

## ФОРМУЛА ДЛЯ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЯ МНОГОПРОЛЕТНОЙ ФЕРМЫ

М. Н. Кирсанов<sup>1</sup>

Национальный исследовательский университет “МЭИ”

Россия, г. Москва<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Д-р физ.-мат. наук, тел.: +7(495)362-73-14; e-mail:c216@ya.ru

---

Выводится аналитическая зависимость нижней границы основной частоты колебаний фермы с крестообразной решеткой, инерционные свойства которой моделируются системой грузов в узлах прямолинейного пояса. Показывается, что при четном числе пролетов схема фермы допускает кинематическую изменчивость. Приведена соответствующая схема возможных скоростей узлов. Для решения задачи привлекаются операторы системы компьютерной математики Maple и метод индукции. Сравнение полученной оценки с точным значением основной частоты, полученным численно, показывает что расхождение не превышает 35%. Предложен алгоритм обобщения решения на случай стержней разной жесткости.

**Ключевые слова:** ферма, основная частота колебаний, Maple, индукция, число панелей

## FORMULA FOR THE MAIN OSCILLATION FREQUENCY OF A MULTI-SPAN TRUSS

M. N. Kirsanov

*National Research University “MPEI”,  
Russia. Moscow*

---

<sup>1</sup>Dr.Sci., Professor tel: +7(495)362-73-14; e-mail:c216@ya.ru

---

An analytical dependence of the lower boundary of the fundamental oscillation frequency of a truss with a cross-shaped grating is derived. The inertial properties of truss are modeled by a system of weights in the nodes of a straight belt. It is shown that with an even number of spans, the truss scheme allows for kinematic variability. The corresponding scheme of possible node velocities is given. To solve the problem, the operators of Maple computer math system and the induction method are involved. Comparison of the obtained estimate with the numeric exact value of the fundamental frequency, shows that the discrepancy does not exceed 35%. An algorithm for generalizing the solution to the case of rods of different rigidity is proposed.

### **Keywords**

truss, oscillation frequency, Maple, induction, number of panels

### **Постановка задачи**

Простейшая, но достаточно точная и широко распространенная модель фермы, частоты колебаний которой необходимо определить, представляет собой ферму с невесомыми стержнями и массами, сосредоточенными в узлах. Анализ такой модели допускает аналитическое решение [1]. В спектре частот колебаний фермы наиболее интересны для практики низшие частоты. Значения именно этих частот требуются, например, для более полного исследования колебаний подвижной нагрузки [2,3], если идет речь о мостах или о покрытиях промышленных зданий с крановым

оборудованием. Современные математические пакеты, использующие символьную обработку данных и позволяющие получение решения систем линейных уравнений в виде формул, дают возможность вывести зависимости собственных частот сооружения от его геометрических и физических характеристик. Наиболее сложная часть таких решений, состоящая в учете числа панелей, может быть получена методом индукции на основе опыта решения подобных задач о прогибе регулярных ферм [4].

Рассмотрим плоскую ферму с крестообразной решеткой (рис. 1). Обозначим за  $n$  число пролетов. Каждый пролет представлен одной панелью длиной  $a$ .

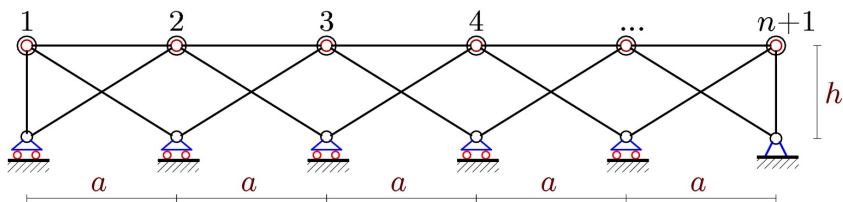


Рис. 1. Ферма,  $n = 5$

Всего в ферме  $n_s = 4n + 4$  стержней, включая  $n + 2$  стержня, моделирующие опоры. Эти стержни примем недеформируемыми.

