

УДК 624.041.5, 539.4

ПРИЗНАКИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИЗМЕНЯЕМОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ ФЕРМ

М. Н. Кирсанов

Национальный исследовательский университет «МЭИ»
Россия, г. Москва

Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин,
тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

Рассмотрены особенности структуры плоских статически определимых регулярных (периодических) ферм, допускающих при некотором значении числа панелей мгновенную геометрическую изменяемость. Предлагается достаточный критерий изменяемости, расширяющий известный критерий И.М. Рабиновича. Формулировка обоих критериев дается в терминах теории графов. Доказательство предложенного критерия, основанного на существовании незамкнутой цепи стержней определенного вида в решетке фермы, дается методами статики. Приводятся примеры десяти ферм и соответствующие картины распределения виртуальных скоростей узлов в случаях изменяемости конструкций. Для выявления кинематики таких ферм используется алгоритм пошагового вычисления скоростей узлов изменяемой фермы с помощью метода определения скорости среднего узла шарнирного стержневого двухзвенника по данным скоростей его концов. Записана система четырех кинематических уравнений алгоритма, реализуемого в виде подпрограммы.

Ключевые слова: ферма, Maple, критерий изменяемости, анализ структуры фермы, расчет усилий, теория графов

Введение

Анализ конструкции фермы на этапе проектирования помимо анализа статической определимости включает в себя исследование геометрической изменяемости конструкции. Необходимым условием статической определимости фермы является отношение один к двум числа внутренних шарниров и стержней, включая опорные. Иначе говоря, число уравнений равновесия узлов (по два уравнения на узел для плоских систем) должно быть равно числу неизвестных усилий. Значительно труднее оценить правильность структуры — достаточный признак неизменяемости конструкции. В ферме недопустима как изменяемость, так и мгновенная изменяемость. Далее будут рассматриваться случаи только мгновенной изменяемости. Анализ изменяемости некоторых регулярных ферм с нахождением схем виртуальных скоростей узлов проведен в работе [1]. Большое число схем плоских статически определимых ферм регулярного типа, допускающих в определенных случаях изменяемость, приведено в справочниках [2, 3]. Алгоритмы выбора метода исследования геометрической неизменяемости изложены в [4]. Некоторые вопросы структурно-параметрического синтеза, оптимизации и анализа решеток ферм изучены в [5-8].

Критерии

Существуют изменяемые фермы, не попадающие под три известных критерия изменяемости:

а) Если два диска соединены между собой тремя параллельными стержнями, то полученная система изменяема или мгновенно изменяема. В данном случае под диском в строительной механике понимается или отдельный стержень или неизменяемая часть фермы, например, жесткий треугольник.

б) Если два диска соединены между собой тремя стержнями, лежащими на прямых, пересекающихся в одной точке, то полученная система изменяема или мгновенно изменяема.

с) Если три диска соединены тремя шарнирами, лежащими на одной прямой, то такая система мгновенно изменяема. Шарниры здесь могут быть фиктивными — точками пересечения стержней.

Рассмотрим случаи изменяемости ферм, не попадающие под эти признаки.

В ферме на рис. 1 есть необходимое для статической определимости соотношение числа стержней и узлов: шесть узлов и двенадцать стержней, включая четыре опорные (неподвижный опорный шарнир моделируется двумя стержнями, подвижный — одним). Однако при соотношении $h_1 = h_2 = h$ ферма изменяема. Приведена схема виртуальных скоростей узлов. Мгновенные центры раскосов находятся в опорах фермы. Отсюда следует соотношение скоростей: $v / \sqrt{a^2 + h^2} = u / (2h)$.

Определитель системы двенадцати уравнений равновесия шести узлов фермы, в которую входят восемь неизвестных усилий в стержнях и четыре опорные реакции, имеет вид:

$$\det = \frac{4h_2^2 a^3 (h_1 - h_2)}{(a^2 + h_2^2)^2 (a^2 + h_1^2)}.$$

Если выполняется равенство $h_1 = h_2$, то определитель вырождается. Такой же случай изменяемости, не попадающий под стандартные критерии, наблюдается в ферме 2 (рис. 2). Ферма допускает изменяемость при $c=b$. Приведена схема виртуальных скоростей узлов.

