

Полная длина области предельного состояния льда на границе слоя (рис. 5) $CC' = 2(\alpha + 2\beta) \approx 2$ м.

Выводы

Проведенные решения выполнены для сравнительно тонкого ледяного поля в котором действующие на него усилия не вызывают перемещений из плоскости.

При значительной толщине ледового поля, имеет место другой режим прохождения его ледоколом, характеризующийся надвижением носовой части ледокола на границу слоя льда и обрушением определенного участка ледового массива. Этот случай соответствует задаче о действии вертикальной сосредоточенной силы, приложенной на контуре толстой пластины — границе слоя льда, из плоскости x, y .

Литература

1. *Тениев Г.А., Пятикрестовский К.П., Колчунов В.И., Клюева Н.В.* Критерий прочности льда для сложного напряженного состояния. — М.: Изв. вузов. Строительство, 2003. № 11. С. 20—23.
2. *Савинов А.М.* Прочность строительного льда при различной температуре / Тр. координационных совещаний по гидротехнике. — М.; Л.: Энергия, 1966. Вып. 33. С. 70.
3. *Якунин А.Е.* Экспериментальные исследования несущей способности ледового покрова // Лед — строительный материал / Тр. координационных совещаний по гидротехнике. — М.; Л.: Энергия, 1966. Вып. 33. С. 32—42.
4. *Тениев Г.А., Пятикрестовский К.П., Колчунов В.И., Клюева Н.В.* Критерий прочности льда при плоском напряженном состоянии. — М.: Изв. Вузов. Строительство, 2004. № 9. С. 17—20.

Literatura

1. *Geniev G.A., Pyatikrestovskiy K.P., Kolchunov V.I., Klyueva N.V.* Kriteriy prochnosti lida dlya slozhnogo napryazhennogo sostoyaniya. — М.: Izv. vuzov. Stroitelstvo, 2003. № 11. S. 20—23.
2. *Savinov A.M.* Prochnost stroitel'nogo lida pri razlichnoy temperature / Tr. koordinatsionnykh soveschaniy po gidrotehnike. — М.; L.: Energiya, 1966. Vyip. 33. S. 70.
3. *Yakunin A.E.* Eksperimentalnyye issledovaniya nesuschey sposobnosti ledovogo pokrova // Led — stroitel'nyy material / Tr. koordinatsionnykh soveschaniy po gidrotehnike. — М.; L.: Energiya, 1966. Vyip. 33. S. 32—42.
4. *Geniev G.A., Pyatikrestovskiy K.P., Kolchunov V.I., Klyueva N.V.* Kriteriy prochnosti lida pri ploskom napryazhennom sostoyanii. — М.: Izv. Vuzov. Stroitelstvo, 2004. № 9. S. 17—20.

УДК 624.04

М.Н. КИРСАНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф., **А.С. СТЕПАНОВ**, канд. техн. наук, доц.
НИУ МЭИ, г. Москва, Россия

О ЗАВИСИМОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ ПЛОСКОЙ АРОЧНОЙ ФЕРМЫ ОТ ЧИСЛА ПАНЕЛЕЙ

Приводится вывод формулы для прогиба и смещения подвижной опоры статически определимой фермы, состоящей из ригеля и двух боковых опорных ферменных частей. Конструкция равномерно нагружена вертикальными силами по узлам верхнего пояса. Алгоритм вывода точных зависимостей деформаций фермы от ее размеров, нагрузки и чисел панелей базируется на методах системы компьютерной математики Maple и двойной индукции, проведенной последовательно для чисел панелей в каждой из частей фермы. Вместе с формулами для смещений находятся и выражения для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях верхнего и нижнего поясов. В программе, написанной на языке символьной математики, используется метод вырезания узлов, приводящий к решению системы линейных уравнений. Прогиб вычислен по формуле Максвелла — Мора. Предполагается, что жесткости всех стержней одинаковы. Обобщение решений на произвольное число панелей основано на том, что конструкция регулярная и коэффициенты искомой формулы удовлетворяют линейным рекуррентным уравнениям, для решения которых используются операторы компьютерной математики. Искомые общие зависимости деформаций от чисел панелей получаются в виде полиномов по этим числам. Построенные кривые зависимости прогиба от высоты фермы имеют экстремальные точки, позволяющие оптимизировать ферму по весу и жесткости.

Ключевые слова: аровая ферма, прогиб, Maple, двойная индукция, число панелей.

