

М.Н. КИРСАНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф., В.М. ОВСЯННИКОВА, студентка,
НИИ МЭИ; e-mail: mpei2004@yandex.ru

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОГИБА БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ В СИСТЕМЕ MARLE

Цель. Плоская статически определимая симметричная ферма с восходящими раскосами и крестообразным соединением частей в середине загружена равномерной нагрузкой по узлам верхнего пояса. Очертание верхнего пояса трапециевидальное – крайние панели скошены. Находится зависимость прогиба (вертикальное смещение середины пролета) от числа панелей.

Метод. Усилия в стержнях определяются по программе в системе символьной математики Maple на основе метода вырезания узлов. Уравнения равновесия всех узлов, в которые входят и реакции опор, решаются в матричном виде с использованием метода обратной матрицы, что сокращает время счета и делает программу более гибкой к смене нагрузки. Прогиб фермы с заданным числом панелей находится по формуле Максвелла–Мора с учетом равенства жесткостей всех стержней. Далее последовательные решения при разных числах панелей обобщаются методом индукции. Применяются операторы Maple для составления и решения рекуррентных уравнений для коэффициентов искомой формулы. Для получения результата потребовалось проанализировать двенадцать ферм.

Результаты. Получена формула с коэффициентами полиномиального вида степени не выше четвертой. Построены графики решения при разных значениях параметров задачи. Некоторые графики обнаруживают экстремальные точки, позволяющие оптимизировать ферму для увеличения ее жесткости. Выявлена асимптотика решения. Найдена зависимость смещения опоры от числа панелей.

Ключевые слова: балочная ферма, прогиб, Maple, индукция, число панелей, асимптотика.

Постановка задачи. Численные расчеты строительных конструкций весьма универсальны, точны и могут быть применимы к большинству моделей с различными характеристиками и нагрузками [1, 2]. Однако численные расчеты в отличие от аналитических не всегда могут уловить все закономерности изменения расчетных характеристик (жесткость, прочность, частоты колебаний) при изменении параметров модели, и особенно асимптотику решения. Недостатком же аналитических методов является трудность их получения в общем случае. Более того, для большинства моделей эти решения недоступны. Существенным упрощением при получении конечных формул является регулярность конструкции. В фермах и стержневых системах плоского и пространственного типа на это впервые обратили внимание Hutchinson R.G., Fleck N.A., Guest S.D., [3–5], Игнатьев В.А. [6], Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. [7]. Решения задач о прогибе плоских ферм [8–12] и пространственных ферм [13, 14] были получены методом индукции с применением операторов системы компьютерной математики Maple [15–21]. В настоящей работе разыскивается формула для прогиба плоской фермы, особенностью которой является некоторое нарушение регулярности скосом боковых панелей и крестообразное соединение в средней панели фермы (рис. 1).

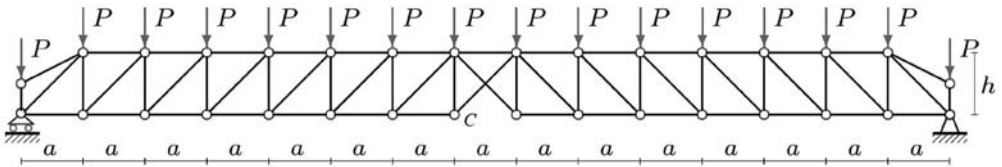


Рис. 1. Ферма, нагрузка по верхнему поясу, $n = 7$

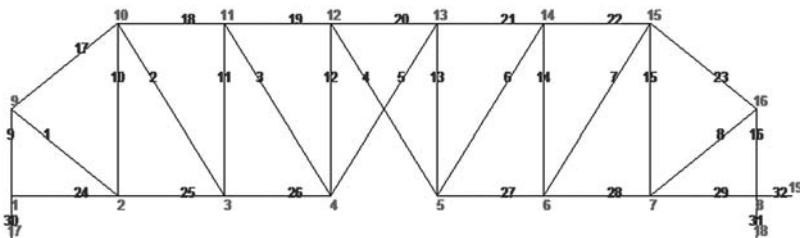


Рис. 2. Нумерация узлов (шарниров) и стержней при $n = 3$

Расчетная модель

Математическая модель фермы создается в программе на языке Maple. Ввод данных состоит из двух основных частей — ввода координат узлов и ввода порядка соединения стержней поясов и решетки. Узлы фермы и стержни нумеруются (рис. 2). Всего в ферме $K = 8(n + 1)$ стержней.