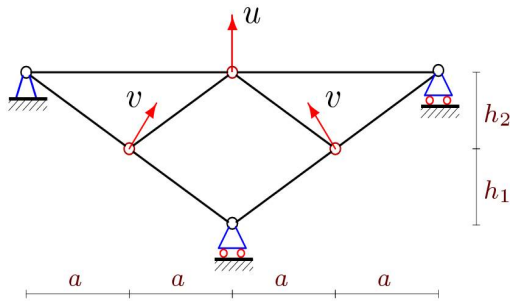


Рис. 1. Ферма 1. Виртуальные скорости узлов изменяемой фермы

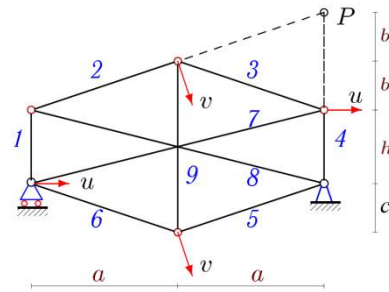


Рис. 2. Ферма 2. Виртуальные скорости

Стержень с номером 3 совершает вращательное движение около мгновенного центра скоростей P с угловой скоростью $\omega = u / (2b) = v / \sqrt{a^2 + b^2}$. Элементы фермы 4 и 5 вращаются вокруг правой опоры. Стержни 7 и 9 имеют поступательное движение. Стержень 8 неподвижный. Определитель матрицы системы уравнений равновесия узлов этой фермы, найденный методами компьютерной алгебры, имеет вид:

$$\det = \frac{8a^5 (b - c)}{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)(4a^2 + h^2)}.$$

При $b = c$ определитель обращается в ноль. Геометрическая изменяемость фермы проявляется при расчете из условия равенства нулю определителя системы уравнений

равновесия всех узлов. В практических расчетах этот критерий изменяемости использовать неудобно. Численный расчет может скрывать равенство нулю определителя за погрешностями счета. Это наиболее характерно при большом числе стержней. Кроме того, вполне возможно, что вычисления для одних размеров фермы может дать ненулевой определитель, а при иных для той же структуры, определитель обращается в ноль. Известны критерии геометрические, проверяющие возможность виртуальных скоростей шарниров, свидетельствующих об изменяемости фермы. Рабинович И. М. [9], ссылаясь на работу Г. Мюллер-Бреслау [10] использовал критерий изменяемости решетчатой фермы с построением плана скоростей узлов. Согласно этому критерию проверку изменяемости можно свести к нахождению замкнутой цепи стержней, которая свидетельствует о виртуальных скоростях узлов, находящихся в шарнирах этой цепи. Таким образом, имеем следующий геометрический критерий.

Критерий 1. Если в ферме имеется замкнутая цепь стержней, каждый узел которой соединяет четыре стержня, два из которых не принадлежат цепи и лежат на одной прямой, то такая ферма геометрически изменяема.

Доказательство критерия на основе построения плана скоростей дано в [9].

Приведем схему фермы с решетчатой структурой, содержащую n ячеек периодичности по горизонтали (панелей длиной a) и m панелей высотой h по высоте (рис. 3). Ферма содержит одну лишнюю связь, так как число неизвестных усилий в ней $4(n+m)+1$, включая три реакции опоры, а число узлов $2(n+m)$. Несмотря на это, при определенном соотношении чисел m и n эта ферма допускает изменяемость. Схема виртуальных скоростей узлов фермы при $m=3$ и $n=6$ (37 стержней и 18 шарниров) приведена на рис. 3.

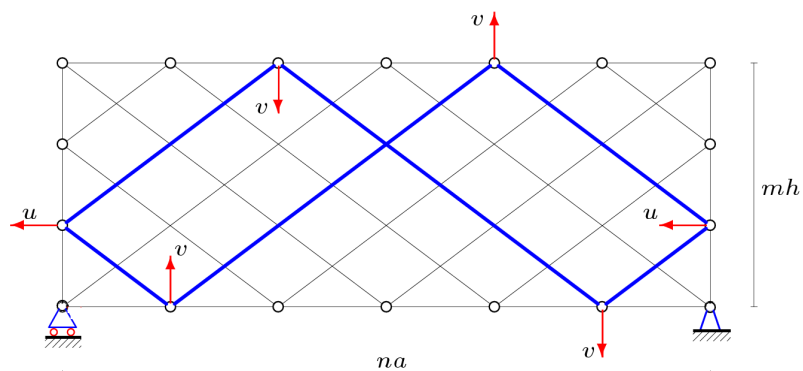


Рис. 3. Ферма 3. Виртуальные скорости, $n=6$, $m=3$

Приведенная схема скоростей в данной ферме не единственная. Еще одна замкнутая цепь симметрична приведенной относительно горизонтали. Можно предложить простую аналогию. Указанная цепь, указывающая на изменяемость фермы, похожа на траекторию шарика, катающегося по коробке с отскоками от ее боковых сторон. Правило о равенстве углов падения и отражения здесь не всегда выполняется. Однако если шарик попадет в угол коробки, то траектория оборвется. Это будет соответствовать не замкнутости цепи стержней. Для изменяемости фермы достаточно одной цепи. В оригинальной работе [9] план скоростей построен на векторах скоростей, повернутых на 90° . В приведенной схеме скоростей (рис. 3) направления скоростей соответствуют реальным. Обобщая эту задачу на произвольные числа панелей по сторонам, можно показать, что данная ферма геометрически неизменяема, если числа n и m взаимно просты.

