

# ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

УДК 624.044.2

DOI: 10.22227/1997–0935.2018.5.579-586

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОГИБА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОКРЫТИЯ

**М.Н. Кирсанов**

*Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»),  
111250, г. Москва, Красноказарменная ул., д. 14*

**Предмет исследования:** получение аналитического решения задачи о прогибе пространственной конструкции с произвольным числом панелей, справедливого для широкого класса объектов предложенной структуры.

**Цели:** основной целью работы является вывод зависимости прогиба фермы от числа панелей, нагрузки и размеров конструкции.

**Методы:** деформативность прямоугольной в плане фермы с вертикальными опорами по всем боковым сторонам, выполненной из стали или алюминиевых сплавов, оценивается по вертикальному смещению центрального узла, к которому приложена сила. Усилия в стержнях и опорах определяются методом вырезания узлов. Обобщение частных решений, найденных для последовательности ферм с различным числом панелей, на произвольное число панелей получено методом индукции. Все символьные преобразования и решения выполнены в системе компьютерной математики Maple. С помощью специальных операторов системы Maple выводятся и решаются однородные линейные рекуррентные уравнения, которым удовлетворяют члены последовательностей коэффициентов искомой формулы.

**Результаты:** полученная формула для прогиба представлена в виде кубического полинома по числу панелей. Построены графики зависимости прогиба от числа панелей и от высоты. Выведены формулы для усилий в характерных стержнях.

**Выводы:** предложенная схема статически определимой пространственной стержневой конструкции с опорами по всему контуру допускает аналитическое решение для прогиба и обобщение его на произвольное число панелей. Результаты проверены численно и могут быть использованы как тестовые для оценки точности численных решений. Наиболее эффективны полученные формулы для большого числа панелей, т.е. тогда, когда численные методы, основанные на решении линейных систем высокого порядка требуют больших машинных ресурсов и подвержены пороку неконтролируемого накопления ошибок округления.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** пространственная ферма, прогиб, индукция, Maple, аналитическое решение, рекуррентные уравнения, формула Максвелла—Мора, метод вырезания узлов, покрытие, критические усилия

**ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:** Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. Вып. 5 (116). С. 579–586. DOI: [www.dx.doi.org/10.22227/1997–0935.2018.5.579-586](http://www.dx.doi.org/10.22227/1997–0935.2018.5.579-586)

## ANALYTICAL CALCULATION OF DEFLECTION OF RECTANGULAR SPATIAL ROOF STRUCTURE

**M.N. Kirsanov**

*National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI),  
14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation*

**Subject:** obtaining an analytical solution to the problem of deflection of a spatial structure with an arbitrary number of panels, which remains valid for a wide class of constructions of the proposed structure.

**Research objectives:** the main purpose of this work is to derive dependence of truss deflection on the number of panels, on the magnitude of the load and dimensions of the structure.

**Materials and methods:** the deformability of a truss over rectangular plan with vertical supports on all lateral sides, made of steel or aluminum alloys is estimated by the vertical displacement of the central node, to which the force is applied. The forces in the rods and supports are determined by the method of joints. Generalization of the particular solutions found for a sequence of trusses with various number of panels to an arbitrary number of panels is obtained by induction. All symbolic transformations and solutions are performed in the computer mathematics system Maple. Using special operators of the Maple software, homogeneous linear recurrence equations are derived and solved, which are satisfied by the terms in the sequences of coefficients of the desired formula.

**Results:** the resulting deflection formula constitutes a cubic polynomial expressed in terms of the number of panels. The graphs of the dependence of deflection on the number of panels and on the height are plotted. Formulas for forces in characteristic rods are derived.

**Conclusions:** the proposed model of a statically determinate spatial truss structure with supports all over the contour allows an analytical solution for deflection and its generalization to an arbitrary number of panels. The results are numerically verified

and can be used as benchmark cases for estimation of the accuracy of numerical solutions. The obtained formulas are most effective for large number of panels, i.e., when numerical methods based on solving high-order linear systems require significant machine resources and are prone to uncontrolled accumulation of round-off errors.