Выбирая начало координат в подвижной левой опоре, в одном цикле вводим координаты всех узлов, кроме трех опорных:

```
> for i to 2*n+2 do
  x[i]:=a*i-a: y[i]:=0:
  x[i+2*n+2]:=a*i-a: y[i+2*n+2]:=h:
od:
```

Порядок соединения стержней управляется специальными списками $N[i]$ с номерами стержней и номерами узлов, к которым они присоединены. Раскосы, например, вводятся следующим образом:

```
> for i to n+1 do
> N[i]:=[i+1, i+2*n+2];
> N[i+n+1]:=[i+n, i+3*n+3];
> od:
```

Матрица уравнений равновесия узлов формируется из направляющих косинусов усилий, значения которых получаются из введенной геометрии узлов и порядка соединения стержней. Решение системы уравнений дает реакции опор и усилия во всех стержнях в аналитической форме.

Прогиб

Формулы для усилий используются для определения прогиба Δ конструкции по формуле Максвелла–Мора

$$\Delta = \sum_{k=1}^{K-3} \frac{S_k s_k l_k}{EF}. \quad (1)$$

Сумма составлена по всем деформируемым стержням фермы, кроме трех, моделирующих опоры.

Использованы обозначения: S_k — усилие в стержне фермы с номером k от действия приложенной равномерной нагрузки, s_k — усилие от действия безразмерной единичной вертикальной силы, приложенной к узлу C в левом узле средней крестообразной панели, где определяется прогиб. Площади поперечных сечений F и модули упругости E всех стержней приняты одинаковыми. Выборочный расчет ферм с разным числом панелей показал, что вид расчетной итоговой формулы для прогиба не меняется:

$$\Delta(n) = \frac{P(a^3 A + h^3 H + c^3 C + d^3 D)}{4h^2 EF}, \quad (2)$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $d = \sqrt{4a^2 + h^2}$. Коэффициенты A , H , C и D зависят от числа панелей в ферме. Покажем, например, вывод зависимости коэффициента A от n . Последовательно рассчитывая фермы с числом панелей $n = 1, 2, \dots, 10$, получаем последовательность 8, 80, 308, 824, 1800, 3448, 6020, 9808, 15144, 22400. Выделить коэффициент из решения позволяет оператор coeff. Другой оператор `rgf_findresug` по этим данным (их должно быть четное число) возвращает рекуррентное уравнение, порядок которого в два раза меньше длины последовательности, минимальной для решения задачи. Заметим, что меньшее число элементов последовательности не позволяет найти рекуррентное уравнение, имеющее правдоподобное решение. Это уравнение однородное, линейное и имеет вид:

$$A_n = 5A_{n-1} - 10A_{n-2} + 10A_{n-3} - 5A_{n-4} + A_{n-5}.$$

Решение уравнения с пятью начальными значениями $A_1 = 8$, $A_2 = 80$, $A_3 = 308$, $A_4 = 824$, $A_5 = 1800$ дает оператор `rsolve`

$$A = (5n^4 + 16n^3 + 13n^2 - 10)n / 3.$$

Таким же образом находятся и другие коэффициенты $H = 2n^3 + 4n^2 + 5n - 2$, $C = 2n^3 + 4n^2 - 2n$, $D = n$. Рекуррентные уравнения для C и H имеют четвертый порядок, а коэффициент D очевиден и не требует привлечения Maple. Эти зависимости вместе с формулой (2) и дают решение поставленной задачи. Теперь при любом, пусть даже очень большом числе панелей, можно в рам-

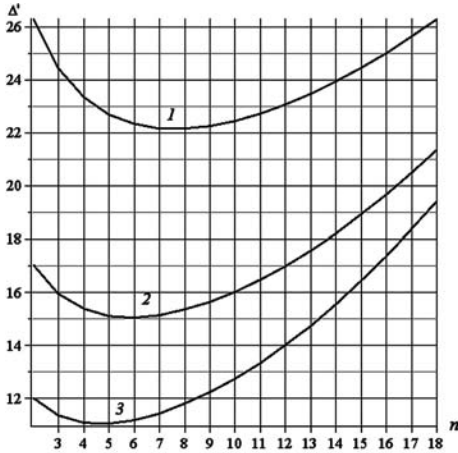


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей n при разных высотах h , $L = 100$ м, 1: $h = 4$ м; 2: $h = 5$ м; 3: $h = 6$ м.

линейно уменьшается с увеличением h . Критическое значение n также меняется, сдвигаясь к началу координат.

Аналогичные кривые, имеющие экстремум, отображены на рисунке 4, на котором эта же зависимость дана для разных пролетов при постоянной высоте фермы.