Аналогичные замкнутые цепи можно обнаружить в решетчатой ферме 4 (рис. 4) при числе панелей в половине пролета $n = 3$. При $n = (6k - 3 - (-1)^k) / 4$, $k = 1, 2, 3, \dots$, или, что то же $n=1, 2, 4, 5, 7, \dots$, ферма геометрически неизменяема. Зависимость $n(k)$, задающая последовательность порядков неизменяемых ферм, получается из расчета усилий ряда ферм

с увеличивающимся n в аналитической форме. Для этого по программе, записанной на языке символьной математики, например, Maple [2,3], определяются те случаи, когда определитель обращается в ноль. Общий член полученной последовательности можно найти либо в online-программах [11], либо средствами Maple в пакете genfunc.

Ферма 5 (рис. 5), имеющая n панелей в пролете, геометрически неизменяема для более разряженной последовательности порядков: $n = (10k - 5 - \cos 2\varphi - 2 \cos \varphi + 2 \sin \varphi) / 8$, $k = 1, 2, 3, \dots$, где $\varphi = \pi k / 2$, или при $n = 1, 2, 3, 4, 6, 7, \dots$. Здесь каждая пятая ферма в последовательности ферм с растущим числом панелей изменяема. Узлы, имеющие виртуальные скорости, соединяет замкнутая цепь стержней. Критерий 1 выполняется.

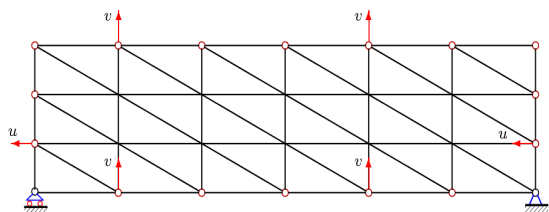


Рис. 4. Ферма 4. Виртуальные скорости, $n=3$

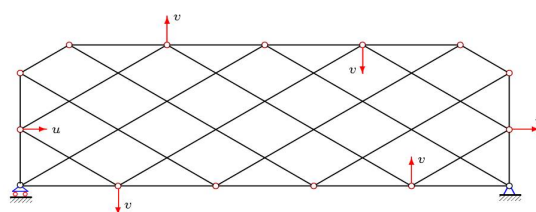


Рис. 5. Ферма 5. Виртуальные скорости, $n=5$

Ферма 6, содержащая n панелей в половине пролета (рис. 6) изменяема при $n=4, 7, 10, \dots$ и неизменяема при $n = (6k + 1 - (-1)^k) / 4$, $k = 1, 2, 3, \dots$. При $n=4$ замкнутая цепь, удовлетворяющая критерию 1, состоит из восьми стержней. Скорости u и v связаны друг с другом соотношениями, следующими, например, из соотношений кинематики вращательного движения на основе рассмотрения мгновенных центров скоростей стержней. Часть стержней в поясах фермы движется вращательно, часть стержней в отмеченной цепи — мгновенно поступательно.

Похожий критерий кинематической изменяемости обнаруживается при рассмотрении фермы 7 (рис. 7). Ферма содержит $2n$ стержневых элементов по верхнему поясу [2]. Ферма геометрически неизменяема, если число панелей равно $n = 2, 5, 7, 10, \dots$, или при $n = (10k - 1 + (-1)^k) / 4$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Изменяемость фермы обнаруживается из условия вырождения определителя матрицы системы уравнений равновесия. Это подтверждается схемой виртуальных скоростей. Более того здесь есть целых три варианта распределения виртуальных скоростей. Наличие одной цепи 1–5–3 достаточно для подтверждения изменяемости фермы. Вторая независимая цепь это 2–6–4. Объединение этих цепей также дает признак изменяемости. Причем на схеме скорости узлов 1 и 2 не обязательно должны быть равными. На основании этого сформулируем еще один геометрический признак изменяемости.