**KEY WORDS:** spatial truss, deflection, induction, Maple, analytical solution, recurrent equations, Maxwell-Mohr formula, method of joints, roof structure, critical forces

**FOR CITATION:** Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet progiba prostranstvennogo pryamougol'nogo pokrytiya [Analytical calculation of deflection of rectangular spatial roof structure]. Vestnik MGSU [Proceedings of the Moscow State University of Civil Engineering]. 2018, vol. 13, issue 5 (116), pp. 579–586. DOI: www.dx.doi.org/10.22227/1997–0935.2018.5.579-586

## ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач строительной механики является задача перекрытия больших площадей. Это требуется при строительстве ангаров для самолетов, современных торговых центров, аэропортов и концертных залов. Известны варианты покрытий в виде висячих конструкций [1, 2], перекрытия в виде мембраны [3, 4]. Одним из самых простых и легко реализуемых решений для перекрытия больших площадей без использования промежуточных опор является применение легких ферм с опорами по всему периметру конструкции. Известны и варианты пространственных покрытий из дерева [5]. В настоящей работе ставится задача вывода аналитической зависимости прогиба от числа панелей при нагружении фермы силой в центральном узле  $C$  (рис. 1). Математическая модель фермы строится в системе аналитических преобразований Maple. Аналогичная задача для статически определимого прямоугольного покрытия с четырьмя опорными узлами в углах конструкции и произвольном числе панелей уже решена автором [6–8]. Найдена аналитическая зависимость прогиба пространственной консольной фермы от числа панелей [9, 10]. Для расчета плоских и пространственных ферм предлагаются также простые полуэмпирические приближенные формулы [11–13].

Конструкция с периодической структурой для перекрытия больших площадей (см. рис. 1) состоит из  $m$  продольных и двух поперечных боковых двух-

скатных ферм. Ферма имеет  $2n$  панелей по одной (продольной) стороне и с  $2m$  по другой (поперечной) и содержит  $n_s = 3(4mn + 2m + 2n + 1)$  стержней, включая три стержня, образующие сферическую опору  $A$  и цилиндрическую  $B$ . Конструкция статически определимая. По боковым сторонам фермы расположены  $n_v = 4(m + n)$  вертикальные опорные стойки длиной  $c$  (рис. 2, 3). Высота фермы вместе с опорами равна  $h + c$ .

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

*Модель конструкции.* Для определения усилий в стержнях используется программа [6], реализующая метод вырезания узлов в символьной форме. Это позволяет применить метод индукции для обобщения решения на произвольное число панелей. В программу вводятся координаты узлов стержневой сетки

$$\begin{aligned} x_k &= a(i-1), \quad y_k = b(j-1), \\ z_k &= 0, \quad k = i + (j-1)(2n+1), \\ i &= 1, \dots, 2n+1, \quad j = 1, \dots, 2m+1, \\ z_{i+(2j-1)(2n+1)} &= h, \quad i = 1, \dots, 2n+1, \quad j = 1, \dots, m, \\ z_{2+2i(2n+1)} &= h, \quad z_{2n+2i(2n+1)} = h, \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (1)$$

Порядок соединения стержней и узлов (шарниров) задают специальные векторы, содержащие номера концов стержней. Ортогональная сетка покрытия задана, например, векторами

$$V_{i+2n(j-1)} = [i + (j-1)(2n+1), i + (j-1)(2n+1) + 1],$$

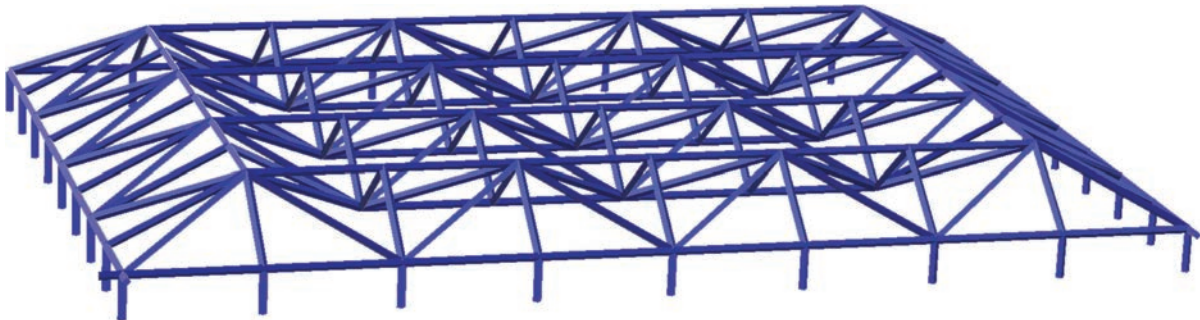


Рис. 1. 3D-модель фермы ( $n = m = 4$ )