Интересен эффект самопересечения кривых зависимости прогиба от высоты при разных величинах пролета (рис. 5). Пересечение кривых означает несколько неожиданный результат: фермы с разной длиной пролета, но одинаковой высотой, имеют одинаковый прогиб. Здесь прослеживается линейная асимптота:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \Delta' / h = (2n^3 + 4n^2 + 2n - 1) / (4L(n + 1)).$$

Горизонтальное смещение опоры

Смещением подвижной опоры под действием вертикальной нагрузки обычно пренебрегают. Однако смещение опоры бывает достаточно большим не только из-за температурных эффектов, но и за счет нагрузки. Используемая методика вывода формулы для прогиба, почти не меняя алгоритм, позволяет так же рассчитать и смещение δ . В формуле Максвелла–Мора (1) достаточно поменять усилия s_k от единичной вертикальной силы на усилия от единичной гори-

ках принятой модели получить точное решение, не зависящее ни от мощности компьютера, ни от погрешностей программного обеспечения, в котором реализуется численный метод. Другая цель получения точного формульного решения — его анализ. Построим графики безразмерного относительного прогиба от различных параметров задачи. Примем $\Delta' = \Delta EF / (P_s L)$, где $P_s = 2P(n + 1)$ — суммарная нагрузка, $a = L / (2n + 1)$ — длина панели при фиксированном пролете L . На рисунке 3 приведена зависимость прогиба от числа панелей, обнаруживающая явно выраженный минимум. Найти аналитически эту точку не удастся, однако асимптотика этих кривых может быть получена средствами Maple. Имеем квадратичную зависимость при больших n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^2 = h / (2L).$$

Этот график также показывает, что величина прогиба заметно зависит от высоты фермы и не-

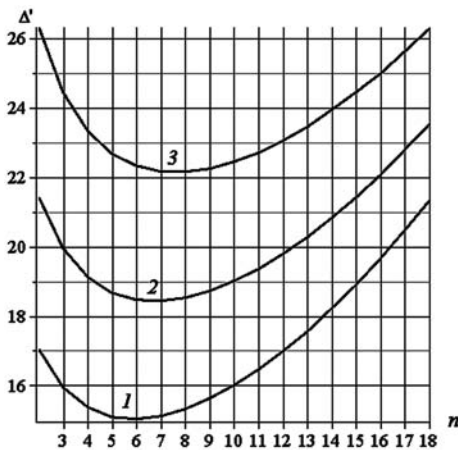


Рис. 4. Зависимость прогиба от числа панелей n при разных пролетах L , $h = 4$ м, 1: $L = 80$ м; 2: $L = 90$ м; 3: $L = 100$ м

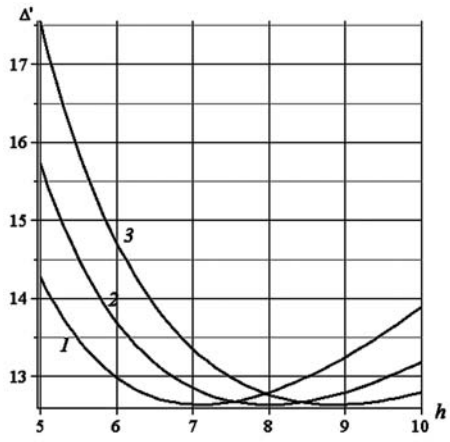


Рис. 5. Зависимость прогиба от высоты при разных пролетах L , $n = 13$, 1: $L = 80$ м; 2: $L = 90$ м; 3: $L = 100$ м

зонтальной силы, приложенной к подвижной опоре. Опуская выкладки, приведем лишь ответ:

$$\delta = P(Aa^3 + Cc^3 + Hh^3)/(3haEF), \quad (3)$$

$$A = 2n^3 + 3n^2 + n, \quad C = 3n(n+1), \quad H = 3(n^2 + n + 2).$$

Длина d в это решение не входит, а степени полинома меньше на единицу.

Заключение

Индуктивным методом выведены формулы зависимости прогиба плоской фермы от числа панелей при равномерном нагружении. В силу ее особенности конструкция не имеет строго центрально расположенной точки на нижнем поясе, по вертикальному перемещению которой можно оценить прогиб. Выбрана точка, немного смещенная от центра, что по отношению к единичной нагрузке делает задачу несимметричной. Опыт решения аналогичных задач показывает, что это существенно усложняет решение, однако здесь удалось анализом сравнительно короткой последовательности решений вывести общую формулу. Для формулы (3) смещения подвижной опоры этой трудности не было, решение получилось очевидно проще. Анализ решений выявил линейную асимптотику по высоте и квадратичную по числу панелей. Такие асимптотики имеют скорее теоретическое значение и применимы для сравнения сходных схем по отношению к материалоемкости и жесткости. Очевидно, схема с линейным ростом прогиба предпочтительна схеме с нелинейным ростом, важны и коэффициенты в этих оценках. Примененный метод вывода формул использовался и в справочнике [22], где приведены формулы прогиба и смещения опор от действия различных нагрузок для более 70 плоских ферм.