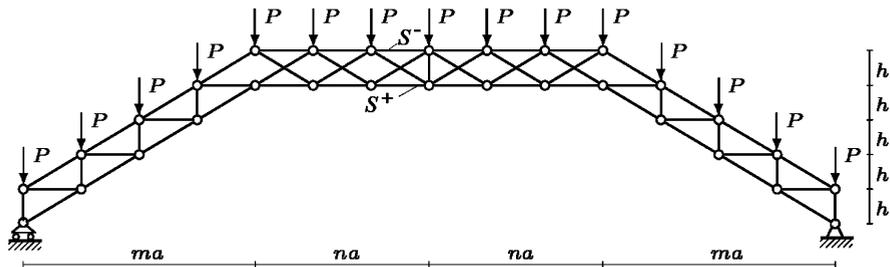


Рис. 1. Ферма, $n = 3, m = 4$

Постановка задачи

Существующие в инженерной практике численные алгоритмы, на которых базируются стандартные пакеты для расчетов строительных конструкций, позволяют решить широкий класс задач о деформированном и напряженном состоянии конструкций при различных нагрузках и условиях работы. Современная вычислительная техника имеет достаточно высокие характеристики для получения численных решений самых сложных задач строительной механики [1, 2]. Одновременно с численными методами для решений задач строительной механики всегда применялись и аналитические методы расчета, на первых порах в основном приближенные (например, формула Качурина [3, 4]). Не все аналитические методы [5, 6] позволяют получать компактные формулы, пригодные для практического применения. В последнее время с появлением систем символьных вычислений (Reduce, Mathematica, Maple и др.) получил распространение индуктивный метод вывода формул для прогиба и усилий в характерных стержнях в задачах о плоских [7–13] и пространственных фермах периодической структуры [14, 15] с произвольным числом панелей. В большинстве задач сложность геометрии фермы определялась в основном одним натуральным числом — числом панелей. Решенные задачи с двумя параметрами, определяющими пропорции сооружения, встречаются реже [16]. В предлагаемой конструкции статически определимой арочной фермы (рис. 1), помимо геометрических параметров a и h , содержатся два параметра: число панелей в боковых частях m и число панелей в ригеле $2n$.

Ферма составлена из трех частей. Боковые наклонные части имеют треугольную решетку, средняя горизонтальная часть имеет крестообразную решетку с центральной стойкой. Ставится задача получения зависимостей прогиба фермы и смещения ее подвижной опоры от числа панелей.

Расчет усилий

В конструкции фермы содержится $4(m + n) + 2$ шарниров и $n_s = 8(m + n) + 4$ стержней. Рассмотрим равномерное нагружение узлов верхнего пояса вертикальными силами P . Используем программу [17] для определения усилий в стержнях фермы. В алгоритм, реализованный на языке символьной математики Maple, заложен метод вырезания узлов. Стержни фермы предполагаются упругими с модулем упругости E . Приняты одинаковые площади сечений стержней F . Шарниры и стержни фермы нумеруются (рис. 2).

Начало координат расположено в левой шарнирной опоре (узел 1). Сначала нижний пояс нумеруется слева направо, затем нумеруются узлы верхнего пояса:

$$\begin{aligned}
 x_i &= ai - a, & y_i &= hi - h, \\
 x_{i+2n+m+1} &= x_{i+4n+3m+2} = a(i + 2n + m), & y_{i+2n+m+1} &= h(m - i), \\
 x_{i+2n+2m+1} &= x_i, & y_{i+2n+2m+1} &= y_i + h, y_{i+4n+3m+2} = h(m - i + 1), & i &= 1, \dots, m, \\
 x_{i+m} &= x_{i+2n+3m+1} = a(i + m - 1), & y_{i+m} &= hm, \\
 y_{i+2n+3m+1} &= h(m + 1), & i &= 1, \dots, 2n + 1.
 \end{aligned}$$

Схема решетки фермы задается условными векторами $\bar{N}_i, i = 1, \dots, m$ по аналогии с заданием графа. Компонентами этих векторов являются номера шарниров — концов соответствующих стержней. Стержни нижнего пояса, например, соответствуют следующим векторам: $\bar{N}_i = [i, i + 1], i = 1, \dots, 2n + 2m$. Матрица G системы уравнений метода вырезания узлов составля-

