

УДК 624.04

СТАТИЧЕСКИЙ И КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ РЕГУЛЯРНОГО ТИПА

М. Н. Кирсанов¹

Национальный исследовательский университет "МЭИ"
Россия, г. Москва

¹Д-р физ.-мат. наук, проф., тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

Анализируются схемы статически определимых ферм, обладающих периодической структурой. Выводятся формулы для прогиба фермы в зависимости от размеров фермы и числа панелей. Для обобщения ряда решений для ферм с разным числом панелей на общий случай применяется метод индукции. Все преобразования и решения уравнений равновесия узлов выполняются в системе компьютерной математики Maple. Для нахождения рекуррентных уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты в формулах, привлекаются специализированные операторы системы компьютерной математики Maple. Показывается, что в некоторых случаях при определенном числе панелей фермы становятся кинематически изменяемыми. Приводятся соответствующие схемы распределения возможных скоростей узлов. Найдено асимптотическое свойство решения. Задача решена для трех видов симметричной нагрузки. Показано, что полученная зависимость имеет скачкообразный характер. Это позволяет использовать решение в задачах оптимизации при выборе числа панелей проектируемой конструкции.

Ключевые слова: ферма, индукция, Maple, прогиб, изменяемость кинематическая.

Введение

Численные методы расчета строительных конструкций [1-7] в настоящее время теряют свою монополию при оценке деформаций и напряженного состояния проектируемых сооружений. Аналитические решения в виде простых формул имеют очевидное преимущество за счет простоты и точности. Безусловно, формулы, которые дают полное решение задачи строительной механики с учетом всех внешних факторов, для произвольных нагрузок и свойств материала, получить в общем виде невозможно. Такие задачи и не ставятся. Однако основные задачи в случае простой модели сооружения решить в аналитическом виде несложно. Развитие систем компьютерной математики делает это возможным. При этом самые простые решения этого вида относятся к задачам для конкретных конструкций, например ферм, в которых известно число панелей, положение опор и вид нагрузки. Остается только найти зависимость решения от размеров, величины нагрузки или нагрузок и свойств материала. Такие решения имеют право на существование, однако область их применения весьма узка. Значительно интереснее и полезнее для практики проектирования формулы для некоторого класса ферм с различным числом панелей. Подобные решения уже существуют для плоских [8-17] и пространственных ферм [18-21]. Задачи решены методом индукции, применимым для регулярных статически определимых сооружений, имеющих некоторые ячейки периодичности [22,23]. Проблемы регулярных стержневых систем рассматривались также в [24-30]. Методом в [31-36] индукции в аналитической форме решены также задачи о собственных колебаниях регулярных ферм. В таких задачах масса сосредотачивалась в узлах конструкции. Обзор работ, использующих метод индукции при выводе формул для прогиба статически определимых плоских ферм арочного типа, приведен в [37].

В настоящей работе методом индукции выводятся формулы для прогиба фермы с двумя дополнительными опорами.

Схема фермы. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую решетчатую ферму (рис. 1) с $2n$ панелями в нижнем поясе. Особенность конструкции – дополнительные опоры, предназначенные для смягчения условия опирания. При этом решетка фермы такова, что система остается статически определимой. Число стержней в ферме вместе с пятью стержнями, моделирующими опоры, равно $m = 8n + 10$, а число шарниров $4n + 5$. Предлагаемая схема фермы может быть использована в составе пространственной конструкции, например перекрытия (рис. 2). Ставится задача о нахождении зависимости прогиба от числа панелей в аналитической форме.