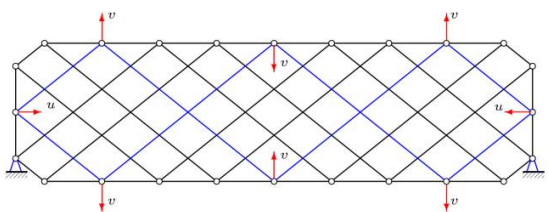


Рис. 6. Ферма 6. Виртуальные скорости, $n=4$

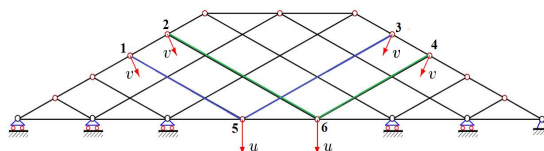


Рис. 7. Ферма 7. Виртуальные скорости, $n=1$

Критерий 2. Если в ферме имеется незамкнутая цепь стержней, каждый внутренний узел которой соединен с четырьмя стержнями, из которых два не включены в цепь и лежат

на одной прямой, а концевые узлы соединяют по три стержня каждый, два из которых не включены в цепь и лежат на одной прямой, то такая ферма геометрически изменяема.

Оба эти критерия можно формулировать проще, если пользуясь терминологией теории графов ввести условную степень вершин δ , и принять стержни, не принадлежащие цепи и лежащие на одной прямой, не меняющими степень вершины. В этом случае условием изменяемости фермы по критерию 1 является наличие цикла с вершинами степени $\delta = 2$, а по критерию 2 признаком изменяемости является цепь, условные степени вершин которой $\delta = 2$, кроме концевых вершин степени $\delta = 1$.

Приведем еще два примера изменяемых ферм, удовлетворяющих критерию 2.

Ферма (рис. 8) содержит n стержней в верхнем поясе и неизменяема при $n = (15k + 6 - \sqrt{3} \sin \varphi + 3 \cos \varphi) / 9$, где $\varphi = 2\pi k / 3$, $k=1,2,3...$ Симметричная незамкнутая цепь из двух стержней подтверждает критерий 2. Цепь из пяти стержней есть в ферме 9 (рис. 9). Пролет фермы состоит из $2n$ панелей. Она неизменяема при $n = 1, 2, 4, 5, 7 ...$ или $n = (6k - 3 - (-1)^k) / 4$, $k=1, 2, 3..$

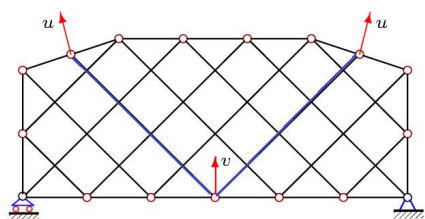


Рис. 8. Ферма 8. Виртуальные скорости, $n=4$

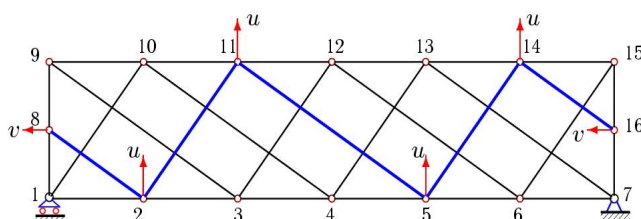


Рис. 9. Ферма 9. Виртуальные скорости, $n=3$

Признаком изменяемости является незамкнутая цепь 8 – 2 – 11 – 5 – 14 – 16. Стержни 1–2, 8–1, 2–8 вращаются вокруг шарнира 1 левой опоры (сама подвижная опора скорости не имеет), стержни 5–11, 2–11 и 5–14 движутся поступательно. Стержень 14–16 совершает вращение около мгновенного центра скоростей в узле 15. Таким образом, только шесть шарниров имеют виртуальную скорость, остальные неподвижны. Наличие указанной схемы уже само по себе является доказательством кинематической изменяемости фермы.

Противоречивость статических уравнений фермы с такой цепью, приводящую к равенству нулю определителя системы уравнений равновесия узлов, можно подтвердить следующими простыми рассуждениями на примере рассматриваемой фермы. Фактически это будет статическим доказательством критерия 2.

Пусть к ферме приложена только нагрузка к узлу 16. Если эта нагрузка горизонтальна, то усилие в элементе 14–16 не равно нулю, что следует из уравнения равновесия узла в проекции на горизонтальную ось. Исходя из леммы о нулевых стержнях, в стержне усилие 8–2 отсутствует. По этой же лемме равно нулю усилие и в стержне 2–11. Рассматривая последовательно равновесие всех незагруженных шарниров выбранной цепи, получаем, что усилие и в стержне 14–16 также должно быть равно нулю, а это противоречит условию равновесия узла 16. Точно также, не накладывая никаких условий на нагрузки, приложенные к узлам цепи стержней, можно для каждого узла составить уравнение равновесия в проекции на вертикальную ось (узлы 5, 2, 11, 14) или горизонтальную (узел 8). Усилие в последнем стержне цепи при этом можно будет найти как из решения задачи о равновесии узлов 8, 2, 11, 5, 15, так и из условия равновесия узла 16. Это противоречит независимости приложенных нагрузок к узлам.