Fig. 1. 3D model of truss ( $n = m = 4$ )

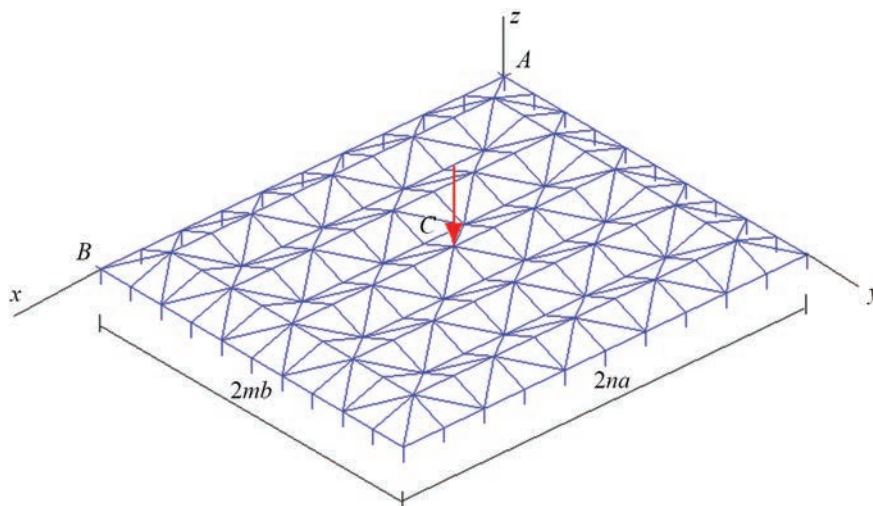


Рис. 2. Схема фермы: размеры, система координат ( $m = n = 5$ )

Fig. 2. Truss model: dimensions, coordinate system ( $m = n = 5$ )

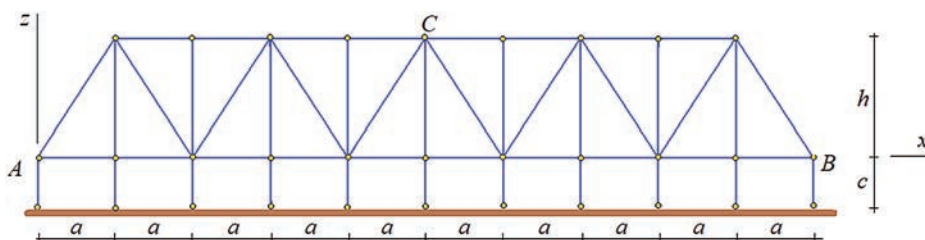


Рис. 3. Размеры фермы в плоскости  $x-z$  ( $n = 5$ )

Fig. 3. Truss dimension in the  $x-z$  plane ( $n = 5$ )

$$i = 1, \dots, 2n, j = 1, \dots, 2m + 1,$$

$$V_{i+q+2m(j-1)} = [j + (2n + 1)(i - 1), j + (2n + 1)i],$$

где  $q = 2n(2m + 1)$ ,  $i = 1, \dots, 2m$ ,  $j = 1, \dots, 2n + 1$ .

Аналогично задаются концевые шарниры раскосов и опорных стоек. Матрица уравнений равновесия узлов формируется из направляющих косинусов усилий, определяемых исходя из заданной геометрии конструкции и порядка соединения стержней [6–10]. Строкам матрицы с номерами  $3i - 2$ ,  $i = 1, \dots, n_s$  соответствуют проекции усилий на ось  $x$ , строкам  $3i - 1$  — проекции на ось  $y$ , строкам вида  $3i$  — проекции на вертикальную ось  $z$ . Правая часть системы уравнений равновесия представляет собой вектор с единственной ненулевой компонентой, соответствующей узлу  $C$  с номером  $m(2n + 1) + n + 1$ , загруженному силой:  $B_{3(m(2n+1)+n+1)} = -P$ . Решение системы уравнений в символьной форме с заданными числами панелей  $m$  и  $n$  дает усилия во всех стержнях, включая опорные стержни.

