшиеся опоры или неподвижны и их реакции таким образом не войдут в сумму (15), или являются идеальными связями. Работа реакций идеальных связей на любых возможных перемещениях равна нулю. В задачах о фермах это подвижные шарниры без трения. Реакции их перпендикулярны возможным перемещениям (или скоростям, применительно к форме записи (15)).

Связь, от которой освобождается конструкция, не обязательно внешняя. Это может быть и стержень, усилие в котором определяется.

Покажем сначала применение метода к простейшей задаче по определению усилия в стержне 6 фермы на рисунках 4 и 5, с. 27. Безусловно, оптимальным способом определения усилия S_6 является уже описанный метод Риттера, поэтому здесь будет просто дана иллюстрация метода.

Освобождаем ферму от стержня 6, заменяя действие стержня на узлы реакциями по его концам. Придерживаясь принятого правила направлять реакции из узлов, приложим силы S_6 , направленные во взаимно противоположных направлениях (рис. 21). Укажем возможные скорости узлов, начиная, например, с узла J (обозначения узлов принято то же, что и в методе вырезания узлов).

Узел B неподвижен. Скорость узла J должна быть перпендикулярна стойке. Обозначим горизонтальную скорость этого узла v . Направление и величина этой скорости произвольные (вектор скорости можно направить и влево). Аналогично, согласуясь с законами кинематики⁷, укажем ско-

⁷ Здесь используется теорема о проекциях: проекции скоростей точек неизменяемого отрезка на ось отрезка равны.

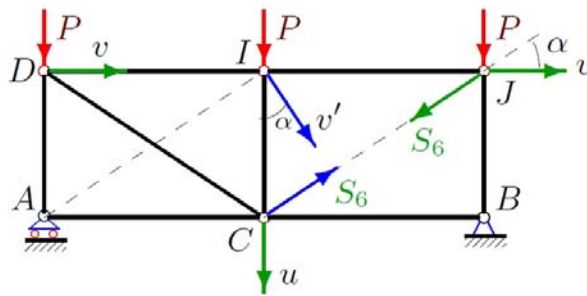


Рис. 19.

рости других узлов. Имеем при этом кинематические соотношения:

$$v' \sin \alpha = v, \quad v' \cos \alpha = u. \quad (16)$$

Опорные узлы A и B остаются неподвижными.

Принцип возможных перемещений в форме возможных мощностей имеет вид

$$-S_6 v \cos \alpha - S_6 u \sin \alpha + P v' \cos \alpha = 0. \quad (17)$$

Две силы P , приложенные к боковым стойкам работы не совершают, скорости точек их приложения перпендикулярны силам. В уравнение входит только одна внешняя сила — средняя в пролете.

Учитывая, что, согласно (16) $v' \sin \alpha = v$, $u = v' \cos \alpha = v \cos \alpha / \sin \alpha$, и сокращая (17) на $v \neq 0$, получаем $S_6 = P / (2 \sin \alpha)$. Так как $\sin \alpha = h/c$, решение совпадает с полученным ранее на с. 29 и 30.

В следующей задаче с помощью принципа возможных перемещений определяются реакции опор внешне статически неопределимой фермы.

Задача 2. Ферма имеет три опоры, одна из которых является неподвижным шарниром, две другие — подвижные шарниры (рис. 20). Верхний пояс фермы загружен силами P . Найти реакции опор фермы.

Решение

Для решения задачи используем принцип возможных перемещений. Освобождаем ферму от средней опоры, заменяя ее действие неизвестной вертикальной реакцией R_B . Узлы фермы приобретают некоторые скорости (рис. ??).

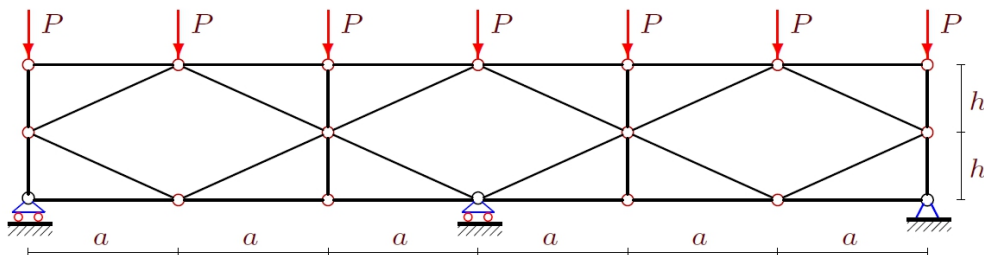


Рис. 20.

Часть узлов (нечетные по нижнему и верхнему поясу, считая от левой подвижной опоры) остаются неподвижными. Очевидна связь скоростей: $v/h = u/a$. Уравнение принципа возможных перемещений имеет вид:

$$-2Pu + Pu + uR_B = 0.$$

Отсюда находим $R_B = P$. Реакции боковых опор находим из уравнения проекций

$$\sum Y_i = Y_A + R_B + Y_C - 7P = 0.$$

Учитывая симметрию задач, получаем: $Y_A = Y_C = 3P$.

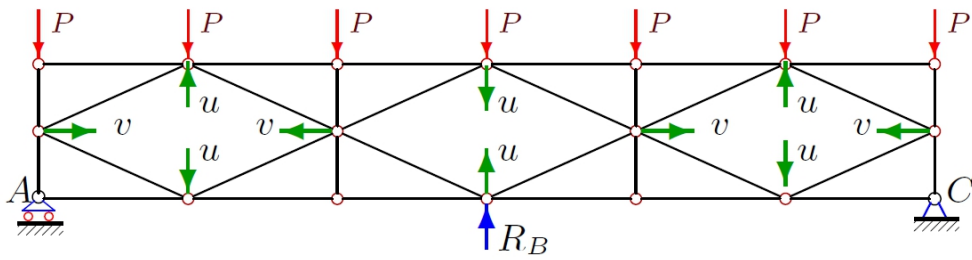


Рис. 21.

5. Метод замены стержней

В тех случаях, когда требуется найти усилие в каком-то одном стержне, а метод вырезания узлов и метод Риттера не дают решения или решение получается громоздким, применяют достаточно редкий метод⁸, берущий свое начало из метода сил строительной механики.

Метод состоит в замене одного стержня (например, стержень k), усилие в котором надо определить, другим, фиктивным, (стержень n), усилие которого находится проще. Вместо стержня k к шарнирам его крепления прикладываются единичные силы по направлению этого стержня и определяются усилия S_n . При этом на основании линейности задачи принято решение представлять в виде суммы

$$S_n = S_n^{(1)} S_k + S_n^{(P)} = 0. \tag{18}$$

Здесь обозначено: $S_n^{(1)}$ — усилие в новом стержне от действия только единичных сил, приложенных вместо удаленного стержня k ; S_k — искомое усилие; $S_n^{(P)}$ — усилие в новом стержне от действия только внешних сил, приложенных к ферме. Стержень n фиктивный, именно поэтому $S_n = 0$. Уравнение вида (18) называется каноническим уравнением метода сил. Решение его дает искомую величину усилия $S_k = -S_n^{(P)} / S_n^{(1)}$.

Таким образом фактически дважды решается задача об усилиях в ферме с другой решеткой. Один раз к ферме вместо удаленного стержня прикладываются единичные силы (никаких других внешних сил нет) и определяется усилие $S_n^{(1)}$ в новом стержне, другой раз определяется усилие $S_n^{(P)}$ только от внешних сил.

Основную идею метода можно показать на уже рассмотренной ферме (рис. 4, с. 27). Пусть заменяемый стержень с искомым усилием $k = 6$, новый стержень $n = 10$ (рис. 22).

Найти усилие $S_{10}^{(P)}$ проще всего, составив по методу Риттера сумму проекций всех сил, приложенных к правой части фермы, отсеченной по второй панели (рис. 23).

Соответствующее уравнение имеет вид

$$\sum Y_i = Y_B - P + S_{10}^{(P)} \sin \alpha = 0.$$

Очевидно, $Y_B = 3P/2$. Отсюда $S_{10}^{(P)} = -P/(2 \sin \alpha)$. Так же методом Риттера (рис. 24) находится и усилие $S_{10}^{(1)} = 1$. Реакции опор при таком нагружении всегда равны нулю (на рисунке 24 они даже не показаны). Каноническое уравнение (18) применительно к этой задаче имеет вид

$$S_{10} = S_{10}^{(1)} S_6 + S_{10}^{(P)} = 0. \tag{19}$$

Отсюда получаем усилие

$$S_6 = -S_{10}^{(P)} = P/(2 \sin \alpha).$$

Задача 3. Дана ферма, состоящая из девяти стержней (рис. 25), на которую действует вертикальная нагрузка P . Считать, что тонкие стержни фермы не пересекаются, располагаясь в разных плоскостях. Найти усилия в стержнях 7 и 9.

Решение

⁸ Метод Геннеберга. Ernst Lebrecht Henneberg (1850–1933) — немецкий математик и механик.

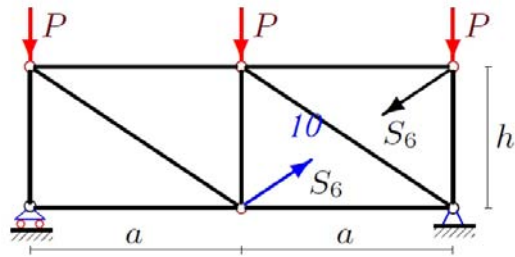


Рис. 22.