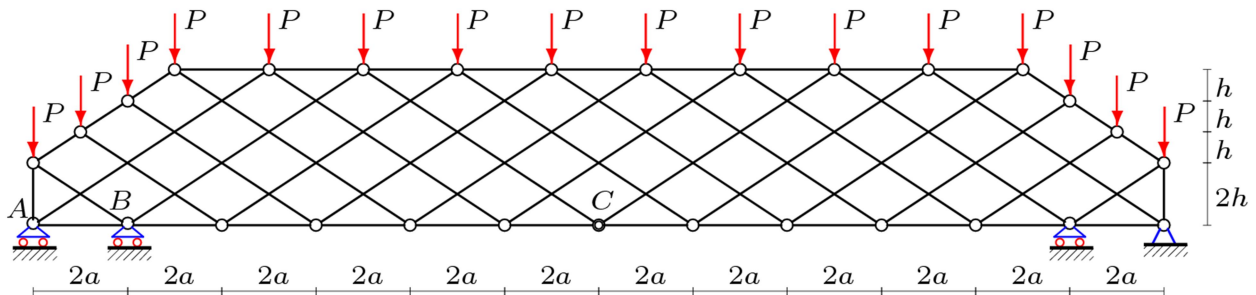


Рис. 1. Ферма, $n=6$



Рис. 2. Ферма в составе пространственной конструкции, $n=6$

Для решения задачи используем программу расчета усилий в стержнях фермы на языке Maple [38]. В программу вводятся координаты узлов, для чего узлы и стержни нумеруются (рис. 3). Начало координат выбрано в левой подвижной опоре № 1.

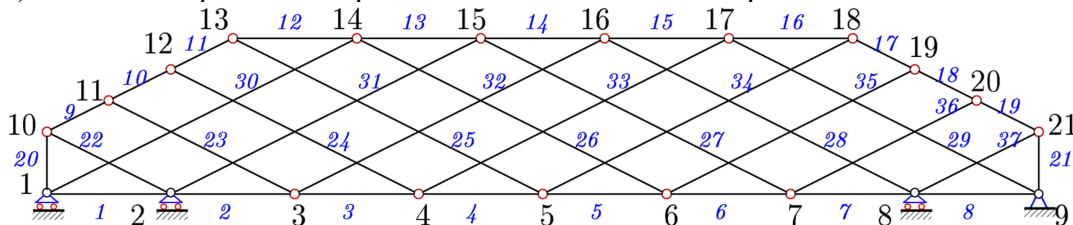


Рис. 3. Нумерация узлов и стержней, $n=4$

Координаты вводятся в циклах по числу узлов:

$$x_i = 2a(i-1), y_i = 0, i = 1, \dots, 2n+1,$$

$$x_{i+2n+4} = a(2i+1), y_{i+2n+4} = 5h, i = 1, \dots, 2n-2,$$

$$x_{i+2n+1} = a(i-1), y_{i+2n+1} = h(i+1),$$

$$x_{i+4n+2} = x_{4n+2} + ai, y_{i+4n+2} = h(5-i).$$

Для ввода в программу порядка соединения стержней по аналогии с заданием графа в дискретной математике используются специальные списки $\bar{N}_i, i = 1, \dots, m$, содержащие номера шарниров по концам соответствующих стержней. Стержни поясов, например, кодируются следующим образом:

$$\bar{N}_i = [i, i + 1], i = 1, \dots, 2n,$$

$$\bar{N}_{i+2n} = [i + 2n + 1, i + 2n + 2], i = 1, \dots, 2n + 3.$$

В матрицу \mathbf{G} системы уравнений равновесия узлов размером $m \times m$ заносятся направляющие косинусы усилий в стержнях, вычисленные по проекциям на оси координат. Направляющие косинусы на горизонтальную ось x заносятся в нечетные строки, на ось y — в четные.

Направляющие косинусы вычисляются по координатам узлов по концам стержней $l_{1,i} = x_{N_{2,i}} - x_{N_{1,i}}, l_{2,i} = y_{N_{2,i}} - y_{N_{1,i}}, i = 1, \dots, m, l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}$. Первый индекс i в номере $N_{i,j}$ соответствует номеру стержня, второй j — номеру компоненты. При этом значение $j=1$ соответствует номеру шарнира в условном начале стержня, $j=2$ определяет номер его конца. Направляющие косинусы в \mathbf{G} записываются следующим образом:

$$G_{q,i} = -l_{j,i} / l_i, q = 2N_{i,2} - 2 + j, q \leq m, j = 1, 2, i = 1, \dots, m,$$

$$G_{q,i} = l_{j,i} / l_i, q = 2N_{i,1} - 2 + j, q \leq m, j = 1, 2, i = 1, \dots, m.$$

Усилия во всех стержнях вычисляются из решения системы линейных уравнений $\mathbf{G}\bar{S} = \bar{B}$, где \bar{S} вектор усилий в стержнях, \bar{B} — вектор нагрузок. Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу i , записываются в нечетные элементы B_{2i-1} , вертикальные — в четные B_{2i} .