**Прогиб.** Для вычисления прогиба используется формула Максвелла—Мора

$$\Delta = P \sum_{j=1}^{n_x-n_y} \frac{S_j^2 l_j}{EF}, \quad (2)$$

где  $E$  — модуль упругости стержней;  $F$  — площадь сечения;  $l_j$  и  $S_j$  — длина и усилие в  $j$ -м стержне от действия единичной вертикальной силы, приложенной к центральному узлу  $C$ . Суммирование ведется по всем стержням фермы, кроме опорных, которые предполагаются недеформируемыми. Ниже рассматривается случай, когда  $m = n$ . Последовательный расчет усилий и прогиба фермы по формуле (2) показывает, что вид формулы  $\Delta$  для любых значений  $n$  не меняется, что является следствием регулярности конструкции [14–16]:

$$\Delta = P(A_n a^3 + B_n b^3 + D_n d^3) / (4h^2 EF), \quad (3)$$

где  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$ . Коэффициенты в этой зависимости образуют последовательности, общие члены которой можно определить с помощью операторов **rgf\_findrecur** и **rsolve** системы Maple. Для коэффициента при  $a^3$  оператор **rgf\_findrecur** возвращает уравнение седьмого порядка

$$A_n = A_{n-1} + 3A_{n-2} - 3A_{n-3} - 3A_{n-4} + 3A_{n-5} + A_{n-6} - A_{n-7}. \quad (4)$$

Начальные условия для этого уравнения получаются из решений задач о прогибе ферм при  $n = 2, \dots, 8$  и имеют вид

$$A_2 = 6, A_3 = 23, A_4 = 44, A_5 = 109, \\ A_6 = 162, A_7 = 307, A_8 = 408.$$

Оператор **rsolve** дает следующее решение рекуррентного уравнения:

$$A_n = (2n^3 - ((-1)^n + 3)n^2 + (5 + (-1)^n)n - 1 + (-1)^n) / 2. (5)$$

Аналогично, но несколько проще, получаются и другие коэффициенты

$$B_n = n(1 + 2n^2) / 3, \\ D_n = (4n - 3 - (-1)^n) / 3.$$

Кривые зависимости безразмерного прогиба от числа панелей (рис. 4) в условии постоянства пролета конструкции  $L = 60$  м,  $b = a = L/(2n)$  показывают

почти монотонное убывание прогиба с ростом числа панелей. Введено обозначение  $\Delta' = \Delta EF / (PL)$ .

Зависимость прогиба от высоты фермы более сложная. При разных высотах фермы в зависимости от размера  $a$  кривые обнаруживают минимум (рис. 5). Несмотря на то, что минимум выражен слабо, этот факт может быть использован для оптимизации жесткости конструкции. Аналитическое выражение для точки минимума получить не удастся. Несложные же численные расчеты по формуле (3) показывают, что с уменьшением размера панели  $a$  критическая высота падает, уменьшается и сам прогиб.

Проверка аналитической зависимости (3) выполнялась при различных значениях  $n$  по той же

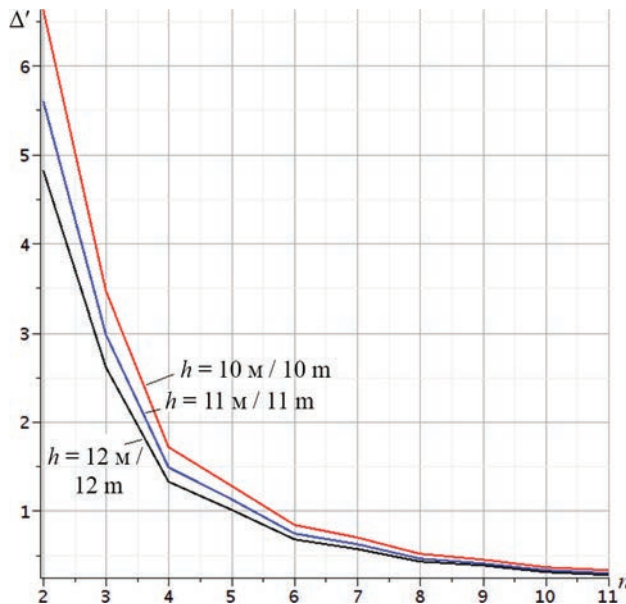


Рис. 4. Зависимость прогиба от числа панелей ( $L = 60$  м)  
Fig. 4. Dependence of deflection on the number of panels ( $L = 60$  m)