Располагая массы  $m$  по узлам верхнего пояса, запишем систему  $n+1$  уравнений колебаний масс

$$m\ddot{\bar{Y}} + [D_n]\bar{Y} = 0, \quad (1)$$

где  $\bar{Y}$  – вектор вертикальных перемещений шарниров,  $\ddot{\bar{Y}}$  – вектор ускорений,  $[D_n]$  – матрица жесткости (индекс  $n$  указывает на число пролетов). Элементы матрицы податливости  $[B_n]$ , обратной к матрице жесткости, в случае продольных усилий в стержнях определяются по формуле Максвелла-Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{v=1}^{n_s-n-2} S_v^{(i)} S_v^{(j)} l_v / (EF). \quad (2)$$

Здесь  $S_v^{(i)}$  — усилие от действия единичной силы в узле  $i$  в стержне  $v$ ,  $l_v$  – длина стержня,  $EF$  – жесткость стержня. Площади сечений всех стержней одинаковые. Суммирование ведется по всем стержням фермы, кроме опорных.

Предварительный расчет усилий по программе [4], написанной на языке символьной математики Maple, показал, что для четного числа пролетов определитель системы уравнений равновесия обращается в ноль [5]. Это свидетельствует о кинематической изменяемости конструкции при таком числе пролетов. Действительно, можно найти кинематически непротиворечивое поле возможных скоростей узлов фермы (рис. 2).

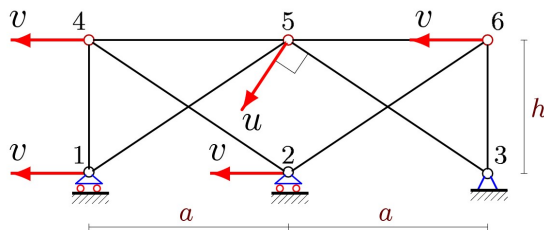


Рис. 2. Схема возможных скоростей изменяемой фермы,  $n = 2$

Здесь стержни 1-4, 2-4 и 2-6 совершают мгновенно поступательные движения со скоростью  $v$ , а стержни 1-5, 5-6 и 6-3 — вращательные движения. При этом имеется соотношение скоростей  $v/h = u/c$ , где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$  — длина раскоса. Аналогичное распределение скоростей можно построить для любого четного числа  $n$ . Будем рассматривать конструкции с нечетным числом пролетов  $n = 2k - 1, k = 1, 2, 3, \dots$ .

Используем подстановку  $\ddot{Y} = -\omega^2 \bar{Y}$ , вытекающую из периодического вида решения  $\bar{Y} = \bar{Z} \sin(\omega t + \varphi_0)$ , и умножим векторное равенство (1) слева на  $[B_n]$ . Сведем задачу к задаче о собственных числах матрицы  $[B_n]$ :

$$[B_n] \bar{Y} = \lambda \bar{Y}, \quad (3)$$

где  $\lambda = 1/(m\omega^2)$  — собственное число матрицы  $[B_n]$ ,  $\omega$  — собственная частота колебаний системы грузов.

### Расчет

Для нижней оценки основной (наименьшей) частоты колебаний  $\tilde{\omega}$  используем формулу Донкерлея

$$\tilde{\omega}^2 = 1 / \sum_{\alpha=1}^{n+1} 1 / \omega_{\alpha}^2, \quad (4)$$

где  $\omega_{\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, n+1$  — частота колебания массы  $m_{\alpha}$  верхнего пояса, при отсутствии всех других масс. Дифференциальное уравнение вертикальных колебаний массы имеет вид

$$m \ddot{y}_{\alpha} + d_{\alpha,n} y_{\alpha} = 0,$$

где  $y_{\alpha}$  — вертикальное перемещение массы,  $d_{\alpha,n}$  — коэффициент жесткости ( $\alpha$  — номер массы,  $n$  — число пролетов). Частота колебаний груза

$$\omega_{\alpha} = \sqrt{d_{\alpha,n} / m} = \sqrt{1 / (\delta_{\alpha,n} m)}. \quad (5)$$

Коэффициент податливости  $\delta_{n,k}$  обратный коэффициенту жесткости, определяется по формуле Максвелла-Мора (2):

$$\delta_{\alpha,n} = 1 / d_{\alpha,n} = \sum_{\nu=1}^{n_s - n - 2} \frac{S_{\nu}^{(\alpha)2} l_{\nu}}{EF}.$$