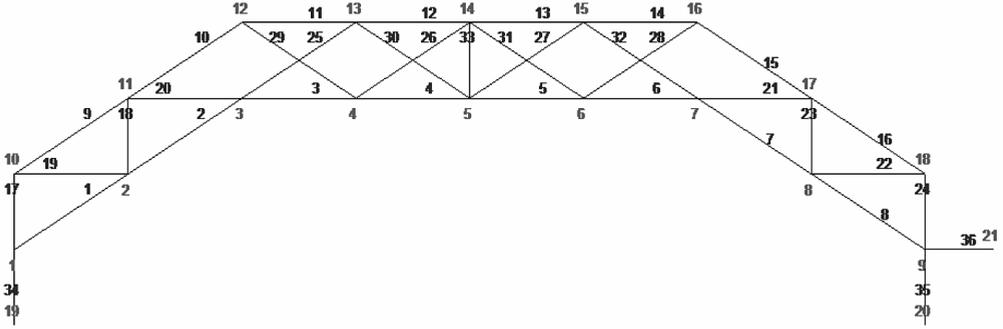


Рис. 2. Нумерация узлов, $n = 2, m = 2$

ется из направляющих косинусов стержней. Для их вычисления используются данные о координатах узлов и порядке их соединения со стержнями, который определяется векторами $\bar{N}_i, i = 1, \dots, n_s$. Коэффициенты уравнений проекций на ось x записываются в нечетные строки матрицы, на ось y — в четные.

Прогиб

Прогиб фермы (вертикальное смещение шарнира с номером $(n + m + 1)$ в середине нижнего пояса) определяется с помощью интеграла Мора

$$\Delta = \frac{1}{EF} \sum_{i=1}^{n_s-3} S_i s_i l_i, \quad (1)$$

где S_i, s_i — усилия в i -м стержне фермы от приложенной нагрузки и от единичной вертикальной силы, приложенной к центральному узлу нижнего пояса, соответственно. Суммирование ведется по всем стержням фермы, кроме трех опорных, которые предполагаются недеформируемыми. Последовательное решение задачи с использованием системы символической математики для ферм с различными m и n дает следующее общее для всех ферм выражение прогиба

$$\Delta = P \frac{A_{n,m} a^3 + B_{n,m} h^3 + C_{n,m} c^3}{2h^2 EF}, \quad (2)$$

где введено обозначение $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Определение коэффициентов $A_{n,m}, B_{n,m}$ и $C_{n,m}$ как функций m и n — основная часть поставленной задачи. Для получения формулы с произвольными числами m и n необходимо провести индукцию в два этапа. Сначала при фиксированном числе панелей в боковых частях получаются формулы для прогиба ферм с различным числом $n = 1, 2, 3, \dots$. Коэффициенты в этих формулах образуют последовательности, для которых с помощью оператора **rgf_findrecur** системы Maple находятся соответствующие однородные линейные рекуррентные уравнения. Например, для $A_{n,m}$ имеем уравнение шестого порядка при любом m :

$$A_{n,m} = 4A_{n-1,m} - 5A_{n-2,m} + 5A_{n-4,m} + 4A_{n-5,m} + A_{n-6,m}. \quad (3)$$

Решения этих уравнений, выявляющие закономерность образования коэффициентов, дает оператор **rsolve**. Получается зависимость коэффициентов $A_{n,m}, B_{n,m}$ и $C_{n,m}$ от n при $m = 1$. Затем процедура повторяется для $m = 2, 3, 4, \dots$ и получаются соответствующие формулы:

$$\begin{aligned} A_{n,1} &= n^3 / 3 + (1 - 3(-1)^n) n^2 / 4 + (11 - 3(-1)^n) n / 12 + (1 - (-1)^n) / 4, \\ A_{n,2} &= n^3 / 3 + (1 - 5(-1)^n) n^2 / 8 + (35 - 3(-1)^n) n / 48 + (1 - (-1)^n) / 4, \\ A_{n,3} &= n^3 / 3 + (1 - 7(-1)^n) n^2 / 12 + (25 - (-1)^n) n / 36 + (1 - (-1)^n) / 4, \\ &\dots \\ A_{n,8} &= n^3 / 3 + (1 - 17(-1)^n) n^2 / 32 + (515 - 3(-1)^n) n / 768 + (1 - (-1)^n) / 4. \end{aligned}$$