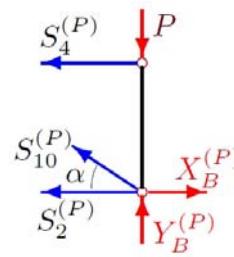


Рис. 23.

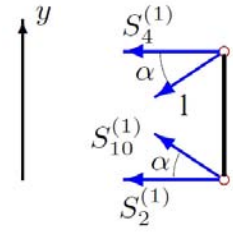


Рис. 24.

Ферма статически определимая и содержит шесть узлов и девять стержней. Необходимое соотношение выполнено: двенадцать уравнений равновесия узлов (по два уравнения в проекциях на каждый узел) дают систему для двенадцати неизвестных, включая три реакции опоры.

Метод вырезания узлов в простом варианте с последовательным рассмотрением равновесия узлов, начиная с узла, к которому прикреплены два стержня с неизвестными усилиями, здесь не проходит. В ферме нет ни одного такого начального узла.

Метод сечений также не годится для этой задачи. Сечений Риттера, пересекающего три стержня, включая стержни 7 и 9, здесь нет.

Рассмотрим метод Геннеберга применительно к замене сразу двух стержней.

Стержни 7 и 9 заменим на два фиктивных горизонтальных стержня, которые обозначим n и t (рис. 26).

Процедура замены неоднозначная, всегда есть несколько вариантов, из которых надо выбрать наиболее простые. При этом полученная ферма должна быть кинематически неизменяемой. Идея метода состоит в подборе таких усилий S_7 и S_9 , приложенных по концам удаленных стержней по направлению этих стержней, чтобы усилия во введенных фиктивных стержнях были равны нулю.

Число уравнений совпадает с числом замененных стержней.

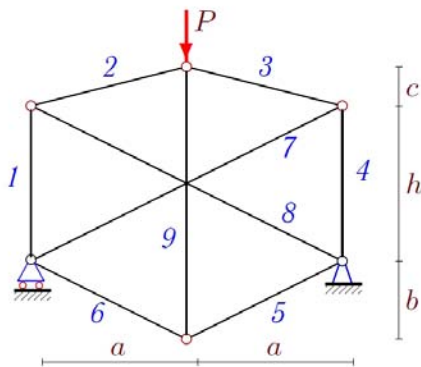


Рис. 25.

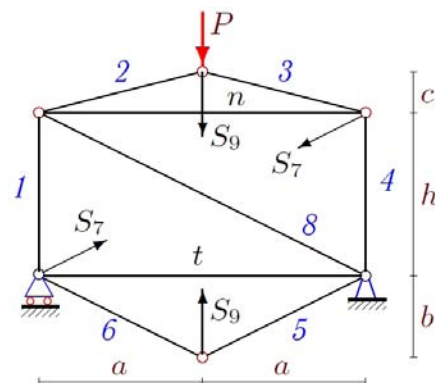


Рис. 26.

Пользуясь линейностью задачи, записываем систему уравнений

$$\begin{aligned} N^{(P)} + n^{(7)} S_7 + n^{(9)} S_9 &= 0, \\ T^{(P)} + t^{(7)} S_7 + t^{(9)} S_9 &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Каждое из уравнений этой системы означает равенство нулю усилия в одном из фиктивных стержней. Введены обозначения: $N^{(P)}$, $T^{(P)}$ — усилия в фиктивных стержнях только от действия внешней нагрузки на ферму, $n^{(7)}$, $n^{(9)}$, $t^{(7)}$, $t^{(9)}$ — усилия в фиктивных стержнях только от действия единичных безразмерных сил, приложенных к узлам их крепления по направлению удаленных стержней 7 и 9. При нахождении этих усилий внешние нагрузки не прикладываются.

Найдем усилия $N^{(P)}$ и $T^{(P)}$. Воспользуемся тем, что для стержня n есть сечение Риттера (рис. 27). Точка Риттера R_1 лежит на пересечении усилий S_2 и S_4 (рис. 28). Относительно этой точки составляем сумму моментов:

$$\sum M_{R_1} = -2cN^{(P)} + aP = 0, \tag{21}$$

откуда $N^{(P)} = aP/(2c)$.

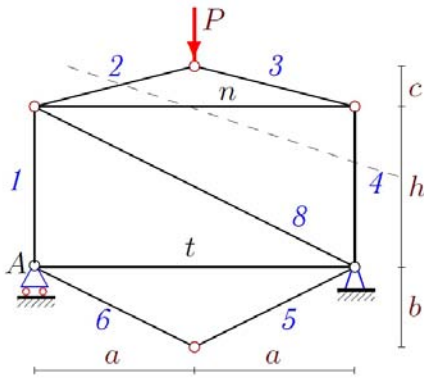


Рис. 27.

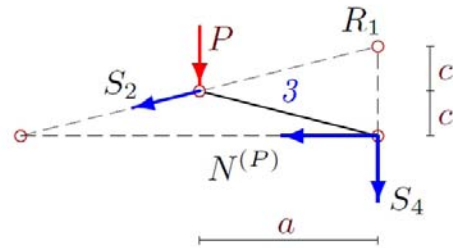


Рис. 28.

Усилие $T^{(P)}$ можно найти из условия равновесия опорного узла А (рис. 29). Уравнение равновесия в проекции на горизонтальную ось имеет вид

$$\sum X_i = T^{(P)} + S_6 \cos \beta = 0. \tag{22}$$

Так как по лемме о нулевых стержнях⁹ $S_6 = 0$, то и $T^{(P)} = 0$.

Для определения усилий в фиктивных стержнях от действия единичных безразмерных сил по направлению усилий в стойке 9 воспользуемся методом Риттера (рис. 30).

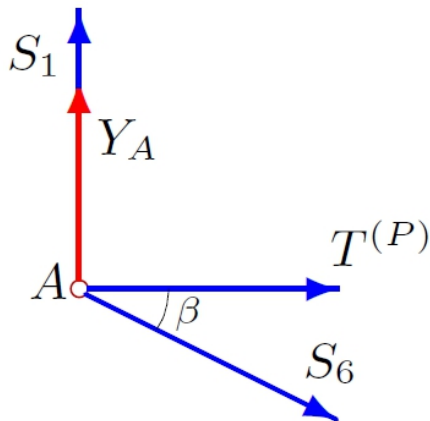


Рис. 29.

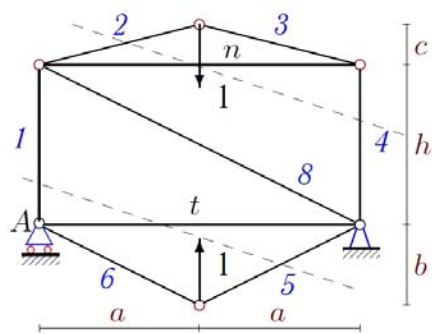


Рис. 30.

Рассмотрим сечение, пересекающее стержни 2, 4 и n . Сумма моментов относительно точки Риттера R_1 (рис. 31) аналогична сумме (21) для такого же сечения

$$\sum M_{R_1} = -2cn^{(9)} + a \cdot 1 = 0, \tag{23}$$

откуда $n^{(9)} = a/(2c)$.

⁹ Лемма. Если к незагруженному узлу присоединены два только стержня, то усилия в них равны нулю.

Рассмотрим сечение, пересекающее стержни 1, 5 и t (рис. 30). Точка Риттера R_2 лежит на пересечении усилий S_1 и S_5 (рис. 32). Под действием двух единичных противоположно направленных сил ферма уравновешена, реакции опор равны нулю. Имеем уравнение

$$\sum M_{R_2} = -2bt^{(9)} + a \cdot 1 = 0, \quad (24)$$

откуда $t^{(9)} = a/(2b)$.

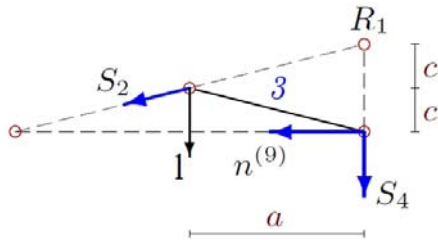


Рис. 31.

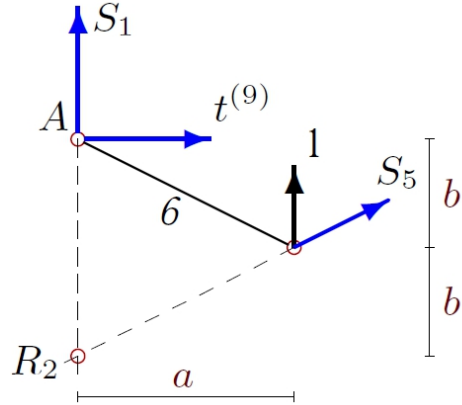


Рис. 32.

Для определения усилий в фиктивных стержнях от действия единичных сил по направлению усилия в стержне 7 (рис. 33) рассмотрим равновесия узлов A и C (рис. 34).

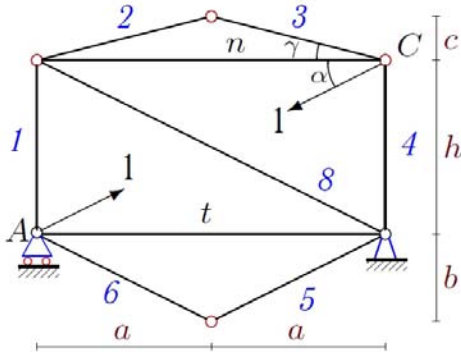


Рис. 33.