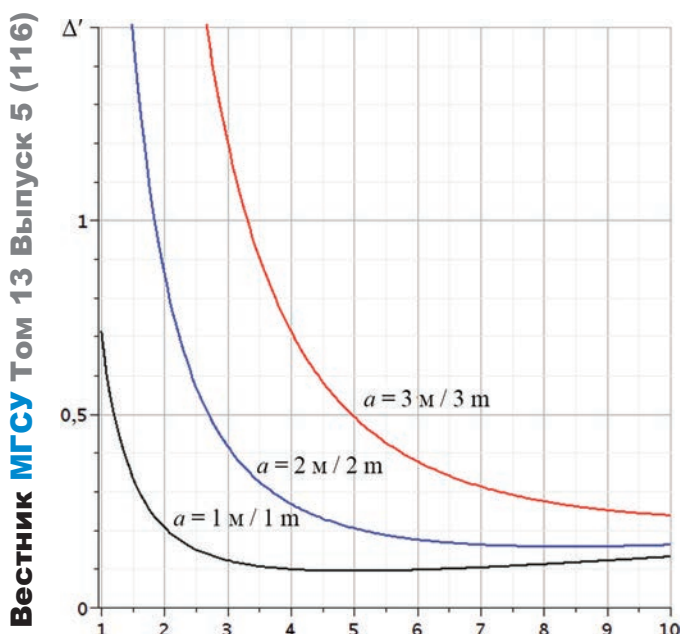


Рис. 5. Зависимость прогиба от высоты ( $b = 1$  м,  $n = 8$ )  
Fig. 5. Dependence of deflection on height ( $b = 1$  м,  $n = 8$ )

программе [6], но в численной моде. Скорость численных преобразований в Maple заметно уступает специализированным программам, основанным на методе конечных элементов [2–4, 11–13], однако она на порядок выше скорости символьных преобразований. Именно эта особенность символьных преобразований, не позволяющая непосредственно получить формулу вида (3) при больших числах панелей, послужила причиной для развития индуктивных методов. Из практики расчетов пространственных ферм было замечено, что с увеличением числа панелей время символьных преобразований растет быстрее геометрической последовательности. Если для получения формулы (3) при  $n = 2$  с целочисленными коэффициентами  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $D_n$ , необходимыми для начальных условий соответствующих рекуррентных уравнений, требуются секунды, то на решение этой же задачи в системе Maple при  $n > 9$  требуются уже часы работы компьютера с процессором i7 и памятью 16 Гб. Однако в данной задаче был найден интересный ход, позволяющий существенно сократить время получения последовательности с длиной, достаточной для выявления ее общего члена. Оказалось, что для  $B_n$ ,  $D_n$  получаются более простые формулы по итогам расчетов всего шести ферм с  $n = 2, \dots, 7$ , в то время как длины соответствующей последовательности коэффициентов  $A_n$  еще недостаточно для получения общего члена. Оператор `rgf_findrecur` для коэффициента  $A_n$  не дает рекуррентного уравнения, если исследуемая последовательность не достаточна длинна. Поэтому было решено получить последовательность решений в численной моде, практически не имеющей ограничений по скорости счета, и из полученных численных значений прогиба вычесть слагаемые  $B_n b^3$  и  $D_n d^3$ , формулы для коэффициентов в которых уже известны. Если принимать в этом численном эксперименте  $a = 1$ , то найденная разность как раз дает коэффициент  $A_n$  при  $n = 2, \dots, 10$ . После этого с привлечением оператора `rgf_findrecur` можно

было получить рекуррентное уравнение (4) и искомым общий член  $A_n$  (5).

*Критические усилия и реакции опор.* Для оценки устойчивости всей конструкции в целом необходимо проверить устойчивость отдельных стержней на продольный изгиб. В том же цикле по числу панелей одновременно с выводом формулы для прогиба определяются и усилия в наиболее сжатых стержнях. Можно предположить, что критическими по значению усилиями будут стержни в середине пролета. Обозначим  $S_I, S_{II}, S_{III}$  усилия в трех (с учетом симметрии) стержнях с длинами  $a$ ,  $d$  и  $\sqrt{b^2 + h^2}$  соответственно (рис. 6).