Затем с помощью тех же операторов находится обобщение полученных формул по числу боковых панелей m . Составляются последовательности коэффициентов в формулах для $A_{n,m}$ при степенях n . В результате получаем окончательное выражение для коэффициента $A_{n,m}$:

$$A_{n,m} = (5n^4 + 20n^3m + (4 + 54m^2 - 24m)n^2 + 2(3 + 12m^3 - 3m^2 - m)n + 3m(2m - 1) + 3(1 - (-1)^n)/2 + 3(-1)^n m)/6.$$

Аналогично получаются и другие коэффициенты формулы (1):

$$C_{n,m} = ((24m^2 - 24m + 9)n^2 + 2(10m^3 - 3m^2 - 4m + 3)n + 5m^4 + m^2 - 3m + 3(1 - (-1)^n)/2 + 3(-1)^n m)/6.$$

$$B_{n,m} = ((2m - 1)(-1)^n - 1) + 4m^2)n + 2m^3 + (-1)^n(m^2 - 1) + 1.$$

Смещение опоры

В балочных фермах с прямолинейными поясами смещение подвижной опоры незначительно. В арочной же ферме эта величина может быть достаточно большой и создавать определенные трудности при эксплуатации сооружения. Приведенный выше алгоритм вывода формулы для прогиба может быть применен при решении этой задачи, тем более, что сама математическая модель фермы остается без изменения. Меняется только вектор усилий в интеграле Мора (1). Теперь s_i — усилия в i -м стержне фермы от единичной горизонтальной силы, приложенной к подвижной опоре. Опуская выкладки, приведем окончательное выражение для величины смещения

$$\Delta = P \frac{A_{n,m}a^3 + B_{n,m}h^3 + C_{n,m}c^3}{ahEF},$$

где

$$A_{n,m} = 2(2m + 1)n^3/3 + 8n^2m^2 + (5/6 + 4m^3 + m^2 - 4m/3 + (-1)^n(2m - 1)/2)n + (1 + m^2 - m)/2 + (-1)^n(m^2 + m - 1)/2,$$

$$B_{n,m} = 4(n + 2m + 1)m^2,$$

$$C_{n,m} = 2n^2m(2m - 1) + nm(m + 1)(10m - 7)/3 + (-1)^n m/2 + 5m^4/6 + (2m^2 - m - 2)m/3.$$

Усилия в критических стержнях

Рассчитывая сооружение на прочность и устойчивость его элементов, полезно иметь аналитические выражения для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях. Расчет показывает, что это усилие S^- в среднем стержне с номером $3(n + m)$ верхнего пояса (рис. 1) и усилие S^+ в стержне с номером $n + m$ нижнего пояса. Двойная индукция дает следующие значения

$$S^- = -P(n^2/2 + (m^2 - 1)(1 - (-1)^n)/2 + (m - (2m - 1)(-1)^n/2)n)a/h,$$

$$S^+ = P(n^2 + m^2 + (m^2 - 1)(-1)^n + (2m + (2m - 1)(-1)^n)n)a/h.$$

Анализ

Проанализируем, как зависят усилия в наиболее сжатых и растянутых стержнях в зависимости от соотношения чисел панелей в боковых и центральной частях при постоянной длине пролета $L = 2(n + m)a$ и заданной сумме $n + m$. На рис. 3 даны эти зависимости для относительных величин $S' = S/P_s$, где $P_s = (2n + 2m + 1)P$ — суммарная нагрузка на ферму, $L = 100$ м и $n + m = 14$.

Аналитическое решение позволило выявить интересную особенность конструкции. Резкие скачки усилий в зависимости от соотношения m и n указывают на возможность оптимизации конструкции. Достаточно, например, увеличить число панелей в ригеле на одну и уменьшить на одну число панелей в боковых частях, чтобы критические значения резко увеличились. Это изменение может быть весьма значительным. На этот эффект указывают “мигающие” слагаемые с сомножителем $(-1)^n$ в выражениях для усилий.

Зависимость безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (P_s L)$, построенная по формуле (2) от высоты панели обнаруживает минимум. Графики построены при $L = 30$ м, размер h в метрах. Ферма при более длинном ригеле оказывается более жесткой, но минимум более выражен при малых n .