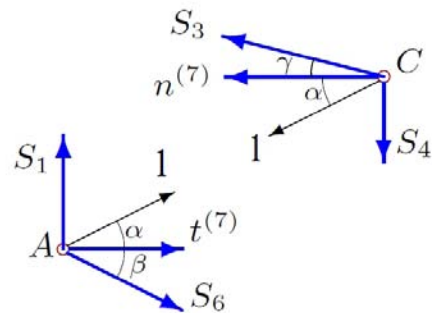


Рис. 34.

В проекции на горизонтальную ось для сил, приложенных к узлу A имеем

$$\sum X_i = t^{(7)} + S_6 \cos \beta + 1 \cdot \cos \alpha = 0. \quad (25)$$

Учитывая, что как и в случае (22) $S_6 = 0$, имеем решение $t^{(7)} = -1 \cdot \cos \alpha$, где $\cos \alpha = 2a/\sqrt{h^2 + 4a^2}$. Аналогично, из равновесия узла C

$$\sum X_i = -n^{(7)} - S_3 \cos \gamma - 1 \cdot \cos \alpha = 0. \quad (26)$$

С учетом $S_3 = 0$ получаем $n^{(7)} = -1 \cdot \cos \alpha$.

Таким образом, все коэффициенты в системе уравнений (20) найдены. Перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} aP/(2c) - S_7 \cos \alpha + S_9 a/(2c) &= 0, \\ -S_7 \cos \alpha + S_9 a/(2b) &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

Решение этой системы дает искомые усилия

$$S_7 = P\sqrt{h^2 + 4a^2}/(4(c - b)), \quad S_9 = Pb/(c - b).$$

При $c = b$ ферма становится кинематически изменяемой¹⁰, определитель обращается в ноль [55].

6. Кинематически изменяемые фермы

Полноценный анализ схемы фермы, особенно на этапе проектирования, предполагает помимо анализа статической определимости, исследование кинематической изменяемости конструкции.

Необходимым условием статической определимости фермы и ее кинематической неизменяемости является соотношение числа внутренних шарниров и стержней, включая опорные, один к двум. Иначе говоря, число уравнений равновесия узлов (по два уравнения на узел для плоских систем) должно быть равно числу неизвестных усилий. Это условие проверить просто¹¹. Труднее оценить правильность структуры — достаточный признак неизменяемости конструкции.

В ферме недопустима как изменяемость, так и мгновенная изменяемость.

Существуют изменяемые фермы, не попадающие под три известных критерия¹². В ферме на рисунке 35 необходимое соотношение числа стержней и узлов: шесть узлов и двенадцать стержней, включая четыре опорные (правый неподвижный опорный шарнир моделируется двумя стержнями, подвижные — одним). Однако ферма при $h_1 = h_2 = h$ изменяема. Приведена схема возможных скоростей узлов. Мгновенные центры расколов находятся в опорах фермы. Отсюда следует соотношение скоростей: $v/\sqrt{a^2 + h^2} = u/(2h)$.

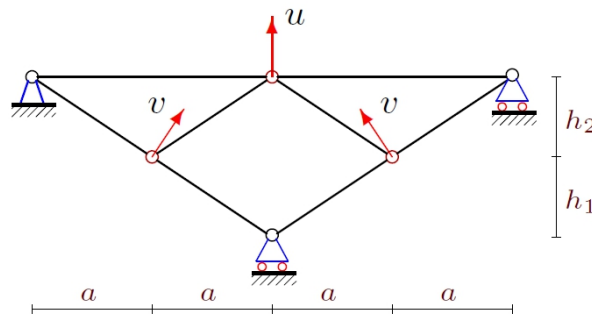


Рис. 35.

Определитель системы двенадцати (по числу стержней, включая четыре опорные) уравнений равновесия шести узлов фермы имеет вид

$$\det = \frac{4h_2^2 a^3 (h_1 - h_2)}{(a^2 + h_2^2)^2 (a^2 + h_1^2)}.$$

Как и ожидалось, при $h_1 = h_2$ определитель обращается в ноль.

Аналогичный случай изменяемости, не попадающий под известные критерии, проявляется в ферме на рисунке 25, с. 34. Ферма изменяема при $c = b$. Схема возможных скоростей узлов приведена на рисунке 36.

¹⁰ Доказательство на с. 38

¹¹ Однако, даже в книгах тут попадаются ошибки. В одном из лучших учебников по строительной механике Снитко Н. К. [76] в ферме с ромбической решеткой на с. 57, рис. 58(г), число шарниров 30, а число стержней вместе с тремя опорными 57. Такая же ошибка допущена в учебнике [60] на с. 237, рис. IX.7 (д), где число стержней 33, а число стержней вместе с опорными 65.

¹² Известны три основных критерия изменяемости: [67].

1. Если два диска соединены между собой тремя параллельными стержнями, то полученная система изменяема или мгновенно изменяема. Под диском можно понимать или отдельный стержень или неизменяемую часть фермы, например, жесткий треугольник.

2. Если два диска соединены между собой тремя стержнями, пересекающимися в одной точке, то полученная система изменяема или мгновенно изменяема.

3. Если три диска соединены тремя шарнирами, лежащими на одной прямой, то такая система мгновенно изменяема.

Стержень 3 получает вращательное движение вокруг мгновенного центра скоростей P с угловой скоростью $u/(2b) = v/\sqrt{a^2 + b^2}$, стержни 5 и 6 вращаются вокруг опор, стержень 7 движется поступательно.

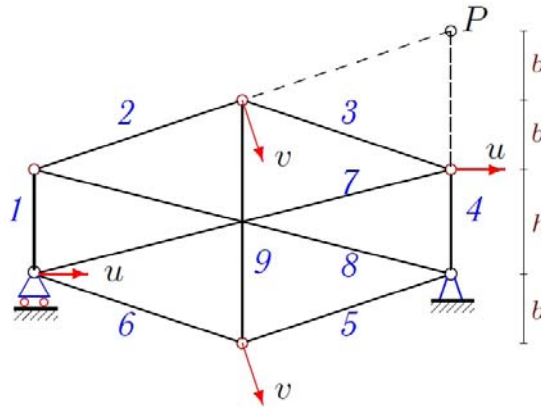


Рис. 36.

Определитель системы уравнений равновесия узлов этой фермы имеет вид

$$\det = \frac{8a^5(b-c)}{(a^2+c^2)(a^2+b^2)(4a^2+h^2)}.$$

При $b = c$ определитель обращается в ноль.

При расчете изменяемость фермы проявляется в равенстве нулю определителя системы уравнений равновесия всех узлов. Это надежный критерий изменяемости, однако, на практике его использовать неудобно. Во-первых, при численном расчете равенство нулю определителя может быть скрыто за погрешностями счета, особенно при большом числе стержней. Во-вторых, расчет при одних размерах фермы может дать ненулевой определитель, а при других размерах, но с той же структурой, определитель обратится в ноль. Поэтому существуют еще кинематические критерии, проверяющие возможность существования допустимых скоростей узлов, свидетельствующих об изменяемости фермы. В [68] И.М. Рабинович предложил критерий изменяемости решетчатой фермы, основанный на построении плана скоростей узлов. На практике проверка изменяемости сводится к поиску замкнутой цепи из стержней, свидетельствующей о наличии скоростей узлов, находящихся в шарнирах этой цепи.

На рисунке 37 приведена ферма с решетчатой структурой, содержащая по горизонтали n ячеек периодичности (панелей длиной a) и m панелей высотой h по вертикали.

Если закрепить эту ферму на одной неподвижной опоре и одной подвижной, то ферма будет один раз статически неопределимой, так как число узлов в ней $2(n+m)$, а число стержней $4(n+m)+1$, включая три опорные. Однако, при определенном соотношении чисел m и n эта ферма изменяема. Схема возможных скоростей узлов фермы при $n = 6$ и $m = 3$ приведена на рисунке. Предполагается, что опоры расположены в угловых узлах конструкции.

Очевидно, эта схема скоростей не единственная. Вторая замкнутая цепь симметрична приведенной относительно горизонтальной прямой по середине фермы. Заметим, что замкнутая цепь, свидетельствующая об изменяемости фермы, напоминает траекторию шарика, запущенного в коробке и отскакивающего от ее сторон. Здесь, правда, не выполняется правило о равенстве углов падения и отражения, но если шарик попадает в угол, то траектория обрывается, а в случае цепи стержней в ферме, это показывает, что выбранная цепь не замкнута. Для изменяемости фермы достаточно одной цепи.

В отличие от работы [68], где план скоростей строится на повернутых на 90° векторах скоростей, на рисунке 37 направления скоростей не изменены.

Легко показать что данная ферма неизменяема, если числа n и m взаимно просты.