В зависимости от четности числа панелей центральный узел  $C$ , к которому приложена нагрузка, соединен с верхним сжатым или с нижним растянутым поясом. Поэтому и усилия в отмеченных стержнях меняют знак:

$$S_I = P((-1)^n(2n-3)-1)a/(4h), \quad S_{II} = P(-1)^n d/(4h).$$

Поперечные стержни, соединенные с центральным узлом при таком нагружении, не напряжены:  $S_{III} = 0$ . Кроме того, реакции опор (вертикальных стоек) при любом  $n$  равны нулю, кроме угловых. В них реакции, как очевидно, равны  $P/4$ . Реакции горизонтальных связей в угловых шарнирах  $A$  и  $B$  равны нулю.

## ВЫВОДЫ

Число таких конструкций, как статически определимые периодические фермы, ограничено [14, 15, 17]. Особенно сложно найти схемы пространственных ферм. В настоящей работе предложена еще одна схема пространственной конструкции регулярного типа, обладающая некоторой архитектурной выразительностью. Предложенное покрытие имеет опоры только по его сторонам, что делает его полезным при безопорном перекрытии площадей. Преимущества аналитических расчетов подобных ферм очевидны. Меняя всего лишь один параметр в решении,

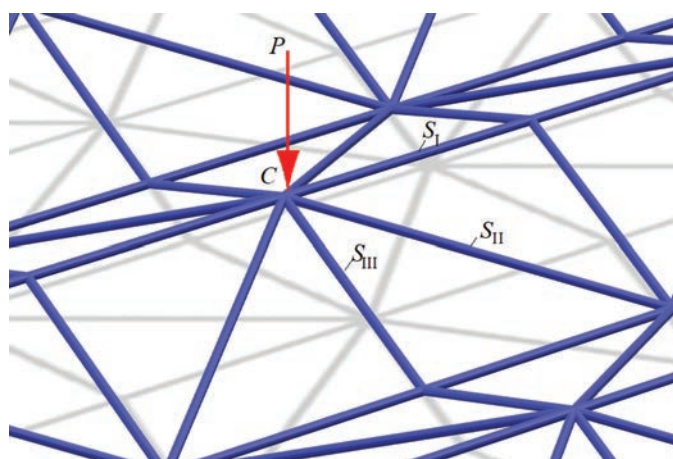


Рис. 6. Стержни в середине пролета при нечетном  $n$   
Fig. 6. Rods in the middle of the span for odd  $n$

можно получить и проанализировать решения для достаточно широкого класса конструкций. Иногда при анализе таких решений обнаруживаются скрытые и достаточно опасные особенности ферм. Так, исследована ферма, которая при четном числе панелей превращается в кинематически изменяемую конструкцию [18]. Исследуемая ферма подобными особенностями не обладает, однако при изменении формы поверхности, задаваемой функцией (1), можно получить случай, когда определитель системы уравнений обращается в ноль. В частности, это возможно, если все стержни, соединенные с каким-либо узлом, лежат в одной плоскости. В этом случае нагрузка на узел, перпендикулярная плоскости стержней, не может быть уравновешена. Заметим, что обнаружить особенности конструкции и наметить пути ее оптимизации легче всего по формульному представлению результата. Именно это направление исследований выбрано автором и его учениками [6–10, 17–21].

Предложенная схема статически определимой пространственной конструкции характерна тем, что опоры по ее боковым сторонам непосредственно включены в ее работы. Система внешне статически неопределима. Традиционный алгоритм расчета, начинающийся с определения реакций опор, здесь