Ход кривых подсказывает наличие асимптот. В системе Марле при условии $L = 2(n + m)a$ и $P_s = (2n + 2m + 1)P$ можно получить следующие теоретические пределы для безразмерного прогиба:

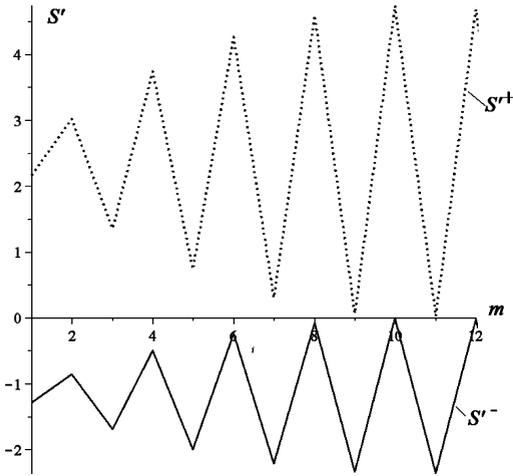


Рис. 3. Зависимость усилий в критических стержнях от соотношения чисел панелей

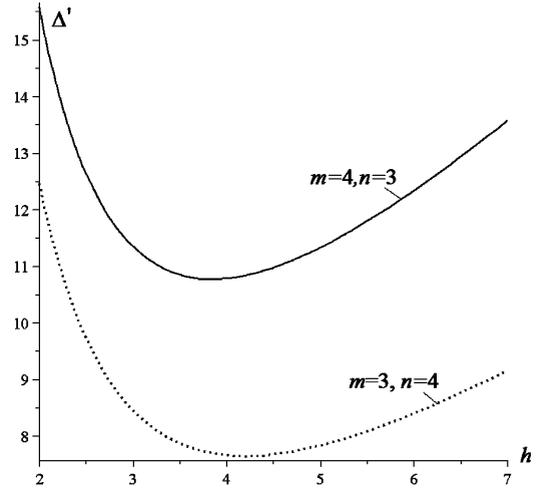


Рис. 4. Зависимость прогиба от высоты панели

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = h(3 + 8m^2 - 8m) / (8L), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \Delta' / m^3 = 5h / (24L).$$

Несмотря на несколько абстрактный характер этих результатов, они выявляют существенно различную роль величин m и n в решении задачи. Если рост прогиба в зависимости от числа панелей в ригеле при постоянной величине m почти линейный, то с увеличением m кривая приближается к кубической параболе. Можно также вычислить предел при $n = m$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^3 = 49h / (48L)$.

Выводы

Вывод аналитических выражений для прогиба и усилий в отдельных стержнях с индукцией по двум параметрам значительно сложнее, чем индукция по одному параметру. Фактически, решение такой задачи эквивалентно по трудоемкости нескольким задачам с одним параметром. В символьной моде даже достаточно мощный современный компьютер с задачей, в которой каждый из параметров приближается к 10–20, работает на пределе своих возможностей и требует значительного времени. Однако такие затраты оправданы. Итоговая формула легко проверяется в численной моде и получается существенно универсальной. Спектр конструкций, для которых она применима, значительно шире. Кроме того, анализ решений, в частности асимптотический, может выявить ряд скрытых особенностей конструкции.

Расчитанная ферма представляет простейшую статически определимую модель реальной конструкции. Введение дополнительных связей (например, стоек 3–12, 7–16, рис. 2) сделает систему статически неопределимой и более жесткой, но полученные формулы останутся справедливыми, играя роль верхних оценок для усиленной конструкции. В любом случае, при расчете статически неопределимой системы методом сил основная система статически определима, и для нее годится приведенное решение. Другим очевидным преимуществом аналитического решения является его точность особенно при значительном числе панелей, где численные методы неизбежно имеют эффект накопления ошибок округления.

Литература

1. Кургузов В.Д. О численном решении геометрически нелинейных задач строит ельной механики // Известия высших учебных заведений. Строительство, 2009. № 3-4. С. 14–22.
2. Дмитриева Т.Л., Ле Ч.М.Д. Использование программного комплекса Ansys для решения задач оптимизации ферм // Проблемы оптимального проектирования сооружений: докл. 3-й Всерос. конф. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. арх.-стр. ун-та, 2014. С. 128–135.
3. Металлические конструкции. Специальный курс /Н. С. Стрелецкий, Е.И. Беленя, Г.С. Ведеников, Е.Н. Лессиг, К. К. Муханов. — М.: Издательство литературы по строительству, 1965. — 368 с.
4. Качурин В.К. О прогибе мостовых ферм. Сб. №17. Отделение инженерных исследований НТК НКПС, 1928.