Заметим принципиальное отличие ферм 1 и 2 от ферм 3 – 9. В первом случае условие изменяемости определяется размерами фермы, в фермах же 3 – 9 на изменяемость влияет число панелей, а от размеров фермы условие изменяемости не зависит. Список таких ферм

можно продолжить. В справочниках [2, 3] приведены 44 регулярные фермы, имеющие свойство изменяемости при определенном числе панелей.

Алгоритм нахождения распределения виртуальных скоростей узлов изменяемой фермы

Случаи кинематической изменяемости фермы обнаруживаются в процессе вывода формулы для прогиба, собственной частоты или какой-нибудь другой интегральной характеристики регулярной фермы как функции числа панелей. Метод индукции для получения аналитической формулы предполагает последовательный расчет ферм с разным последовательно увеличивающимся числом панелей. При определенном числе панелей выясняется, что определитель матрицы системы алгебраических уравнений равновесия шарниров, из которой находят усилия в стержнях, обращается в ноль. Характерно здесь то, что при численном расчете усилий этот момент можно не заметить. Погрешность вычислений, как правило, скрывает факт вырождения матрицы большого размера. В аналитической же форме решения, выполненном в какой-либо системе компьютерной математики, определитель вычисляется точно, в виде некоторого аналитического выражения. Однако лучшим подтверждением кинематического вырождения является явная схема виртуальных скоростей узлов. Схема может быть неединственной. В некоторых случаях (рис. 1-9) схемы строятся достаточно просто. В большинстве же случаев, особенно для полигональных ферм и ферм со сложной решеткой, определить картину распределения виртуальных скоростей трудно. Здесь требуется какой-то универсальный алгоритм получения схем скоростей узлов изменяемых ферм.

Рассмотрим ферму 10 (рис. 10) с $2n$ панелями по нижнему поясу. Ферма не является регулярной в строгом смысле этого понятия. Не все панели фермы однотипны. В этой ферме три боковые панели укорочены по высоте. Несмотря на это, индуктивный метод расчета применим и здесь. Выяснено, что ферма неизменяема при $n = (6k + 5 - (-1)^k) / 4$, $k=1, 2, 3, \dots$

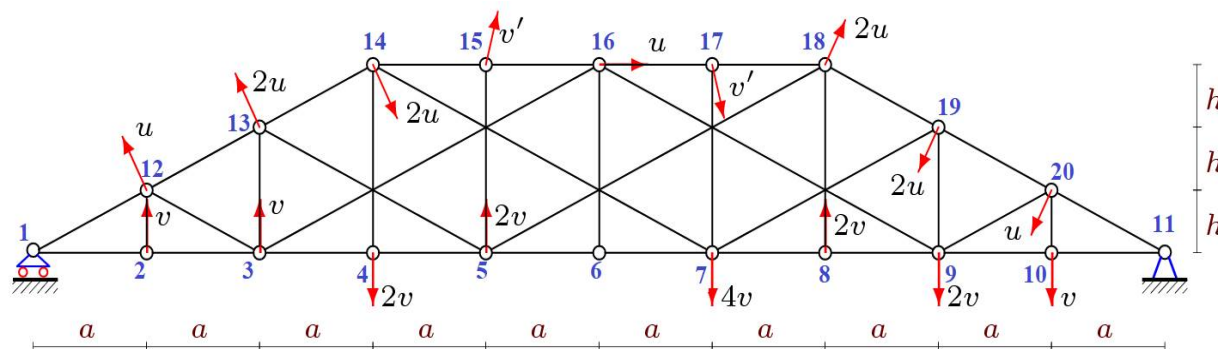


Рис. 10. Ферма 10. Виртуальные скорости, $n=5$

Для решения задачи рассмотрим алгоритм нахождения скорости среднего звена двухзвенника (рис. 11) по данным координат узлов и скоростям конечных точек.

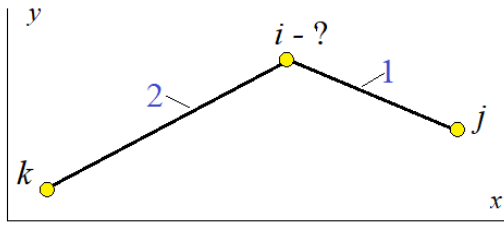


Рис. 11. Двухзвенник. Вычисление скорости узла i

Предположим, что известны скорости узлов k и j . Уравнения для связи компонент скоростей имеют вид:

$$V_{x,j} = V_{x,i} - (y_j - y_i)\omega_1,$$

$$V_{x,k} = V_{x,i} - (y_k - y_i)\omega_2,$$

$$V_{y,j} = V_{y,i} + (x_j - x_i)\omega_1,$$

$$V_{y,k} = V_{y,i} + (x_k - x_i)\omega_2.$$

(1)