Список литературы

1. Klowak C.S., Mufti A.A. Behaviour of bridge deck cantilever overhangs subjected to a static and fatigue concentrated load // *Construction and Building Materials*. 2009. Vol. 23. No 4. Pp. 1653-1664.
2. Shu J. et al. Assessment of a cantilever bridge deck slab using multi-level assessment strategy and decision support framework // *Engineering Structures*. 2019. Vol. 200. Pp. 109666.
3. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005. 85, No 9. Pp. 607-617.
4. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. No 4. Pp. 756-782.
5. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures // *J. Mech. Phys. Solids*. 2003. 51. Pp. 383-391.
6. Игнатъев В.А. Расчет регулярных стержневых систем. Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
7. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. Vol. 96. Pp. 184-203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>
8. Kirsanov M.N., Zaborskaya N. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // *Инженерно-строительный журнал*. – 2017. – № 3 (71). – С. 61–67.
9. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // *Architecture and Engineering*. 2016. V. 1. No 3. Pp. 14-17.
10. Тимофеева Т.А. Формулы для расчета прогиба плоской решетчатой рамы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. – 2019. – № 4 (23). – С. 26–33.
11. Петриченко Е.А. О прогибе консольной фермы с крестообразной решеткой в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей // *Научный альманах*. – 2016. – № 6-2 (19). – С. 279–266.
12. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // *Строительная механика и конструкции*. – 2018. – №. 1. – С. 12–33.
13. Ларичев С.А. Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. М: Инфра-М, 2015. – Т. 1. – С. 4–8.
14. Доманов Е.В. Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей // *Научный альманах*. – 2016. – № 6-2 (19). – С. 214–217.
15. Воробьев О.В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // *Строительная механика и конструкции*. – 2020. – № 1 (24). – С. 25–38.
16. Белянкин Н.А., Бойко А. Ю., Плясова А.А. Индуктивный анализ деформативности многорешетчатой фермы при несимметричном нагружении // *Строительная механика и конструкции*. – 2018. – № 3 (18). – С. 33–41.
17. Арутюнян В.Б. Формулы для расчета прогиба плоской раскосной фермы с параллельными поясами // *Строительная механика и конструкции*. – 2018. – № 4 (19). – С. 29–37.
18. Широков А.С. Аналитический расчет смещения опоры балочной фермы с верхними шпренгелями // *Строительная механика и конструкции*. – 2017. – № 2 (15). – С. 11–14.
19. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // *Строительная механика и конструкции*. – 2019. – № 1 (20). – С. 21–29.
20. Ткачук Г.Н. Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. – 2019. – № 2 (21). – С. 32–39.
21. Бойко А.Ю., Ткачук Г.Н. Вывод формул зависимости прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей в системе Maple // *Строительная механика и конструкции*. – 2019. – № 4 (23). – С. 15–25.
22. Kirsanov M.N. *Planar Trusses: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing. 2019. Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, NE6 2PA, UK ISBN (13): 978-1-5275-3531-2

ANALYTICAL CALCULATION OF GIRDER DEFLECTION IN THE MAPLE SYSTEM

M.N. Kirsanov, V. M. Ovsyannikova, National Research University Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russia; e-mail: mpei2004@yandex.ru

Abstract. A planar statically definable symmetrical truss with ascending struts and a cruciform junction of parts in the middle is loaded with a uniform load at the nodes of the upper belt. The outline of the upper belt is trapezoidal — the extreme panels are beveled. We are looking for the deflection dependence (vertical displacement of the middle of the span) from the number of panels. **Method.** The forces in the rods are determined by a program written in the Maple symbolic mathematics system based on the node-cutting method. The equilibrium equations of all nodes, which include the reaction of the supports, are solved in matrix form using the inverse matrix method, which reduces the counting time and makes the program more flexible to change the load. The deflection of a truss with a given number of panels is determined by the Maxwell-Mohr's formula, taking into account the equality of the stiffness of all the rods. Further, successive solutions for different numbers of panels are generalized by induction. Maple operators `r solve` and `rgf_findrecur` are used for composing and solving recurrent equations for coefficients of the desired formula. To get the result, it was necessary to analyze twelve trusses. **Results.** A formula with coefficients of the polynomial form of degree no higher than the fourth is obtained. Graphs of the solution are constructed for different values of the problem parameters. Some graphs detect extreme points that allow you to optimize the truss to increase its stiffness. The asymptotic behavior of the solution is revealed.