5. Рыбаков Л.С. Линейная теория плоского призматического каркаса // Известия Российской Академии наук. Сер. Механика твердого тела, 2001. № 4. С. 106—118.
6. Рыбаков Л.С. Линейная теория плоской ортогональной решетки // Известия Российской Академии наук. Сер. Механика твердого тела, 1999. № 4. С. 174—189.
7. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал, 2012. № 5(31). С. 38—42.
8. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения, 2015. № 8. С. 49—51.
9. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал, 2015. №5 (57). С. 58—65. doi: 10.5862/MCE.57.
10. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений, 2015. № 3. С. 7—11.
11. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61—68.
12. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load // Science Almanac. 2016. N 4-3(18). С. 257—259.
13. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник, 2016. № 1 (7). С. 247—254.
14. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. Magazine of Civil Engineering, 2016. No. 4. Pp. 52—58. doi: 10.5862/MCE.64.
15. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник ВГАСУ. Строительство и архитектура. 2016. №1 (41). С. 93—100.
16. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций, 2016. № 1—4 (5). С. 6—7.
17. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. — 512 с.

Literatura

1. Kurguzov V.D. O chislennom reshenii geometricheski nelineynykh zadach stroitelnoy mehaniki // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Stroitelstvo, 2009. № 3-4. S. 14—22.
2. Dmitrieva T.L., Le Ch.M.D. Ispolzovanie programmnoy kompleksa Ansys dlya resheniya zadach optimizatsii ferm // Problemy optimalnogo proektirovaniya sooruzheniy: dokl. 3-y Vseros. konf. — Novosibirsk: Izd-vo Novosib. gos. arh.-str. un-ta, 2014. S. 128—135.
3. Metallicheskie konstruksii. Spetsialnyy kurs /N. S. Streletskiy, E.I. Belenya, G.S. Vedenikov, E.N. Lessig, K. K. Muhanov. — M.: Izdatelstvo literatury po stroitelstvu, 1965. — 368 s.
4. Kachurin V.K. O progibe mostovykh ferm. Sb. №17. Otdelenie inzhenernykh issledovaniy NTK NKPS, 1928.
5. Rybakov L.S. Lineynaya teoriya ploskogo prizmaticheskogo karkasa // Izvestiya Rossiyskoy Akademii nauk. Ser. Mehanika tverdogo tela, 2001. № 4. S. 106—118.
6. Rybakov L.S. Lineynaya teoriya ploskoy ortogonalnoy reshetki // Izvestiya Rossiyskoy Akademii nauk. Ser. Mehanika tverdogo tela, 1999. № 4. S. 174—189.
7. Kirsanov M.N. Induktivnyy analiz vliyaniya pogreshnosti montazha na zhestkost i prochnost ploskoy fermi // Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal, 2012. № 5(31). S. 38—42.
8. Kirsanov M.N. Raschet zhestkosti stержnevoy reshetki // Vestnik mashinostroeniya, 2015. № 8. S. 49—51.
9. Kirsanov M.N. Analiz progiba reshetchatoy balochnoy fermi raspornogo tipa // Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal, 2015. №5 (57). S. 58—65. doi: 10.5862/MCE.57.
10. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet balochnoy fermi so slozhnoy reshetkoy // Stroitel'naya mehanika i raschet sooruzheniy, 2015. № 3. S. 7—11.
11. Kirsanov M.N. Staticheskiy analiz i montazhnaya shema ploskoy fermi // Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova. 2016. №5 (39). С. 61—68.
12. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load // Science Almanac. 2016. N 4-3(18). S. 257—259.
13. Kiyko L.K. Analiticheskaya otsenka progiba arochnoy fermi pod deystviem vetrovoy nagruzki // Nauchnyy vestnik, 2016. № 1 (7). S. 247—254.
14. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. Magazine of Civil Engineering, 2016. No. 4. Pp. 52—58. doi: 10.5862/MCE.64.
15. Kirsanov M.N. Napryazhennoe sostoyanie i deformatsii pryamougolnogo prostranstvennogo sterzhnevogo pokryitiya // Nauchnyy vestnik VGASU. Stroitelstvo i arhitektura. 2016. №1 (41). S. 93—100.
16. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Vestnik nauchnykh konferentsiy, 2016. № 1—4 (5). S. 6—7.
17. Kirsanov M.N. Maple i Maplet. Resheniya zadach mehaniki. SPb.: Izd-vo Lan, 2012. — 512 s.