Здесь ω_1, ω_2 — алгебраические значения скоростей звеньев, или, что то же, проекции векторов угловых скоростей на ось z . На основе (1) создадим процедуру вычисления компонент скорости среднего узла двухзвенника. Угловые скорости в процедуре будут локальными переменными, а скорости и координаты — глобальными. Это позволит использовать процедуру для последовательного перебора узлов фермы. Начинать надо с двух узлов фермы, скорости которых можно однозначно задать или они известны из условия задачи. Логичнее всего начинать с опоры, скорость которой равна нулю. Здесь начинать надо с узлов 11 и 10, при этом скорость узла 10 необходимо задать. Очевидно, вектор скорости узла 10 перпендикулярен стержню 10-11 нижнего пояса. Направление этой скорости может быть произвольным. Направим скорость вниз. Скорость опоры 11 равна 0. Оформим процедуру в виде записи $\{k, j\} \rightarrow i$, означающей, что определяется скорость шарнира i по данным скоростей шарниров k, j . Начнем с определения скорости шарнира 20: $\{10, 11\} \rightarrow 20$.

Получим $\bar{V}_{20} = [-hv/a, -v]$. Таким образом, скорость точки 20 стала известной. Процесс можно продолжить: $\{10, 20\} \rightarrow 9$, $\bar{V}_9 = [0, -2v]$, $\{9, 20\} \rightarrow 19$, $\bar{V}_{19} = [-2hv/a, -2v]$.

Далее процесс останавливается. В схеме фермы нет необходимого двухзвенника с двумя известными или ранее найденными скоростями. В этом случае вводится еще один неизвестный параметр — величина вертикальной компоненты скорости узла 8: $V_{8,y} = Y$. Найти эту величину можно будет из условия равенства нулю скорости другой опоры. Горизонтальная компонента скорости 8, очевидно, равна нулю. Это следует из известной теоремы о равенстве проекций векторов скоростей на ось отрезка, соединяющего точки 8 и 9. Таким образом, получается требуемый двухзвенник с заданной скоростью 8 и найденной ранее скоростью точки 19. Горизонтальная компонента скорости 18 выражается через введенный и пока неизвестный параметр:

$$\{8, 19\} \rightarrow 18, \quad \bar{V}_{18} = [hY/a, -4v]$$

Далее последовательно определяем скорости:

$$\{8, 19\} \rightarrow 7, \quad \bar{V}_7 = [0, -4v], \quad \{7, 18\} \rightarrow 17, \quad \bar{V}_{17} = [hY/a, -4v],$$

$$\{17, 9\} \rightarrow 16, \quad \bar{V}_{16} = [hY/a, Y - 2v], \quad \{7, 16\} \rightarrow 6, \quad \bar{V}_6 = [0, Y - 2v],$$

$$\{6, 18\} \rightarrow 5, \quad \bar{V}_5 = [0, 2Y], \quad \{5, 16\} \rightarrow 15, \quad \bar{V}_{15} = [hY/a, 2Y],$$

$$\{7, 15\} \rightarrow 14, \quad \bar{V}_{14} = [hY/a, Y - 4v], \quad \{5, 14\} \rightarrow 13, \quad \bar{V}_{13} = [-2hv/a, 2Y - 2v],$$

$$\{5, 14\} \rightarrow 4, \quad \bar{V}_4 = [0, Y - 4v], \quad \{4, 13\} \rightarrow 3, \quad \bar{V}_3 = [0, 2Y - 2v],$$

$$\{3, 13\} \rightarrow 12, \quad \bar{V}_{12} = [-hv/a, 2Y - 3v], \quad \{3, 12\} \rightarrow 2, \quad \bar{V}_2 = [0, 2Y - 3v].$$

Из последнего двухзвенника выражается скорость неподвижного шарнира 1:

$$\{2, 12\} \rightarrow 1, \quad \bar{V}_1 = [0, 2Y - 4v].$$

Из равенства нулю вертикальной компоненты скорости опоры следует величина введенного параметра $Y = 2v = V_{8,y}$. Подставляем эту величину в компоненты скоростей 17,

16, 6, 5, 15, 14, 13, 4, 3, 12, 2. В результате получаем искомое распределение скоростей, подтверждающее геометрическую изменяемость конструкции при $n=5$. На рисунке 10 обозначено: $u = vc/a$, $v' = 2v\sqrt{(h/a)^2 + 4}$.