Решение системы линейных уравнений находим с помощью обратной матрицы $\bar{S} = \mathbf{G}^{-1}\bar{B}$. Этот метод хорошо реализуется в системе Maple [38] и не требует привлечения специального пакета линейной алгебры Linear Algebra и кодируется просто: **S:=1/G.B:**. Первые вычисления усилий показали, что для некоторых значений числа панелей n определитель системы уравнений равновесия обращается в ноль. При этом если задавать численные значения размеров в вещественной форме, то независимо от точности вычислений вырождение определителя может остаться незамеченным. Подтверждением этому факту является схема возможных скоростей узлов изменяемой фермы (рис. 4).

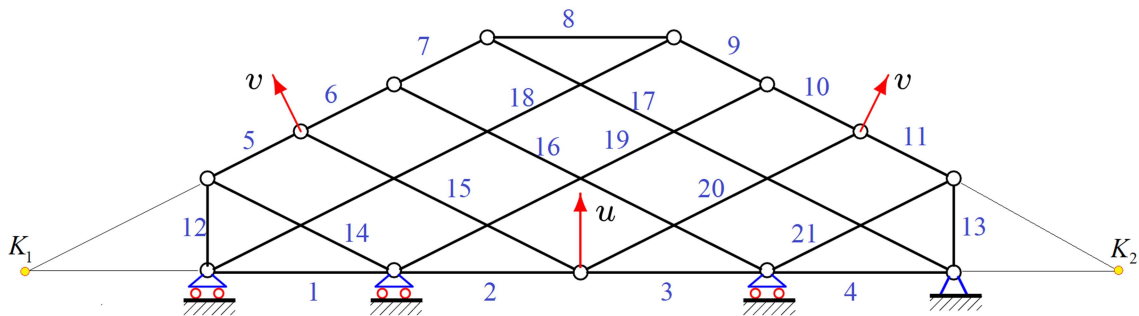


Рис. 4. Схема возможных скоростей узлов изменяемой фермы, $n=2$

Стержни 15 и 20 совершают мгновенные повороты вокруг мгновенных центров скоростей K_1 и K_2 , стержни 2, 3, 5, 6, 10 и 11 вращаются вокруг своих концов. Опоры и остальные стержни неподвижны. Очевидно соотношение $v/c = u/(2a)$.

Только при расчете в символьной форме или с целочисленными данными факт вырождения определителя наиболее нагляден. В частности, получено, что недопустимыми значениями n являются значения 2, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 15, 17, 18 Прослеживается очевид-

ная периодичность этих чисел. Исключая их из рассмотрения, введем функцию $n = (5 - (-1)^k + 10k) / 4$. Теперь для нахождения искомой зависимости прогиба от числа панелей, последовательно увеличивая k , можно получить ряд решений для прогиба ферм с различным допустимым числом панелей.

Прогиб центрального узла нижнего пояса фермы определяем по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{j=1}^{m-5} \frac{S_j s_j l_j}{EF}, \quad (1)$$

здесь введены обозначения: S_k – усилия в стержнях фермы от действия внешней нагрузки, s_k – усилия от единичной нагрузки, приложенной к центральному узлу в середине пролета, l_k – длины стержней. Материал стержней и площадь их сечений предполагаются одинаковыми. Для всех стержней фермы модуль упругости равен E . Последовательно задавая в программе $k=1, 2, 3, \dots$, имеем следующие результаты:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= P(100a^3 + 17c^3 + 40h^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta_2 &= P(148a^3 + 5c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_3 &= P(2036a^3 + 47c^3 + 56h^3) / (2h^2 EF), \end{aligned}$$

...

Все эти решения имеют общий вид:

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF), \quad (2)$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Остается только получить зависимость коэффициентов от числа панелей. Для получения последовательности коэффициентов при a^3 необходимо решить задачу для ферм с числом панелей $n=1, \dots, 18$. При этом получается последовательность 50, 148, 1018, 1784, 5610, 8196, 18538, 24672, 46514, 58500, 98250, 118968, 184458, 217364, 317850, 366976, 513138, 583092. Рекуррентное уравнение, которому подчиняются члены этой последовательности, дает оператор **rgf_findrecur** :