Key words: girder, deflection, Maple, induction, number of panels, asymptotics.

References

1. Klowak C. S., Mufti A. A. Behavior of bridge deck cantilever overhangs achieved to a static and fatigue concentrated load. *Construction and Building Materials*. 2009. 23. №. 4. Pp. 1653–1664.
2. Shu J. et al. Assessment of a cantilever bridge deck slab using multi-level assessment strategy and decision support framework. *Engineering Structures*. 2019. T. 200. Pp. 109666.
3. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech* 2005. 85, No 9. Pp. 607-617.
4. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. No 4. Pp. 756-782.
5. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures. *J. Mech. Phys. Solids*. 2003. 51. Pp. 383-391.
6. Ignatiev V.A. Calculation of regular core systems. Saratov: Saratov Higher Military Chemical Military School, 1973.
7. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. Vol. 96. Pp. 184-203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>
8. Kirsanov M.N., Zaborskaya N. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No 3 (71). Pp. 61-67.
9. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. *Architecture and Engineering*. 2016. Vol. 1. No 3. Pp. 14-17.
10. Timofeeva T.A. Formulas for calculating the deflection of a flat lattice frame with an arbitrary number of panels. *Construction mechanics and structures*. 2019. No 4 (23). Pp. 26-33.
11. Petrichenko E.A. On the deflection of a cantilever truss with a cross-shaped lattice depending on the redistribution of the areas of the rods and the number of panels. *Science almanac*. 2016. No 6-2 (19). Pp. 279-266.
12. Osadchenko N.V. Analytical solutions to the problems of deflection of flat trusses of arch type. *Structural Mechanics and Structures*. 2018. No 1. Pp. 12-33.
13. Larichev S.A. Inductive analysis of the effect of a building lift on the stiffness of a spatial beam truss. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. M: Infra-M*. 2015. Vol. 1. Pp. 4-8.
14. Domanov E.V. The analytical dependence of the deflection of the spatial console of a triangular profile on the number of panels. *Science almanac*. 2016. No 6-2 (19). Pp. 214-217.
15. Vorobyov O.V. On methods for obtaining an analytical solution for the problem of natural frequencies of hinged structures. *Structural Mechanics and Structures*. 2020. No 1 (24). Pp. 25-38.
16. Belyankin N.A., Boyko A.Yu., Plyasova A.A. Inductive analysis of the deformability of a multi-lattice truss under asymmetric loading. *Structural Mechanics and Structures*. 2018. No 3 (18). Pp. 33-41.
17. Arutyunyan V.B. Formulas for calculating the deflection of a flat diagonal truss with parallel belts. *Structural Mechanics and Structures*. 2018. No 4 (19). Pp. 29-37.
18. Shirokov A.S. Analytical calculation of the displacement of the support of the beam truss with upper trusses. *Structural Mechanics and Structures*. 2017. No 2 (15). Pp. 11-14.
19. Belyankin N.A., Boyko A.Yu. Formulas for deflection of a truss beam with an arbitrary number of panels with uniform loading. *Structural Mechanics and Structures*. 2019 No 1 (20). Pp. 21-29.
20. Tkachuk G.N. The formula for the dependence of the deflection of an asymmetrically loaded flat truss with reinforced braces on the number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2019. No 2 (21). Pp. 32-39.
21. Boyko A.Yu., Tkachuk G.N. Derivation of formulas for the dependence of the deflection of a flat hinged-rod frame on the number of panels in the Maple system. *Structural Mechanics and Structures*. 2019. No 4 (23). Pp. 15-25.
22. Kirsanov M.N. *Planar Trusses: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing. 2019. Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, NE6 2PA, UK ISBN (13): 978-1-5275-3531-2

Для цитирования: Кирсанов М.Н., Овсянникова В.М. Аналитический расчет прогиба балочной фермы в системе Maple // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2020. № 3. С. 15–19.
DOI: 10.37538/0039-2383.2020.3.15.19

For citation: Kirsanov M.N., Ovsyannikova V.M. Analytical calculation of girder deflection in the maple system. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, 2020, no. 3, pp. 15–19. (In Russian).
DOI: 10.37538/0039-2383.2020.3.15.19