В учебниках [10, 11] ошибочно приведена в качестве примера подобная же ферма при $m = 2$, $n = 8$, т. е. кинематически изменяемая, хотя и содержащая один лишний стержень. На рисунке 38 при $n =$

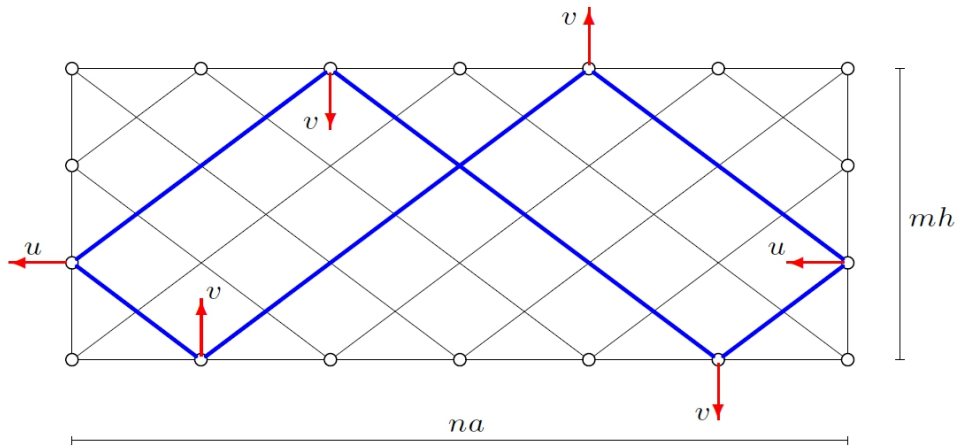


Рис. 37.

6 приведена схема возможных скоростей ее узлов. Очевидно, такая же схема скоростей будет и при любом другом четном числе панелей n . Легко обнаружить замкнутую цепь стержней, указывающую на изменяемость конструкции. Эта цепь соединяет подвижные шарниры.

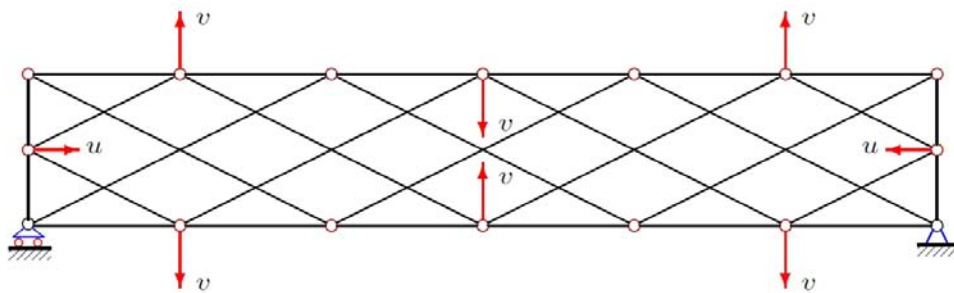


Рис. 38. Изменяемая статически неопределимая ферма, $m = 2, n = 6$

В [?] дан аналитический расчет этой фермы для произвольного нечетного числа панелей.

Похожий критерий кинематической изменяемости обнаруживается при рассмотрении некоторых других фермах. В этих фермах при определенном числе панелей содержится *незамкнутая* цепь стержней с шарнирами, которые соединяют не более четырех стержней (два стержня в цепи и один-два на контуре). В ферме на рисунке 39 это цепь 8 - 2 - 11 - 5 - 14 - 16. Стержни 1-2, 8-1, 2-1 вращаются вокруг шарнира 1 левой опоры (сама катковая опора неподвижна), стержни 2-11, 5-11 и 5-14 движутся поступательно. Стержень 14-16 вращается вокруг мгновенного центра скоростей 15. Отсюда вытекает и соотношение между скоростями $v/h = u/a$. Таким образом только шесть шарниров имеют виртуальную скорость, остальные — неподвижны. Наличие указанной схемы уже само по себе является доказательством кинематической изменяемости фермы. Но для того, чтобы придать найденному случаю статус критерия, можно выполнить обобщение, высказав утверждение, что *если в ферме имеется цепь, проходящая через шарниры, к которым присоединены не принадлежащие цепи и лежащие на одной прямой стержни, то ферма кинематически изменяема*.

Статическую противоречивость фермы с такой цепью, приводящую к равенству нулю определителя системы уравнений равновесия узлов, подтверждают следующие простые рассуждения, которые можно проиллюстрировать на рассматриваемой ферме. Пусть, например, все узлы цепи, кроме узла 16 свободны от нагрузки. Если нагрузка на стержень имеет горизонтальную компоненту, то усилие в стержне 14 - 16 отлично от нуля. Исходя из леммы о нулевых стержнях¹³, усилие в стержне 8-2 равно нулю. Отсюда в стержне 2-11 также нет усилия. Последовательно рассматривая равновесие

¹³ См. примечание на с. 35.

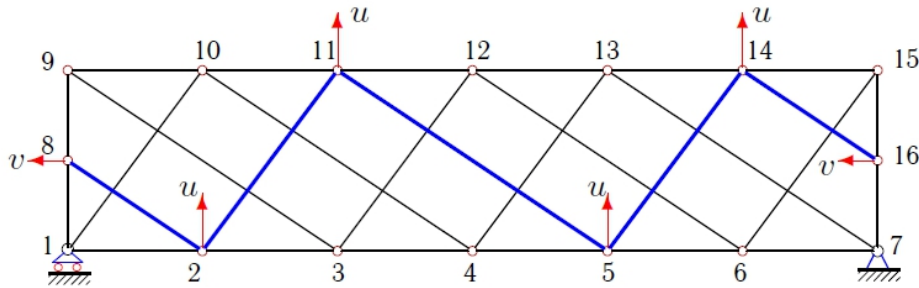


Рис. 39. Схема возможных скоростей узлов изменяемой фермы

всех незагруженных шарниров цепи, получаем, что и в стержне 14 -16 усилие также рано нулю, что противоречит условию равновесия узла 16. В более общем случае, не накладывая никаких условий на нагрузки на узлы цепи, можно просто для каждого узла, начиная с первого, составить уравнение равновесия в проекции на ось, перпендикулярную стержням поясов (узлы 2, 11, 5, 14) или стержням на боковых сторонах фермы (узел 8). При этом получится, что усилие в последнем стержне цепи можно найти как из решения задачи о равновесии узлов 8, 2, 11, 5, 15, так и из уравнения равновесия узла 16, что в силу независимости приложенных нагрузок приводит к противоречию.

7. Maple-программа для расчета усилий и прогиба

Все результаты в настоящем справочнике получены на основе программы, написанной на языке символьной математики Maple [55]¹⁴. В программе вычислялись усилия в стержнях фермы, рассчитывался прогиб. В блок-схеме программы условно выделим шесть основных блоков (рис. 40).

Приведем тексты кода на языке Maple на примере расчета фермы на рисунке 4, с. 27. В фермы n панелей в половине пролета, u узлов и m стержней, включая три опорные.

Начальные данные.

Здесь надо очистить память компьютера оператором `restart`, указать число циклов `Nmax`, объявить переменные `h`, `a` и `c` положительными. Оператор задания опций интерфейса `interface` с переменной `showassumed=0` включен в программу для того, чтобы у переменных с заранее заданными свойствами, например, `assume(h>0)`, не указывать их признак в виде волны: `h~`. Пакет `plots` загружен оператором `with` для вывода изображения фермы на экран.

Блок 1

```
> restart:interface(showassumed=0):
> assume(h>0):assume(a>0):assume(c>0):
> with(plots):
> Nmax:=10:
```

Ввод координат.

Этот блок входит первым в цикл `for n to Nmax do... od`, охватывающий блоки 1 – 5. В начале цикла задается число узлов (шарниров) и всех стержней. Считаются также и опорные стержни (здесь их три) и шарниры крепления опорных стержней на земле (равновесие этих шарниров не рассматривается). Указывается также число деформируемых стержней `ns`. Размеры `# a:=2:h:=3` на время счета закомментированы, все преобразования выполняются в символьной форме.

¹⁴ Сразу оговоримся — выбор именно этого математического пакета из множества других (Mathematica, MathCad, Maxima, Reduce и др.) случаен. Просто автору когда-то досталась простая версия этой продукции фирмы Waterloo Maple Inc, ввод данных и интуитивно понятный интерфейс показались удобными и изучать какие-то другие программы оказалось не нужным. В дальнейшем, конечно, автор писал некоторые программы на бесплатной и достаточно мощной системе Maxima, но всякие сопоставления всегда были в пользу Maple.

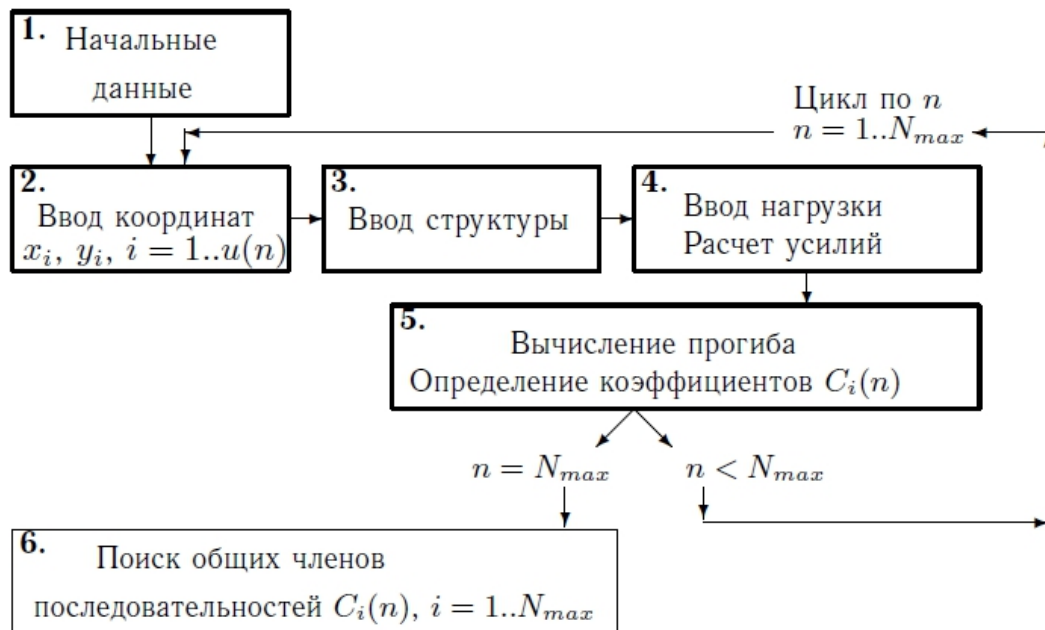


Рис. 40.