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + 4C_{1,k-2} - 4C_{1,k-3} - 6C_{1,k-4} + 6C_{1,k-5} + 4C_{1,k-6} - 4C_{1,k-7} - C_{1,k-8} + C_{1,k-9} .$$

Для нормальной работы этого оператора требуется четное число членов последовательности. В случае, если последовательность имеет недостаточную длину, коэффициенты рекуррентного уравнения получаются дробными, а при проверке их решения численным методом обнаруживаются ошибки. Решение рекуррентного уравнения дает оператор **rsolve**:

$$\begin{aligned} C_1 &= (250k^4 + 4(125 - 53(-1)^k)k^3 + (518 - 318(-1)^k)k^2 + \\ &+ 316(1 - (-1)^k)k + 15(-1)^k - 15) / 48. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогично, но из решения более простых уравнений получаются и другие коэффициенты формулы:

$$\begin{aligned} C_2 &= (10k^2 + (10k - 19)(1 - (-1)^k)) / 8, \\ C_3 &= 2(k + 4)(1 - (-1)^k). \end{aligned} \quad (4)$$

В случае нагрузки на узлы нижнего пояса (рис. 5) коэффициенты формулы (2) имеют похожую форму и определяются из решения тех же рекуррентных уравнений:

$$\begin{aligned}
C_1 &= (250k^4 + 4(125 - 53(-1)^k)k^3 + (218 - 318(-1)^k)k^2 + 16(1 - (-1)^k)k - 75(-1)^k + 75) / 48, \\
C_2 &= 5(2k^2 + (2k - 1)(1 - (-1)^k)) / 8, \\
C_3 &= 2k(1 - (-1)^k).
\end{aligned}
\tag{5}$$

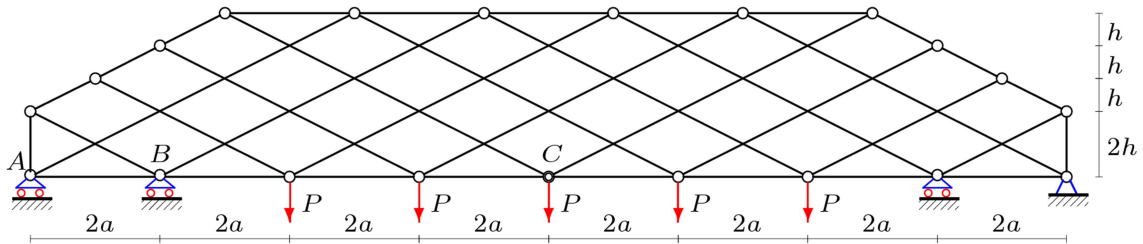


Рис. 5. Ферма, $n=4$. Нагрузка, распределенная по нижнему поясу

Более простое решение для коэффициентов в формуле прогиба (2) получается при действии одной силы в середине пролета (рис. 6):

$$\begin{aligned}
C_1 &= (20k^3 + 30(1 - (-1)^k)k^2 + 10(4 - 3(-1)^k)k - 3(-1)^k + 3) / 12, \\
C_2 &= 5(2k + 1 - (-1)^k) / 4, \\
C_3 &= 2(1 - (-1)^k).
\end{aligned}
\tag{6}$$

Заметим, что степени полиномов в этом случае меньше, чем в задаче о действии распределенной нагрузки.

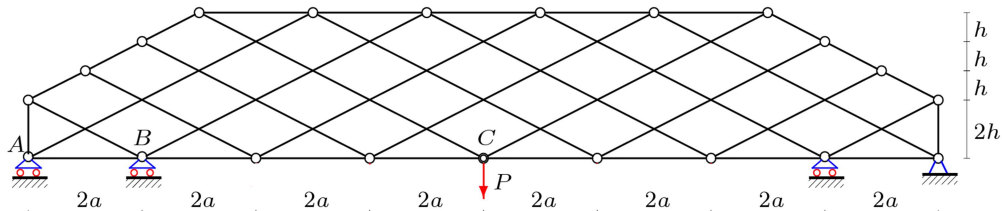


Рис. 6. Ферма, $n=4$. Сосредоточенная сила в середине пролета

Анализ полученных результатов. Прогиб. Рассмотрим, например, ферму постоянной длины с постоянной, не зависящей от числа панелей нагрузкой. Интересно проследить, как в этом случае решение зависит от числа панелей и есть ли какие-нибудь рекомендации к выбору этого числа. Для этого построим графики решений (2) с коэффициентами, найденными для нагрузки по верхнему поясу при $P_0 = 2(n+2)P$, $L = 4na$ (рис. 7). Относительный прогиб обозначим как $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$.