не проходит. Для определения реакций опор необходимо решать совместно все уравнения равновесия узлов. Это существенно затрудняет расчет, однако здесь удалось не только решить задачу об усилиях в стержнях, но и получить аналитическое решение для прогиба в компактной форме. Разработанная модель в общем случае годится для различного числа панелей по сторонам покрытия, однако доступным для практического использования оказался частный случай с одинаковым числом панелей по сторонам. При этом сами размеры панелей могут быть разные. В плане покрытие не обязательно квадратное. Решение также существенно зависит от четности числа панелей. Особенно наглядно это проявляется на знаках усилий в некоторых стержнях, меняющихся в зависимости от четности  $n$ . Графики полученной зависимости прогиба от высоты покрытия показали наличие точек экстремума. Несмотря на то, что экстремальные точки выражены не сильно, для задачи оптимизации конструкции по жесткости они могут быть использованы. Полученное решение по этому же алгоритму с применением операторов системы компьютерной математики может быть применено для других видов нагружения и при необходимости — при произвольном соотношении чисел панелей по сторонам.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кирсанов Н.М. Висячие покрытия производственных зданий. М. : Стройиздат, 1990. 128 с.
2. Sophianopoulos D.S., Michaltsos G.T. Nonlinear stability of a simplified model for the simulation of double suspension roofs // *Engineering Structures*. 2001. Vol. 23. No. 6. Pp. 705–714.
3. Шимановский А.В., Цыхановский В.К. Теория и расчет сильнонелинейных конструкций. Киев : Сталь, 2005. 432 с.
4. Mushchanov V., Gorokhov Y., Vardanyan A. et al. Particular features of calculation and design of long-span membrane roofs // *Procedia Engineering*. 2015. Vol. 117. Pp. 990–1000.
5. Rumlová J., Fojtík R. The timber truss: The studying of the behaviour of the spatial framework joint // *Perspectives in Science*. March 2016. Vol. 7. Pp. 299–303.
6. Kirsanov M.N. Stress state and deformation of a rectangular spatial rod cover // *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture*. 2016. Vol. 31. No. 3. Pp. 71–79.
7. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 4. Pp. 52–58.
8. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // *Вестник МГСУ*. 2017. Т. 12. Вып. 2 (101). С. 165–171. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.2.165-171.
9. Доманов Е.В. Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей // *Научный альманах*. 2016. No. 6–2 (19). С. 214–217.
10. Voropai R.A., Kirsanov M.N. On the deformation of spatial cantilever trusses under the action of lateral loads // *Science Almanac*. 2016. No. 9–2 (23). С. 17–20.
11. Марутян А.С., Павленко Ю.И. Приближенный расчет перекрестных систем на статические воздействия // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2009. № 4. С. 14–20.
12. Марутян А.С. Легкие металлоконструкции из перекрестных систем. Пятигорск : Изд-во РИА КМВ, 2009. 348 с.
13. Марутян А.С., Григорьян М.Б., Глухов С.А. Пространственные решетчатые несущие конструкции (модули типа «Пятигорск»-2) // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2014. № 1. С. 64–71.
14. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005. Vol. 85. No. 9. Pp. 607–617.

15. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. No. 4. Pp. 756–782.

16. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. Vol. 96. Pp. 184–203.

17. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // *Инженерно-строительный журнал*. 2015. № 5 (57). С. 66–73.

18. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную

изменяемость // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2012. № 3. С. 48–51.

19. Еришов Л.А. Формулы для расчета деформаций пирамидального купола // *Научный альманах*. 2016. № 11–2 (25). С. 315–318.

20. Tinkov D.V., Safonov A.A. Design optimization of truss bridge structures of composite materials // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2017. Vol. 46. No. 1. Pp. 46–52.

21. Астахов С.В. Вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы под действием нагрузки в середине пролета // *Строительство и архитектура*. 2017. Т. 5. № 2. С. 50–54.

Поступила в редакцию 28 августа 2017 г.

Принята в доработанном виде 15 января 2018 г.

Одобрена для публикации 20 марта 2018 г.

ОБ АВТОРЕ: **Кирсанов Михаил Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, **Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»)**, 111250, г. Москва, Красноказарменная ул., д. 14, C216@ya.ru.

## REFERENCES

1. Kirsanov N.M. *Visyachie pokrytiya proizvodstvennykh zdaniy* [Covers of the industrial buildings]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1990. 128 p. (In Russian)

2. Sophianopoulos D.S., Michaltsos G.T. Nonlinear stability of a simplified model for the simulation of double suspension roofs. *Engineering Structures*. 2001, vol. 23, no. 6, pp. 705–714.

3. Shimanovskiy A.V., Tsykhanovskiy V.K. *Teoriya i raschet sil'nonlineynykh konstruksiy* [Theory and analysis of nonlinear structures]. Kiev, Stal' Publ., 2005. 432 p. (In Russian)

4. Mushchanov V., Gorokhov Y., Vardanyan A. et al. Particular features of calculation and design of long-span membrane roofs. *Procedia Engineering*. 2015, vol. 117, pp. 990–1000.