Для вывода на экран рисунка фермы требуются численные значения размеров. Координаты x и y узлов вводятся в цикле.

Блок 2

```

> u:=4*n+5: #Number of nodes with supports
> m:= 8*n+4: #Number of rods of a truss with supports
> ns:=m-3: # Number of deformable rods
> #a:=2:h:=3:#Truss panel length and height
> for i to 2*n+1 do
>   x[i]:=a*i-a:y[i]:=0:
>   x[i+2*n+1]:=a*i-a: y[i+2*n+1]:=h:# Node coord.
> od:
> x[4*n+3]:=0: y[4*n+3]:=-1:#Support nodes
> x[4*n+4]:=x[2*n+1]: y[4*n+4]:=-1:
> x[4*n+5]:=x[2*n+1]+1: y[4*n+5]:=0:
  
```

Ввод структуры.

Для того, чтобы указать порядок соединения стержней и узлов фермы, все стержни представляются в виде некоторых направленных векторов $N[i]$, $i = 1, \dots, n_s$. Направление стержней-векторов выбирается условно и никак не связано ни с усилием в стержне, ни со знаком усилия. Применительно к рассматриваемой фермы (рис. 4, с. 27) направления векторов приведены на рисунке 41. Координаты $N[i]$ содержат номера узлов по концам стержня.

Блок 3

```

> for i to 2*n do
>   N[i]:=[i, i+1]; #lower belt
>   N[i+2*n]:=[i+2*n+1, i+2*n+2]; #upper belt
  
```

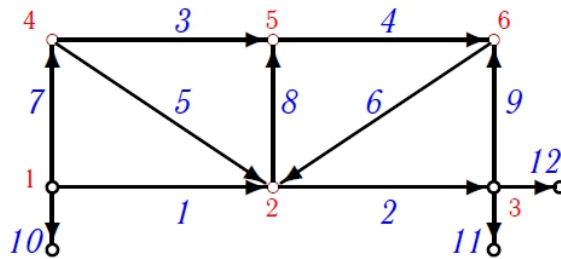


Рис. 41.

```

> od:
> for i to n do
>   N[i+4*n]:= [i+1, i+2*n+1]; #braces
>   N[i+5*n]:= [i+n, i+3*n+2]; #braces
> od:
> for i to 2*n+1 do
>   N[i+6*n]:= [i, i+2*n+1]; #pillars
> od:
> N[8*n+2]:= [1, 4*n+3]: #left support
> N[8*n+3]:= [2*n+1, 4*n+4]: #right support
> N[8*n+4]:= [2*n+1, 4*n+5]: #right support
> # Блок вывода изображения

```

Ввод нагрузки. Расчет усилий.

В системе Maple матричные и векторные величины лучше заранее объявить, задав их размеры, а при необходимости иногда и величины. По умолчанию объявленные величины имеют нулевые элементы. Матрица системы уравнений равновесия G квадратная размером $m \times m$. В матрицу вносятся направляющие косинусы стержней-векторов по координатам их концов. В нечетные строки вносятся косинусы с осью x , в четные — с осью y . Для этого вычисляются проекции стержней векторов на ось x : $Lxy[1] := x[N[i][2]] - x[N[i][1]]$ и на y : $Lxy[2] := y[N[i][2]] - y[N[i][1]]$.

Подстановка $\text{subs}(a^2+h^2=c^2, LL)$ используется для компактной записи результата. Если этого не сделать, то в ответе появятся корни $\sqrt{a^2+h^2}$, и выявить коэффициент при этом выражении будет затруднительно.

Условный оператор при заполнении матрицы ограничивает ввод в размеры матрицы.

Решение системы линейных уравнений удобнее всего в поставленной задаче искать методом обратной матрицы. Обратную матрицу в системе Maple можно найти просто $G1 := 1/G$. Есть и другие способы решения системы линейных уравнений и нахождения обратной матрицы с использованием специализированного пакета LinearAlgebra, входящего в состав Maple начиная с 6-й версии [40, 55].

В цикле `for i from 2 to 2*n do Vp[2*i]:=1: od`: в четные строки вектора правой части вводятся единичные значения нагрузки на узлы $2, \dots, 2n$ нижнего пояса (к опорам нагрузка не прикладывается).

В этом блоке одновременно находятся усилия в стержнях фермы от действия нагрузки (вектор Sp) и от единичной силы (вектор $S1$).

Блок 4

```

> G:=Matrix(m,m):#Matrix of linear syst. of eq.
> for i to m do
>   Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]]:#project. on x-axis
>   Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]]:#project. on y-axis

```

```

> LL:=sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2):# length of rods
> L[i]:=subs(a^2+h^2=c^2,LL): # length of rods
> for j to 2 do
>   t:=2*N[i][2]-2+j:
>   if t<=m then G[t,i]:=simplify(-Lxy[j]/L[i]):fi;
>   t:=2*N[i][1]-2+j:
>   if t<=m then G[t,i]:=simplify(Lxy[j]/L[i]):fi;od;od:
> Bp:=Vector(m); B1:=Vector(m):
> for i from 2 to 2*n do Bp[2*i]:=1: od:#Load, lower
> np:=n+1; B1[2*np]:=1:
> G1:=1/G: # Inverse matrix
> Sp:=G1.Bp: S1:=G1.B1: # Solution of the system

```

Вычисление прогиба. Определение коэффициентов $C_i(n)$.

Прогиб в середине пролета определяется по формуле Максвелла - Мора [76, 67]

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

При выводе жесткость стержней на растяжение-сжатие временно полагается $EF = 1$. Три опорные стержня полагаются жесткими и в сумму не входят. Для упрощения получения коэффициентов (чтобы избавиться от знаменателя в выражении прогиба) результат умножается на $2 \cdot h^2$. В каждой задаче этот множитель подбирается отдельно. Последовательность коэффициентов сохраняется в переменных C1, C2, C3.

Блок 5

```

> del:=simplify(add(Sp[i]*S1[i]*L[i],i=1..ns)*2*h^2);
> C1[n]:=coeff(del,a^3):
> C2[n]:=coeff(del,c^3):
> C3[n]:=coeff(del,h^3):#coefficients

```

Поиск общих членов последовательностей $C_i(n)$, $i = 1..N_{max}$.

Этот блок выполняется по завершении цикла for n to Nmax do... od, охватывающий блоки 1 – 5. В цикле формируются последовательности коэффициентов при степенях размеров фермы. На это, как правило, идет основное время работы программы. В зависимости от сложности фермы это могут быть минуты или часы.

Очистка переменной n требуется для того, чтобы ее можно использовать далее как свободную. Для работы оператора rgf_findrecur поиска рекуррентного уравнения, которому удовлетворяют члены последовательности, подгружается пакет genfunc. Этот пакет требует четное число членов анализируемой последовательности. Последовательность заносится во вспомогательную переменную S. С помощью оператора pops вычисляется длина ее половины, необходимая для учета начальных данных при решении рекуррентного уравнения. В рекуррентном уравнении n – й член анализируемой последовательности обозначен как X(n). Решение уравнения дает оператор r solve. На этапе получения рекуррентного уравнения часто возникает проблема. Оказывается, что длина Nmax анализируемой последовательности мала. При этом уравнение содержит дробные коэффициенты:

$$Z := X(n) = \frac{750}{127} X(n-1) - \frac{1737}{127} X(n-2)$$

Этот результат получен при явно недостаточной длине последовательности Nmax=4. В процессе получения решений для ферм в настоящем справочнике минимальная величина Nmax менялась от 8 до 40.

В конце текста блока 6 приведен итоговый результат для коэффициента при n^3 в выражении прогиба. Переменные X, Z и ZZ — временные для хранения промежуточных результатов.