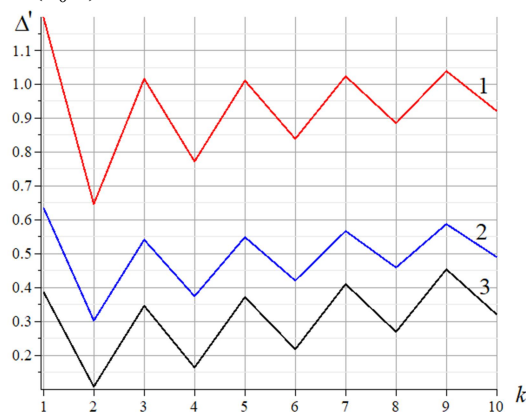


Рис. 7. Зависимость относительного прогиба от числа панелей для распределенной по верхнему поясу нагрузки. $L=60$ м, 1- $h=1$ м; 2- $h=2$ м; 3- $h=6$ м

Кривые имеют резкие скачки, показывающие, что неудачный выбор числа панелей может заметно уменьшить жесткость конструкции. Относительный прогиб при $k=6$ и $k=7$ различается почти в два раза. С увеличением числа панелей (при фиксированном пролете и нагрузке) относительный прогиб, хотя и не монотонно, но растет. В системе Maple можно найти предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k = h / (4L)$, свидетельствующий о наличии наклонной асимптоты с таким углом.

Графики зависимости прогиба от числа панелей, построенные для случая нагружения нижнего пояса, имеют подобный вид. Эта же зависимость для случая одной силы имеет принципиально иной вид (рис. 8).

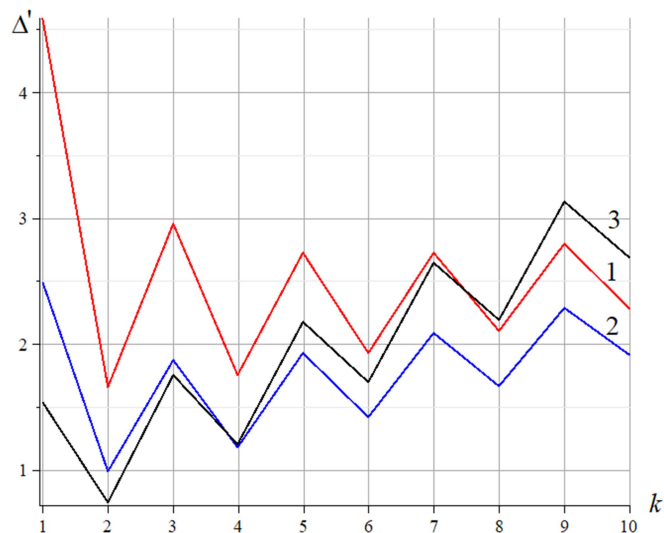


Рис. 8. Зависимость относительного прогиба от числа панелей для сосредоточенной нагрузки. $L=60$ м, 1– $h = 1$ м; 2– $h = 2$ м; 3– $h = 6$ м

Кривые также имеют сильные изломы и также не монотонно растут, но порядок кривых, построенных для различных высот при $k=4$, меняется. Оказывается, что ферма с наибольшей высотой не самая жесткая. Это видно из самопересечения кривых 2 и 3 при $k=4$.

Анализ решения и кривых на рис. 6 и 7 показывает, что зависимость прогиба от высоты нелинейная. Проиллюстрируем это на рис. 9 при длине пролета $L=40$ м в случае равномерного нагружения узлов верхнего пояса фермы.

В зависимости от числа панелей точка минимума выражена сильнее ($k=10$) или слабее ($k=2$). Однако она в любом случае существует. Это показывает предел, выражающий угол наклона асимптоты $\lim_{h \rightarrow \infty} \Delta' / h = P(10k^2 + 26k + 83 - (-1)^k(26k + 83)) / (8L) > 0$. Характерно, что зависимость угла наклона от числа панелей квадратичная. Это также прослеживается из графика на рис. 8.