5. Rumlová J., Fojtík R. The timber truss: The studying of the behaviour of the spatial framework joint. *Perspectives in Science*. March 2016, vol. 7, pp. 299–303.

6. Kirsanov M.N. Stress state and deformation of a rectangular spatial rod cover. *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture*. 2016, vol. 31, no. 3, pp. 71–79.

7. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. *Magazine of Civil Engineering*. 2016, no. 4, pp. 52–58.

8. Kirsanov M.N. Analiticheskoe issledovanie zhestkosti prostranstvennoy staticheski opredelimoj fermy [Analytical study on the rigidity of statically

determinate spatial truss]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of the Moscow State University of Civil Engineering]. 2017, vol. 12, issue 2 (101), pp. 165–171. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.2.165-171. (In Russian)

9. Domanov E.V. Analiticheskaya zavisimost' progiba prostranstvennoy konsoli treugol'nogo profilya ot chisla paneley [Analytical dependence of the deflection spatial console triangular profile of the number of panels]. *Nauchnyy al'manakh* [Science Almanac]. 2016, no. 6–2 (19), pp. 214–217. (In Russian)

10. Voropai R.A., Kirsanov M.N. On the deformation of spatial cantilever trusses under the action of lateral loads. *Science Almanac*. 2016, no. 9–2(23), pp. 17–20.

11. Marutyán A.S., Pavlenko Yu.I. Priblizhennyy raschet perekrestnykh sistem na staticheskie vozdeystviya [Approximate calculation of the cross-systems on static exposure]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. 2009, no. 4, pp. 14–20. (In Russian)

12. Marutyán A.S. *Legkie metallokonstruksii iz perekrestnykh sistem* [Lightweight metal structures from cross systems]. Pyatigorsk, Izd-vo RIA KMV, 2009. 348 p. (In Russian)

13. Marutyán A.S., Grigor'yan M.B., Glukhov S.A. Prostranstvennyye reshchatye nesushchie konstruksii (moduli tipa «Pyatigorsk»-2) [Spatial lattice supporting structures (modules of type “Pyatigorsk”-2)]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Struc-

tural Mechanics and Analysis of Constructions]. 2014, no. 1, pp. 64–71. (In Russian)

14. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005, vol. 85, no. 9, pp. 607–617.

15. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006, vol. 54, no. 4, pp. 756–782.

16. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016, vol. 96, pp. 184–203.

17. Tin'kov D.V. Sravnitel'nyy analiz analiticheskikh resheniy zadachi o progibe fermennykh konstruktsey [Comparative analysis of analytical solutions of a problem of deflection of truss structures]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal* [Magazine of Civil Engineering]. 2015, no. 5 (57), pp. 66–73. (In Russian)

18. Kirsanov M.N. Raschet prostranstvennoy sterzhnevoy sistemy, dopuskayushchey mgnovennuyu

izmenyaemost' [Calculation of a spatial frame system capable of instant variability]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. 2012, no. 3, pp. 48–51. (In Russian)

19. Ershov L.A. Formuly dlya rascheta deformatsiy piramidal'nogo kupola [Formula for calculating the deformations of a pyramidal dome]. *Nauchnyy al'manakh* [Science Almanac]. 2016, no. 11–2 (25), pp. 315–318. (In Russian)

20. Tinkov D.V., Safonov A.A. Design optimization of truss bridge structures of composite materials. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2017, vol. 46, no. 1, pp. 46–52.

21. Astakhov S.V. Vyvod formuly dlya progiba vneshe staticheski neopredelimoj ploskoy fermy pod deystviem nagruzki v seredine proleta [Derivation of formula for deflection of statically indeterminate externally flat truss under load at midspan]. *Stroitel'stvo i arkhitektura* [Construction and Architecture]. 2017, vol. 5, no. 2, pp. 50–54. (In Russian)

Received August 28, 2017.

Adopted in final form on January 15, 2018.

Approved for publication on March 20, 2018.

ABOUT THE AUTHOR: **Kirsanov Mikhail Nikolaevich** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, **National Research University, "Moscow Power Engineering Institute" (MPEI)**, 14 Krasnokazarmennaya str., Moscow, 111250, Russian Federation; C216@ya.ru.