Существуют также схемы регулярных ферм, которые геометрически изменяемы при любых значениях числа панелей. Ферма 11 (рис. 12) внешне статически неопределима и опирается на два неподвижных шарнира, и закреплена двумя горизонтальными стержнями по краям. Однако соотношение числа стержней и шарниров удовлетворяют необходимому условию статической определимости. В ферме с $2n$ панелями в пролете содержится $4n+10$ шарниров, а число стержней, включая шесть стержней, соответствующие опорам, вдвое больше: $8n+20$. К рассматриваемой ферме не применимы рассмотренные выше критерии изменяемости, однако определитель системы уравнений равновесия всегда обращается в ноль. Следовательно, ферма изменяема. Однако если искусственно нарушить регулярность системы, подняв на высоту d крайние шарниры в нижнем поясе, то ферма становится неизменяемой (рис. 13). Более того, сравнительно легко в аналитической форме находятся усилия в стержнях и реакции опор.

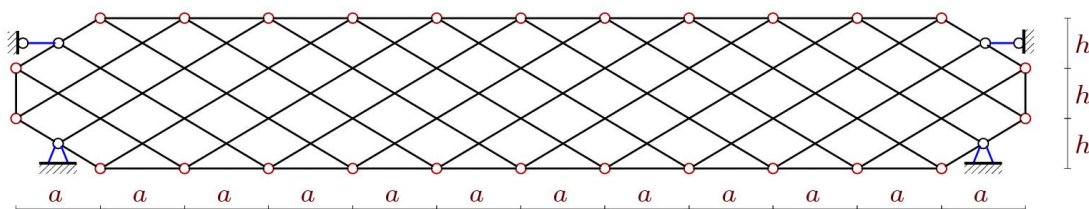


Рис. 12. Ферма 11. Геометрически изменяемая ферма, $n=5$

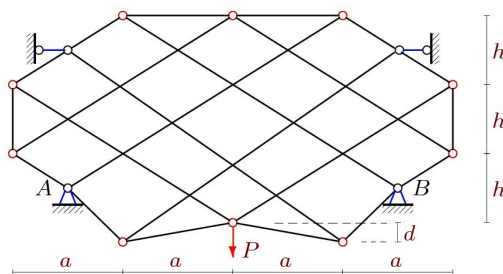


Рис. 13. Ферма 11 ($n=1$) с нарушенной геометрией нижнего пояса

Решение системы уравнений всех узлов дает распор в опорах A и B :

$$R_A = -P \frac{a(3d^2 - 7dh + 5h^2)}{2dh(6d - 5h)}.$$

При $d \rightarrow 0$ или $d \rightarrow 5h/6$ распор стремится к бесконечности, ферма становится изменяемой. Этот же результат можно получить из равенства нулю определителя матрицы \mathbf{G} системы уравнений равновесия узлов фермы, однако в системе Maple оператор Determinant из пакета линейной алгебры LinearAlgebra работает во много раз менее производительнее, чем операция обращения матрицы системы $\mathbf{G}' = 1/\mathbf{G}$, с помощью которой находится решение.

Заключение

Фермы со сложной решеткой, в отличие от ферм, состоящих из стержневых треугольников, в некоторых случаях могут иметь весьма опасное и коварное свойство изменяемости при определенном числе панелей, если речь идет о некоторой периодической

(регулярной) структуре. Опасность изменчивости, пусть даже эта изменчивость мгновенная, очевидна. Коварство же состоит в том, что имея некоторое готовое решение для фермы с определенным числом панелей, проектировщик может, не задумываясь, изменить число панелей, рассчитывая, что и результаты изменятся несильно. Трудно представить, что результат как-то заметно изменится, если вместо 30 панелей рассмотреть ферму с 31 панелью. Но, как показывает приведенный анализ, эти две фермы могут отличаться принципиально. Одна ферма будет изменяться другая — нет. Конечно, и изменяемая ферма с "заваренными" шарнирами будет работать. Можно рассчитать ее как статически неопределимую. Однако практический инженер никогда не поставит в производство ферму, держащуюся только на сварке узлов. Все преимущество ферм состоит именно из того, что элементы в конструкции работают только на сжатие и растяжение.

Здесь рассмотрены некоторые внешние, геометрические *признаки* изменчивости плоских стержневых систем. Кроме *признаков*, для проверки изменчивости есть также *методы* проверки: метод нулевых нагрузок, метод отделения узлов, соединенных с фермой двумя стержнями и др. Ферма 11, для которой еще не найден геометрический критерий изменчивости, показывает, что работа в выбранном направлении анализа стержневых структур может быть продолжена.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Фундаментальные и прикладные исследования космоса».