Размещая массу поочередно в узлах верхнего пояса (слева направо,  $\alpha = 1, 2, \dots, n+1$ ), получаем в каждом случае одно и то же выражение

$$\delta_{\alpha,k} = (C_{\alpha} (a^3 + c^3) + h^3) / (h^2 EF), \quad (6)$$

где при  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$   $C_1 = 0, C_2 = 2k - 2, C_3 = 2, C_4 = 2k - 4, C_5 = 6, C_6 = 2k - 6$ . Обобщая эти коэффициенты методом индукции при помощи оператора **rgf\_findrecur** системы Maple, который составляет рекуррентное уравнение для членов последовательности и оператора **rsolve**, возвращающего решение уравнения вида  $C_{\alpha} = -C_{\alpha-1} + C_{\alpha-2} + C_{\alpha-3}$ , получаем зависимость

$$C_{\alpha} = ((-1)^{\alpha} (1 - 2\alpha) - 1) / 2 + k(1 + (-1)^{\alpha}).$$

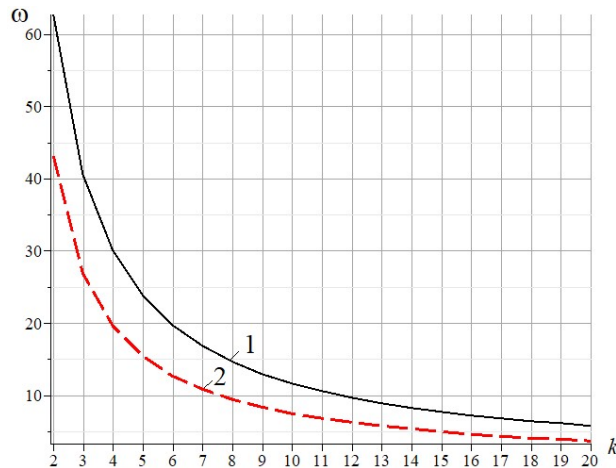
Проверить полученное выражение можно, например, по тождествам  $C_1 = C_{n+1}, C_2 = C_n$ , следующим из симметрии задачи. Подставляя (5) с учетом (6) в

сумму (4), получаем с помощью оператора нахождения конечных сумм **sum** нижнюю по Донкерлею границу основной частоты колебаний фермы с  $n=2k-1$  пролетами:

$$\tilde{\omega} = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{2EF}{m((a^3 + c^3)(k-1) + h^3)}} \quad (7)$$

### Анализ

Полученную оценку сравним с численным результатом, полученным из решения задачи о колебании  $n+1$  массы. С помощью формулы Максвелла-Мора (2) составим матрицу податливости  $[B_n]$  и найдем ее собственные числа, применив оператор **Eigenvalues** из специализированного пакета линейной алгебры **LinearAlgebra**. Для сравнения потребуется только основная частота, выделить которую из спектра можно оператором **sort**, который сортирует списки. На рисунке пунктиром показана кривая, построенная по формуле (7), сплошная линия — результат численного решения. Расхождение между значениями основной частоты меняется от 30% при малых числах пролетов до 36% при больших. С увеличением  $k$ , начиная с  $k=20$ , погрешность почти не растет и этот результат мало меняется при изменении размеров  $a$  и  $h$  и жесткости стержней.



**Рис. 3.** Основная частота колебаний (рад/с). 1 — точное численное решение, 2 — аналитическая оценка (7)

В постановке задачи принято, что все стержни имеют одинаковую жесткость. Но это требование легко снимается, если считать, что в конструкции можно выделить три группы стержней в соответствии с их длинами. Если стержни верхнего пояса длиной  $a$  имеют жесткость  $EF_a = \gamma_a EF$ , раскосы длиной  $c$  имеют жесткость  $EF_c = \gamma_c EF$ , а стержни стоек высотой  $h$  — жесткость  $EF_h = \gamma_h EF$ , то формула (7) примет вид

$$\tilde{\omega} = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{2EF}{m((a^3 / \gamma_a + c^3 / \gamma_c)(k-1) + h^3 / \gamma_h)}}.$$

### Заключение

Получена оценка наименьшей частоты собственных колебаний фермы многопролетного сооружения. Несмотря на значительное занижение реальной основной частоты, это решение имеет весьма простой вид и может быть использовано в практических инженерных работах, с учетом поправки в 30-36%. Вероятно главное