Блок 6

```
> n:='n':      # "Cleaning" the variable
> with(genfunc):# The package for rgf_findrecur
> S:=seq(C2[i],i=1..Nmax);# Sequence of coeff. c^3
                        S:=1,4,9,16,25,36,49,64,81,100
> NN:=nops([S])/2;      # Number of initial data
                        NN:=5
> Z:=rgf_findrecur(NN, [S], X,n);#Recursion equation

                        Z:=X(n)=3X(n-1)-3X(n-2)+X(n-3)
> ZZ:=simplify(rsolve({Z,seq(X(i)=S[i],i=1..NN)},X));
                        ZZ:=n^2
```

Изображение фермы

Всякая работа с программой начинается с ее отладки. Ввод координат узлов, порядка соединения стержней, расположение опор должны быть проконтролированы. Лучший способ такого контроля — получение изображения фермы. Ниже представлен блок изображения, не учтенный в схеме 40. В процессе отладки его надо вставить перед блоком 4, закомментировав (значок #) оператор цикла for n to Nmax do... od, охватывающий блоки 1 – 5 и раскомментировав операторы блока 2 ввода размеров a:=2: h:=3. Значение числа панелей n при отладке лучше выбрать небольшим. Сначала в программе формируются списки стержней в переменной R[i], списки подписей узлов Nod_[i] и списки подписей стержней Rod_[i]. В данном случае подписи стержней ставятся не посередине, а на 1/3 длины от одного из концов оператором display из пакета plots (введен в блоке 1).

Размер шрифта для подписей задается третьим параметром непосредственно в опции FONT(TIMES,BOLD,12), цвет — в опции COLOR(HUE,0.7). На рисунке изображены также и опорные стержни (рис. 42).

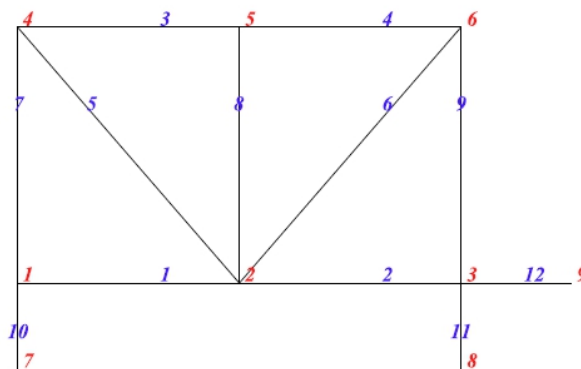


Рис. 42.

```
> font_:=FONT(TIMES,BOLD,12):
> for i to m do
>   R[i]:=PLOT(CURVES([[x[N[i][1]],y[N[i][1]]],
>                     [x[N[i][2]],y[N[i][2]]]])): od:
> for i to u do
```

```

> Nod_[i]:=PLOT(TEXT([x[i]+0.1,y[i]+0.1],
> convert(i,symbol)),font_,COLOR(HUE,1)):
> od:
> for i to m do
>   Rod_[i]:=PLOT(TEXT([(x[N[i][1]]+2*x[N[i][2]])/3,
>   (y[N[i][1]]+2*y[N[i][2]])/3+0.1],
>   convert(i,symbol)),COLOR(HUE,0.7)): od:
> display(seq(Nod_[i],i=1..u),seq(R[i],i=1..m),
> seq(Rod_[i],i=1..m),
>       scaling=unconstrained,axes=none);

```

Полный текст программы расположен по адресу
<http://vuz.exponenta.ru/2.3.rar>

Литература

1. Абзианидзе Г.В. Горизонтальные деформации балочной фермы с нисходящими раскосами под действием нагрузки, распределенной по верхнему поясу / Г.В. Абзианидзе // Научный альманах. – 2016. – № 4-3(18). – С. 229-231. – Access mode: DOI 10.17117/na.2016.04.03.229.
2. Агеев Е.А. К выбору сечений простой равномерно загруженной по нижнему поясу балочной фермы / Е.А. Агеев // Научный альманах. – 2016. – №6-2 (19). – С. 188-190.
3. Александров А.В. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. – М.: Высш.шк., 1995. – 560 с.
4. Андросова Д.И. О выборе сечений в плоской балочной ферме с треугольной решеткой, загруженной по нижнему поясу / Д. И. Андросова // Научный альманах. – 2016. – №6-2(19). – С. 191-193.
5. Астахов С.В. Вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы под действием нагрузки в середине пролета / С.В. Астахов // Construction and Architecture. – 2017. – Vol.5, I.2(15). – P. 50-54. – Access mode: DOI 10.12737/25110.
6. Афанасьев В.А. Прогиб составной плоской балочной фермы с параллельными поясами / В.А. Афанасьев, О.О. Бойко // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. – 2014. – Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком». – С. 15-16.
7. Ахмадалиев Т. У. О зависимости прогиба составной балочной фермы с параллельными поясами от числа панелей / Т. У. Ахмадалиев // Вестник научных конференций. Перспективы развития науки и образования: по материалам международной научно-практической конференции 31 октября 2015 г. Часть 2. – 2015. – № 2-2(2). – С. 18-19.
8. Ахмедова Е. Р. Собственные частоты колебаний плоской балочной фермы регулярной структуры / Е. Р. Ахмедова, М.И. Канатова // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 11. – Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком». – 2014. – С. 17-18.
9. Ахмедова Е. Р. Аналитический расчет прогиба плоской фермы со шпренгельной решеткой / Е. Р. Ахмедова // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. – 2015. – М: Инфра-М. – Т.1. – С. 62-65.
10. Бабанов В.В. Строительная механика / В.В. Бабанов. – М.: Академия, 2011. – 204 с.
11. Бабанов В.В. Теоретическая механика для архитекторов / В.В. Бабанов. – М.: Академия, 2008. – Р. 204.
12. Бадертдинов Р.Р. Формула для прогиба плоской балочной фермы / Р.Р. Бадертдинов // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 7. – Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком». – 2014. – С. 21-22.
13. Безобразова А.А. Прогиб плоской балочной фермы с прямоугольной решеткой / А.А. Безобразова // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 5. – Тамбов, 2015. – С. 29-30.
14. Белов В.А. Оценка жесткости плоской составной балочной фермы с треугольной решеткой / В.А. Белов // Научный альманах. – 2016. – № 4-3(18). – С. 235-237. – Режим доступа: DOI 10.17117/na.2016.04.03.235.
15. Белянкин Н.А. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с усиленной треугольной решеткой / Н.А. Белянкин, А.Ю. Бойко, М.Н. Кирсанов // Строительство и архитектура. – 2017. – Т. 5, № 2(15). – С. 42-44. – Режим доступа: DOI 10.12737/25106.

16. Белянкин Н.А. Формулы для определения деформаций внешне статически неопределимой фермы от действия сосредоточенной и распределенной нагрузки / Н.А. Белянкин, А.Ю. Бойко, А.А. Плясова // Строительство и архитектура. – 2017. – Т.5, №4. – С. 197-200.
17. Воропай Р.А. Вывод зависимости прогиба плоской шпренгельной фермы от числа панелей // Постулат. – 2017. - № 11. – 5 с.
18. Воропай Р.А. Аналитический расчет деформации балочной фермы с усиленным верхним поясом / Р.А. Воропай, Е.В. Доманов // Постулат. – 2017. – № 12. – 6 с.
19. Воропай Р.А. Индуктивный вывод зависимости прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей в системе Maple / Р.А. Воропай, Е.В. Доманов // Постулат. – 2017. – № 12. – 11 с.
20. Воронкин А.В. Аналитическое выражение для прогиба балочной фермы с нисходящими раскосами / А.В. Воронкин // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. – Тамбов, 2015. – С. 37-38.
21. Гавриленко А.Б. Аналитическая оценка жесткости шпренгельной фермы / А.Б. Гавриленко, М.Н. Кирсанов // Строительство и реконструкция. – 2018. - №2(76). – С. 11-17.
22. Галишникова В.В. Регулярные стержневые системы. Теория и методы расчета / В.В. Галишникова, В.А. Игнатьев – Волгоград: ВолгГАСУ, 2006. – 552 с.
23. Глушенков П.В. Аналитический расчет прогиба составной балочной фермы / П.В. Глушенков // Научный альманах. – 2016. – № 4-3(18). – С.241-243. – Режим доступа: DOI 10.17117/na.2016.04.03.241.
24. Голоскоков Д. П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. / Д.П. Голоскоков. – СПб.Питер, 2004. – 539 с.
25. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple / Д.П. Голоскоков. – СПб.:ООО «ПаркКом», 2010. – 539 с.
26. Горбунова А.С. Аналитическое исследование прогиба составной фермы, нагруженной по верхнему поясу / А.С. Горбунова, В.А. Лепетюха // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «45 лет отрасли легких металлоконструкций: от модуля Кисловодск до модуля Пятигорск» (03.04.2017-05.04.2017) / под. ред. Марутяна А.С., Файбишенко В.К., Вартумяна А.А. – Пятигорск: Издательство ПФ СКФУ, 2017. – С.15-18.
27. Горбунова А.С. Расчет прогиба симметричной фермы с решеткой "STAR" в аналитической форме / А.С. Горбунова, М.Н. Кирсанов, В.А. Лепетюха // Строительная механика и конструкции. – 2017. - №1(14). – С. 36-41.
28. Горбунова А.С. Индуктивный вывод формулы для деформации плоской стержневой модели покрытия промышленного здания [Электронный ресурс] / А.С. Горбунова, М.Н. Кирсанов, В.А. Лепетюха // Моделирование и механика конструкций. – 2017. - №5. – 7 с.
29. Грибова О.В. Расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой стержневой рамы / О.В. Грибова // Постулат. – 2017. - № 12. – 8 с.
30. Гриднев С.Ю. Статический расчет двухраскосной балочной фермы / С.Ю. Гриднев, М.Н. Кирсанов, И.Г. Овчинников // Интернет-журнал Науковедение. – 2016. – Т8, №6. – 9 с. – Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/PDF/99TVN616.pdf>
31. Доев В.С. Сборник заданий по теоретической механике на базе Mathcad: Учебное пособие / В.С. Доев, Ф.А. Доронин – СПб.:Издательство «Лань», 2010. – 592 с.
32. Доманов Е.В. Вывод зависимости прогиба плоской фермы с дополнительной боковой опорой от числа панелей в системе Maple / Е.В. Доманов // Постулат. – 2018. - №1. – 6 с.
33. Доманов Е.В. Прогиб упругой симметричной арочной фермы под действием сосредоточенной нагрузки в середине пролета / Е.В. Доманов // Вестник научных конференций. Наука и образование в жизни современного общества: по материалам международной научно-практической конференции 31 марта 2016 г. Часть 6. – 2016. - № 3-6(7). – С. 37-38.
34. Доманов Е.В. Модельный анализ работы стержневой конструкции покрытия промышленного здания / Е.В. Доманов, М.Н. Кирсанов // Моделирование и механика конструкций. – 2017. - №5. – 7 с.
35. Игнатьев В.А. Расчет регулярных стержневых систем / В.А. Игнатьев. – Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.– 433 с.
36. Ибрагимов Е. Р. Формула для смещения опор двухпролетной неразрезной фермы, нагруженной распределенной нагрузкой / Е. Р. Ибрагимов, М.Н. Кирсанов // Научный альманах. – 2016. - №10-3(24). – С. 368-371.
37. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы / М.И. Канатова // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. – М: Инфра-М, 2015. – Т. 1. – С. 31-34.