Библиографический список

1. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12(26). С. 28.
2. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. М.: ИНФРА-М, 2019. 238 с.
3. Kirsanov M.N. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing, 2020. 178 p.
4. Хазанов Х.С. Алгоритм выбора метода исследования геометрической неизменяемости и определения усилий в стержнях ферм; Куйбышевский авиационный институт. Куйбышев, 1984. 32 с.
5. Структурно-параметрическая оптимизация стержневых металлических конструкций на основе эволюционного моделирования / И.Н. Серпик, А.В. Алексейцев, Ф.Н. Левкович, А.И. Тютюнников // Изв. вузов. Сер. Строительство. 2005. №8. С. 16-24.
6. Алексейцев А.В. Оптимальный структурно-параметрический синтез систем усиления металлических ферм // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. №. 2. С. 37-46.
7. Маркосян Г.Х. Выполнение кинематического анализа и расчёт плоских ферм в интерактивной форме // Смотр-конкурс научных, конструкторских и технологических работ студентов Волгоградского государственного технического университета. Волгоград, 2017. С. 142–143.
8. Лисовенко Д.В., Доронина Е.Р. Исследование геометрической неизменяемости плоских стержневых систем // Современные технологии в промышленном производстве: материалы и программа III Всеукраинской межвуз. науч.-техн. конф.: в 2-х ч. Сумы: СумДУ, 2014. Ч.1. С. 186.
9. Рабинович И.М. Курс строительной механики стержневых систем. Ч. 1. Статически определимые системы. 2-е изд. М.-Л.: Стройиздат, 1950. 388 с.
10. Мюллер-Бреслау Г. Графическая статика сооружений. 2-е изд. СПб.: К. Л. Риккер, 1908. Т. 1. 505 с.
11. <https://www.wolframalpha.com/>

References

1. Osadchenko N.V. Calculation of the deflection of a flat continuous statically definable truss with two spans. *Postulate*. 2017. №. 12 (26). 28.
2. Kirsanov M.N. *Planar trusses. Schemes and formulas: a handbook*. Moscow: INFRA-M, 2019. 238 p.
3. Kirsanov M. N. *Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing, 2020. 178 p.
4. Khazanov Kh.S. Algorithm for choosing a method for studying geometric immutability and determining forces in truss rods. *Kuibyshev Aviation Institute*. Kuibyshev 1984. 32 p.
5. Serpik I.N., Alekseytsev A.V., Levkovich, F.N., Tyutyunnikov, A.I. Structural-parametric optimization of rod metal structures based on evolutionary modeling. *Izvestiya vysshikh educational institutions. Construction*. 2005 (8). Pp. 16–24.
6. Alekseytsev A.V. Optimal structural-parametric synthesis of reinforcement systems for metal trusses. *Structural mechanics of engineering structures and structures*. 2014. No. 2. Pp. 37–46.
7. Markosyan G.Kh. Implementation of kinematic analysis and calculation of flat trusses in an interactive form. *Review-competition of scientific, design and technological works of students of Volgograd State Technical University*. 2017. Pp. 142–143.
8. Lisovenko D.V., Doronina E.R. Study of geometric immutability of plane rod systems: Modern technologies in industrial production: materials and program of the III All-Ukrainian interuniversity. scientific and technical conf. : in 2 p. *Sumy State University*, 2014.
9. Rabinovich I.M. *A course in structural mechanics of rod systems*. 2nd ed. Part 1. Statically determinate systems. Moscow-Leningrad . Stroyizdat, 1950. 388 p.
10. Müller-Breslau G. *Graphic statics of structures*. 2nd ed. T. 1. SPb. : K.L. Rikker, 1908. 505 p.
11. <https://www.wolframalpha.com/>

SIGNS OF GEOMETRIC VARIABILITY OF REGULAR TRUSSES

M. N. Kirsanov

National Research University «MPEI»
Russia, Moscow

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

The features of the structure of planar statically determinate regular (periodic) trusses that allow instantaneous geometric variability at a certain value of the number of panels are considered. A sufficient criterion of variability is proposed, extending the well-known criterion of I. M. Rabinovich. The formulation of both criteria is given in terms of graph theory. The proof of the proposed criterion, based on the existence of an open chain of rods of a certain type in the truss lattice, is given by static methods. Examples of ten trusses and corresponding patterns of the distribution of virtual speeds of nodes in cases of design variability are given. To identify the kinematics of such trusses, an algorithm is used for step-by-step calculation of the velocities of the nodes of the variable truss using the method for determining the velocity of the middle node of a hinged rod two-link link according to the velocities of its ends. A system of four kinematic equations of the algorithm implemented as a subroutine is written.

Keywords: truss, Maple, variability criterion, truss structure analysis, forces calculation, graph theory