Распределение усилий. Помимо величины прогиба фермы важной ее характеристикой является распределение усилий по стержням поясов и решетки. Средства Maple позволяют это наглядно проиллюстрировать, выделив таким образом наиболее опасные сжатые стержни, для которых необходим расчет на устойчивость, и растянутые, рассчитываемые на потерю прочности.

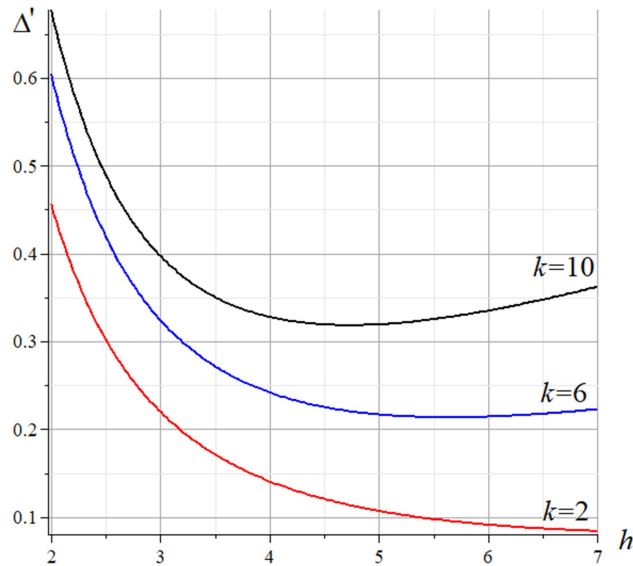


Рис. 9. Зависимость относительного прогиба от высоты h для распределенной по верхнему поясу нагрузки, $L = 40$ м

На схемах рис. 10 и 11, построенных для случая загрузки нижнего пояса, сжатые стержни выделены синим цветом, растянутые – красным. Толщина линий пропорциональна усилиям. Цифрами указаны относительные значения S/P_0 , где $P = P_0/(2n-3)$. Для сравнения одна схема (рис. 10) приведена для четного числа панелей между опорами, другая (рис. 11) — для нечетного. Принят пролет $L=4na= 50$ м, высота $h=2$ м.