38. Кирсанов М.Н. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой / М.Н. Кирсанов, В.Г. Москвин // Строительная механика и расчет сооружений. – 2018. - №4(279). – С. 10-14.
39. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей / М.Н. Кирсанов // Строительство уникальных зданий и сооружений. – 2018. - №4 (67). – С. 86-94. – Режим доступа: DOI 10.18720/CUBS.67.7.
40. Кирсанов М.Н. Алгебра и геометрия. Сборник задач и решений с применением системы Maple / М.Н. Кирсанов, О.С. Кузнецова. – М.: Инфра-М, 2016. – 272 с.
41. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с двойными раскосами / М.Н. Кирсанов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2018. – Т.14, № 2. – С. 105–111. – Режим доступа: DOI 10.22363/1815-5235-2018-14-2-105-11.
42. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы / М.Н. Кирсанов // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2018. -№ 14(1). – С. 64-70. – Режим доступа: DOI 10.22337/2587-9618-2018-14-1-64-70.
43. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет величины прогиба решетчатой фермы / М.Н. Кирсанов, В.А. Пахомов // Постулат. – 2018. - № 3(29). – С.13.
44. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы / М.Н. Кирсанов // Строительная механика и конструкции. – 2018. - №1. – С.7-11.
45. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет деформаций и усилий в плоской вантовой ферме / М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. – 2018. - № 1. – С. 29-33. – Режим доступа: <http://ms.enjournal.net/article/13283/>
46. Кирсанов М.Н. Вывод зависимости величины прогиба плоской фермы от числа панелей / М.Н. Кирсанов, Р.А. Воропай // Постулат. – 2018. - №2-1(28). – 15 с.
47. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы / М.Н. Кирсанов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. - № 3. – С. 23-27.
48. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях симметричной балочной фермы / М.Н. Кирсанов // Строительство и реконструкция. – 2017. - №1(69). – С.19-23.
49. Кирсанов М.Н. Индуктивный вывод формул для деформаций плоской решетчатой фермы / М.Н. Кирсанов // Строительство и реконструкция. – 2017. - №2(70). – С. 17-22.
50. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей / М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. – 2017. - № 3 (873). – С. 26-29. – Режим доступа: <http://ms.enjournal.net/article/12885/>
51. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме / М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. – 2017. - №4 (874). – С. 20-23. – Режим доступа: <http://ms.enjournal.net/article/12930>
52. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба двухпролетной плоской фермы / М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. – 2017. - № 5. – С. 35-38. – Режим доступа: <http://ms.enjournal.net/article/12970/>
53. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей / М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. – 2017. - № 10. – С. 24-27.
54. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы / М.Н. Кирсанов // Вестник МГСУ. – 2017. – Т. 12. - № 2 (101). – С. 165–171.
55. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики./ М.Н. Кирсанов. – СПб.: Лань, 2012. – 512 с.
56. Кирсанов М.Н. Практика программирования в системе Maple / М.Н. Кирсанов. – М.: Издательский дом МЭИ, 2011. – 208 с.
57. Кирсанов М.Н. Задачи по теоретической механике с решениями в Maple 11 / М.Н. Кирсанов. – М.:Физматлит, 2010. – 264 с.
58. Логвинец А.А. Анализ прогиба шпренгельной фермы под действием равномерной нагрузки по верхнему поясу / А.А. Логвинец // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. – Тамбов, 2015. – С. 96-97.
59. Макаров Е.Г. Соппротивление материалов на базе Mathcad / Е.Г. Макаров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – Гост 8240-72.
60. Металлические конструкции. Учебник для вузов. Под ред. Е.И. Беленя. — М.: Стройиздат, 1976. – 600 с.
61. Михайлов А. Д. Формула для горизонтального смещения опоры арочной фермы треугольного очертания при загрузке центрального узла / А. Д. Михайлов // Вестник научных конференций. Перспективы развития науки и образования: по материалам международной научно-практической конференции 31 октября 2015 г. Часть 3. – 2015. - №2-3(2). – С. 94-96.

62. Мищенко А. В. Аналитическое выражение для прогиба балочной фермы с треугольной решёткой / А. В. Мищенко // Научный альманах. – 2016. - № 9-2(23). – С. 38-41. – Режим доступа: DOI 10.17117/na.2016.09.02.038.
63. Ниналалов И. Г. Расчет прогиба консольной фермы / И.Г. Ниналалов // Научный альманах. – 2016. – №6-2(19). – С. 271-281.
64. Осадченко Н. В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами / Н. В. Осадченко // Постулат. – 2017. - №12. – 28 с.
65. Осадченко Н. В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа / Н. В. Осадченко // Строительная механика и конструкции. – 2018. - №1. – С.12-33.
66. Пережилова Е. Д. Точное решение задачи о смещении подвижной опоры фермы с произвольным числом панелей / Е.Д. Пережилова // Строительство и архитектура. – 2017. – Т.5, №3(6). – С. 7-11.
67. Потапов В. Д. Строительная механика: Учеб. для вузов. Кн.1. Статика упругих систем / В. Д.Потапов, А.В. Александров, С.Б. Косицын, Д.Б. Долотказин // Под ред. В.Д. Потапова — М.:Выш.шк., 2007. – 863 с.
68. Рабинович И. М. Курс строительной механики стержневых систем. 2-е изд. Ч. 1. Статически определимые системы. / И. М. Рабинович. – М.-Л.: Стройиздат, 1950. – 388 с.
69. Рахматулина А. Р. Расчет величины прогиба плоской фермы с произвольным числом панелей в системе Maple / А. Р. Рахматулина, А. А. Смирнова // Молодежь и наука. – 2018. - №2. – С. 110.
70. Реутов Д. О. Индуктивный анализ прогиба фермы регулярной структуры в системе Maple / Д. О. Реутов // Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. IV-й международный семинар и международная школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики»; Материалы конференции и труды семинара. – Казань: Изд-во ООО «Фолиант», 2014. – С. 256-261.
71. Реутов Д. О. Аналитическое выражение прогиба слабо вспарушенной балочной фермы //Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 3. – Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. – С. 128-129.
72. Рыбаков Л. С. Термоупругость плоской регулярной фермы ортогональной структуры / Л. С. Рыбаков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. - № 2. – С. 136–152. – Режим доступа: DOI 10.15593/perm.mech/2017.2.08.
73. Сметанин Д. А. Анализ решения задачи о прогибе арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу / Д.А. Сметанин // Вестник научных конференций. Вопросы образования и науки: по материалам международной научно-практической конференции 31 декабря 2015 г. Часть 1. – 2015. – №4-1(4). – С. 152-153.
74. Смирнов М. Д. Аналитическое определение горизонтального смещения опоры арочной фермы, нагруженной по нижнему поясу / М.Д. Смирнов // Вестник научных конференций. Перспективы развития науки и образования: по материалам международной научно-практической конференции 31 октября 2015 г. Часть 3. – 2015. - № 2-3(2). – С. 129-130.
75. Смирнов П.А. Прогиб составной статически определимой фермы под действием равномерной нагрузки / П.А. Смирнов // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. – Тамбов, 2015. – С. 129-131.
76. Снитко Н. К. Строительная механика / Н.К. Снитко. – М.: Высш.шк., 1980. – 431 с.
77. Стрелецкий Н.Н. Решетчатые комбинированные системы мостов / Н.Н. Стрелецкий – М.: Дориздат, 1953.– 220с.
78. Стрелецкий Н. С. Стальные конструкции / Н. С. Стрелецкий, А.Н. Гениев, В.А. Балдин, Е.И. Беленя, Е.Н. Лессинг. – М.: Гос. изд-во литературы по строительству и архитектуре, 1952. – 852 с.
79. Тарасюк Ю. О. Формула для горизонтального смещения опоры арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу / Ю.О. Тарасюк // Вестник научных конференций. Перспективы развития науки и образования: по материалам международной научно-практической конференции 31 октября 2015 г. Часть 6. – 2015. - №2-6(2). – С. 133-134.
80. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций / Д.В. Тиньков // Инженерно-строительный журнал. – 2015. - №5(57). – С. 66–73.
81. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала / Д.В. Тиньков // Инженерно-строительный журнал. – 2016. - №1(61). – С. 25–32. – Режим доступа: DOI 10.5862/MCE.61.3.
82. Тиньков Д.В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами / Д.В. Тиньков // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. – М: Инфра-М, 2015. – Т. 1. – С. 52-56.
83. Тиньков Д.В. Индуктивный вывод формулы для прогиба плоской раскосной фермы / Д.В. Тиньков // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «45 лет отрасли легких металлоконструкций: от модуля Кисловодск до модуля Пятигорск» (03.04.2017–05.04.2017) / под. ред. Марутяна А.С., Файбишенко В.К., Вартумяна А.А. – Пятигорск: Издательство ПФ СКФУ, 2017. –С. 112-117.

84. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой / Д.В. Тиньков // Постулат. – 2017. - № 12. – 6 с.
85. Широков А.С. Вывод формулы для прогиба статически определимой порталной фермы в зависимости от числа панелей / А.С. Широков // Молодежь и наука. – 2018. - №5. – С.119.
86. Широков А.С. Аналитический расчет смещения опоры балочной фермы с верхними шпренгелями / А.С. Широков // Строительная механика и конструкции. – 2017. - №2(15). – С. 11-14.
87. Arutyunyan V.B. Double induction for deriving a formula for deflecting a frame truss with an arbitrary number of panels / V.B. Arutyunyan // Postulat. – 2018. – №7. – 5 с.
88. Belyankin N.A. Inductive derivation of rod cladding structures deflection in the system Maple / N.A.Belyankin, A.Y.Boyko, M.N.Kirsanov // Научный альманах. – 2017. – №4-3(30). – С. 194-197. – Access mode: DOI 10.17117/na.2017.04.03.194.
89. Belyankin N.A. Analysis of the deflection of the flat statically determinate girder / N.A.Belyankin, A.Y.Boyko // Научный альманах. – 2017. – № 2-3(28). – С.246-249.
90. Bolotina T.D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels / T.D. Bolotina// Bulletin of Scientific Conferences. – 2016. – №4-3(8). – P.7-8.
91. Domanov E.V. The dependence of the deflection of the cantilever truss on the number of panels obtained in the system Maple / E.V. Domanov // Structural mechanics and structures. – 2018. – Vol.17, №.2. – С.80-86.
92. Domanov E.V. The formula for the dependence of the deflection of an externally statically indeterminate truss on the number of panels / E.V. Domanov // Postulat. – 2018. – № 6.
93. Domanov E.V. An analytical solution of the problem of the externally statically indeterminate truss deflection with an arbitrary number of panels / E.V. Domanov // Postulat. – 2017. - № 7. – 4 p.
94. Domanov E.V. Analytical calculation of the deflection of the truss with cross-bar lattice / E.V.Domanov, M.N.Kirsanov // Science Almanac. – 2016. – № 11-2(25). – P. 312-314. – Access mode: DOI 10.17117/na.2016.11.02.312.
95. Doneva A. Energy-efficient actuation in infinite lattice structures / A.Doneva, S.Torquatob / Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2003. – Vol.51. – № 8. – P.1459-1475.
96. Dong Xiaomeng. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels / Dong Xiaomeng, M.N.Kirsanov // Science Almanac. – 2016. – № 1-4(5). – P.6-7.
97. Jiang H. An analytical expression for the influence line of the truss / H.Jiang, M.N.Kirsanov // Bulletin of Scientific Conferences. – 2016. – № 1-5(5). – P.10-11.
98. Ilin I.A. The deflection and displacement of the bearings of the truss with rhombic lattice / I.A.Ilin, M.N.Kirsanov / Science Almanac. – 2016. – №12-2(26). – P.216-219. – Access mode: DOI 10.17117/na.2016.12.02.216.
99. Hutchinson R.G. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses / R.G.Hutchinson, N. A.Fleck // ZAMM Z.Angew.Math.Mech. – 2005. – Vol.85, № 9. – P.607-617.
100. Hutchinson R.G. The structural performance of the periodic truss / R.G.Hutchinson, N.A.Fleck // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – Vol.54. – Issue 4, April 2006. – P.756-782.
101. Kirsanov M.N. Analytical calculation of the deflection of the lattice truss / M.N.Kirsanov, D.V.Tinkov // MATEC Web of Conferences. – 2018. – Vol.193. – P.03015. – Access mode: DOI.org/10.1051/mateconf/201819303015.
102. Kirsanov M.N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels / M.N.Kirsanov // Russian Journal of Building Construction and Architecture. – 2018. – № 1(37). – P.92-99.
103. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure / M.N.Kirsanov // Magazine of Civil Engineering. – 2017. – № 8. – P.58-66. – Access mode: DOI 10.18720/MCE.76.6.
104. Kirsanov M.N. Elastic characteristics of a stochastically inhomogeneous medium modeled by a rod grid / M.N.Kirsanov, S.E.Kollerova // Science Almanac. – 2017. – № 3-3(29). – P.258-261. – Access mode: DOI 10.17117/na.2017.03.03.258.
105. Kirsanov M.N. Analysis of the deflection of flat roof trusses / M.N Kirsanov, M.G Lafickova, A.S Nikitina // Научный альманах. – 2017. – №3-3(29). – С. 262-265. – Access mode: DOI 10.17117/na.2017.03.03.262.
106. Kirsanov M.N., Shi Kaifei The calculation of the deflection of the truss with cross bars in the system Maple / M.N.Kirsanov, Shi Kaifei // Научный альманах. – 2017. – 3-3 (29). – С.266-269. – Access mode: DOI 10.17117/na.2017.03.03.266.
107. Kirsanov M.N. The formulas for calculating girders with asymmetric triangular lattice / M.N.Kirsanov, Shi Kaifei // Science Almanac. – 2017. – №3-3(29). – P.270-273. – Access mode: DOI 10.17117/na.2017.03.03.270.
108. Kirsanov M.N. Analysis of deformations of the open hinged-rod ring / M.N.Kirsanov // Инновационная наука. – 2017. – № 02-1. – С.10-11.

109. Kirsanov M.N. An inductive derivation of the dependence of the arched truss deflection on the number of panels / M.N. Kirsanov, M.G. Lafickova, A.S. Nikitina // Science Almanac. – 2017. – № 4-3(30). – P.205-208. – Access mode: DOI 10.17117/na.2017.04.03.205.
110. Kirsanov M.N. Analysis of the deflection of flat roof trusses / M.N.Kirsanov, M.G.Lafickova, A.S.Nikitina // Научный альманах. – 2017. – № 3-3(29). – С. 262-265. – Access mode: DOI 10.17117/na.2017.03.03.262.
111. Kirsanov M.N. The formula for deflection of truss with cases of kinematic variability / M.N.Kirsanov, P.C. Razananairina // Postulat. – 2017. – № 9.
112. Kirsanov M.N. The mathematical model of dome covering industrial facility / M.N.Kirsanov, S.V.Astahov // Architecture and Engineering. – 2017. – № 2(2). – P.8-14.
113. Kirsanov M.N. The formula for determining the deflection of the truss with an arbitrary number of panels / M.N.Kirsanov // Наука в цифрах. – 2017. – № 2. – P.22-24. – ISSN 2500-1353.
114. Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the rod of a statically exterior indeterminate truss on the number of panels / M.N.Kirsanov, I.V. Orlov // Postulat. – 2017. – № 12(26). – С.75.
115. Kirsanov M.N. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. Architecture and Engineering. – 2016. – № 3. – Vol.1. –P.14-17.
116. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder / M.N.Kirsanov // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. – 2016. – № 1(29). – P.84-105.
117. Kirsanov M.N. Analytical study of the limiting properties of suspended cable system with a rigid beam // Международная школа "Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики" KAZCAS-16: лекции школы и материалы семинара. – Казань, 2016. – С.179-190.
118. Kiyko L.K. Analytical evaluation of deflection of arched trusses under wind load / L.K. Kiyko // Scientific Bulletin. – 2016. – № 1(7). – P.247-254.
119. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load / M.A. Ponamareva // Science Almanac. – 2016. – № 4-3(18). – P.257-259. – Access mode: DOI 10.17117/na.2016.04.03.257.
120. Rakhmatulina A.R. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels / A.R.Rakhmatulina, A.A.Smirnova // Science Almanac. – 2017. – № 2-3(28). – P.268-271.
121. Tinkov D.V. Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials / D.V.Tinkov, A.A.Safonov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2017. – Vol.46, №1. – P.46-52. – Access mode: DOI 10.3103/S1052618817010149.
122. Vasilchenko D.I. Analytical evaluation of displacement of the movable support in the truss with reinforced cross bars / D.I. Vasilchenko // Научный альманах. – 2017. – № 4-3(30). – P.198-201.

FLAT FARMS. METHOD OF SOLUTION

M.N. Kirsanov

Numerical, graphical and analytical methods involving the computer algebra system Maple algorithms for obtaining solutions of problems of statics of flat trusses. The cases of kinematic variability of some truss schemes are considered.

Keywords: tress, deflection, Maple, induction, kinematic degeneration.