достоинство найденной оценки, помимо ее формульного представления, допускающего простое аналитическое исследование влияния отдельных параметров фермы на частоту колебаний, является практически точное предсказание зависимости частоты от числа панелей. Кривые 1 и 2 на рисунке 3 хорошо повторяют форму друг друга, отличаясь некоторым сдвигом по оси ординат. Другим результатом работы является сам алгоритм выделения оценки частоты, допускающий несложное повторение применительно к другим регулярным стержневым системам. Еще один результат работы, напрямую не связанной с заявленной темой, обнаружен неожиданно. При постановке задачи не предполагалось, что конструкция имеет некоторый скрытый и опасный дефект, связанный с ее вырождением. Именно поэтому расчеты основной частоты велись только для нечетного числа пролетов. Аналогичный эффект вырождения отмечен в ряде статически определимых конструкций регулярного типа [4]. Заметим, что первоначальные численные расчеты за счет погрешностей вычислений иногда пропускали эти особенности ферм. Аналитические же преобразования тут имеют явное преимущество, хотя для получения результатов в символьном виде требуется значительно больше усилий. Фактически, для вывода формулы основной частоты индукция проводилась дважды — по номеру массы и по числу пролетов. В итоге выведена достаточно универсальная формула, применимая к широкому классу конструкций предложенной схемы.

Индуктивный метод вывода формул для прогиба плоской фермы применялся также в работах [6-9], обзор некоторых аналогичных работ можно найти в [10].

#### Библиографический список

1. *Канатова М.И.* Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. – 2015. – Т. 1.– С. 31-34.
2. *Барченков А. Г.* Динамический расчет автодорожных мостов. М.: Транспорт. – 1976. – 199 с.
3. *Сафронов В.С.* Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1983. 196 с
4. *Курсанов М.Н.* Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. М.: ИНФРА-М, 2019. 238 с.
5. *Курсанов М.Н.* Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27-30.
6. *Белянкин Н.А., Бойко А.Ю.* Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // Строительная механика и конструкции. 2019. №1(20). С. 21-29.
7. *Ткачук Г.Н.* Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей //Строительная механика и конструкции. 2019. №2(21). С. 32-39.
8. *Бойко А.Ю., Ткачук Г. Н.* Вывод формул зависимости прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей в системе  $m \times n$ // Строительная механика и конструкции. 2019. №4 (23). С. 15-25.
9. *Тимофеева Т.А.* Формулы для расчета прогиба плоской решетчатой рамы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. №4 (23). С. 26-33.
10. *Осадченко Н.В.* Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. №. 1. С. 12-33.

## Reference

1. Kanatova M. I. Frequency equation and analysis of vibrations of a flat beam truss. Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. M: Infra-M-2015. - Vol. 1.- Pp. 31-34.
2. Barchenkov A. G. Dynamic calculation of road bridges. Moscow: Transport. - 1976. – 199 p.
3. Safronov V. S. Calculation of suspension and cable-stayed bridges for mobile load. Voronezh: Voronezh publishing House. UN-TA, 1983. 196 p
4. Kirsanov M. N. Planar trusses. Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing. 2019.
5. Kirsanov M. N. Derivation of the formula for the deflection of a lattice truss that has cases of kinematic variability. 2017. Vol. 1. No. 14. Pp. 27-30.
6. Belyankin N. A., Boyko A. Yu. Formulas for deflection of a beam truss with an arbitrary number of panels at uniform loading. Construction mechanics and structures. 2019. No. 1(20). Pp. 21-29.
7. Tkachuk G. N. Formula for the dependence of the deflection of an asymmetrically loaded flat truss with reinforced struts on the number of panels. Construction mechanics and structures. 2019. No. 2(21). Pp. 32-39.
8. Boyko A. Yu., Tkachuk G. N. Derivation of formulas for the dependence of the deflection of a flat hinge-rod frame on the number of panels in the maple system. Construction mechanics and structures. 2019. No. 4 (23). Pp. 15-25.
9. Timofeeva T. A. Formulas for calculating the deflection of a flat lattice frame with an arbitrary number of panels. 2019. No. 4 (23). Pp. 26-33.
10. Osadchenko N. V. Analytical solutions to problems of deflection of flat trusses of arch type. Construction mechanics and structures. 2018. No. 1. Pp. 12-33.