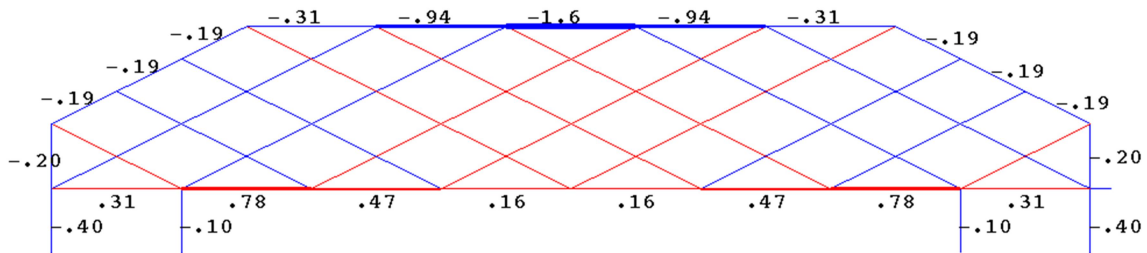


Рис. 10. Распределение усилий при $n=4, k=1, a=L/(4n)=3,12$ м

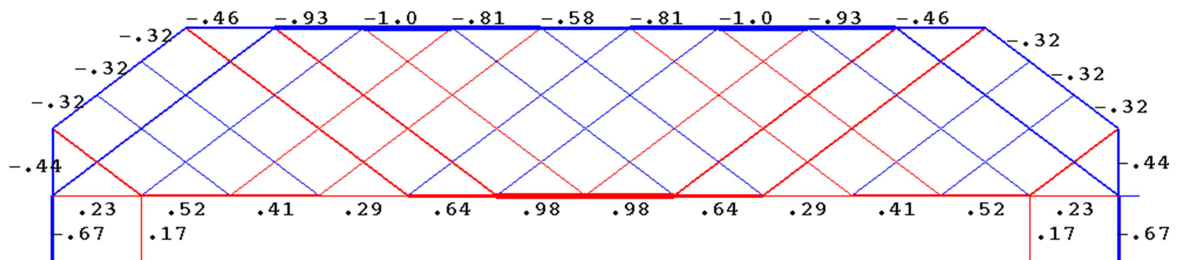


Рис. 11. Распределение усилий при $n=6, k=2, a=L/(4n)=2,08$

Сопоставляя распределения при $n=4$ и $n=6$, замечаем, что при одной и той же длине пролета, высоте фермы и суммарной нагрузке усилия в некоторых стержнях отличаются не только по величине (в боковых стойках отличие в два раза), но и знаком. Наиболее характерно изменение знака реакции второй с края подвижной опоры. Вместо того, чтобы поддерживать конструкцию, разгружая тем самым боковую опору, эта опора, имея растягивающее усилие, только нагружает сжатую боковую опору. Этот же эффект наблюдается и при других

значениях числа k . Обобщая описанным образом решения для различного числа панелей, получим значения реакций (знак реакции обратный к знаку усилия в соответствующем опорном стержне):

$$Y_A = Pk(5 + (-1)^k) / 2, \quad Y_B = -P((-1)^k(2k + 1) + 1) / 4.$$

Этот факт подсказывает, использование фермы с такой схемой при четном числе k не рационально, особенно учитывая, что при этом два раскоса в середине пролета оказываются сжатыми, а это заставляет использовать стержни с увеличенным сечением во избежание потери устойчивости сжатых стержней.

Заключение

Предложена не совсем обычная схема фермы. Дополнительные опоры выравнивают усилия при опирании, а скошенные края верхнего пояса делают ее удобной в конструкциях покрытий зданий и сооружений. Несмотря на достаточно сложную конструкцию, не позволяющую, в частности, применять при расчете такие методы, как метод последовательного вырезания узлов и метод сечений, ферма допускает для прогиба компактное аналитическое решение. Линейная комбинация решений, полученных для трех рассмотренных видов нагрузки, дает возможность использовать их для широкого класса задач о прогибе. Дополнительным преимуществом аналитического решения является его точность, не зависящая от сложности фермы (числа панелей). Численные методы при весьма большом числе панелей склонны к потере точности. Это можно продемонстрировать и на модельных задачах в системе Maple. Искусственно занижая точность вычислений (параметр Digits) и решая задачу численно в той же программе, в которой выводились формулы для прогиба, можно в этом убедиться. Не последнее значение имеет и время счета. Еще одно положительное свойство предложенного алгоритма проявилось неожиданно, когда при некоторых значениях числа панелей было обнаружено, что определитель обращается в ноль. Первоначальные численные расчеты этот момент пропустили за счет погрешности счета. Действительно, если совсем немного изменить координаты некоторых узлов, то кинематически непротиворечивой картины возможных скоростей узлов (см. рис. 2) уже не будет иметь место и определитель в ноль не обратится. Кроме того, при численном счете модели фермы с жесткими креплениями в узлах можно упустить случаи, опасные для шарнирной системы. Такие конструкции будут держаться только за счет жестких соединений в узлах, в то время как было бы разумнее просто немного изменить число панелей и ферма была бы жесткой даже при нарушении жестких связей в узлах.

Если кратко, то в качестве главных выводов из работы можно указать два. Первое — простое аналитическое решение задачи о прогибе фермы с произвольным числом стержней возможно и оно может быть достаточно компактным. Второе — фермы могут иметь скрытые и опасные дефекты, которые иногда проявляются при одном числе панелей и отсутствуют в других случаях. Перенос решений, полученных для одних ферм на другие, следует делать осторожно, имея в виду указанный эффект вырождения определителя.

Библиографический список

1. Degertekin S. O., Lamberti L., Ugur I. B. Sizing, layout and topology design optimization of truss structures using the Jaya algorithm // *Applied Soft Computing* 2017, Volume 70, September, Pp. 903–928. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2017.10.001>

2. Feng, L. J., Xiong, J., Yang, L. H., Yu, G. C., Yang, W., Wu, L. Z. Shear and bending performance of new type enhanced lattice truss structures // *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, Volume 134, December, Pp. 589–598. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.10.045>
3. Kaveh A., Laknejadi K. A hybrid evolutionary graph-based multi-objective algorithm for layout optimization of truss structures // *Acta Mechanica*. 2013. Volume 224. No. 2. Pp. 343-364. DOI 10.1007/s00707-012-0754-5
4. Lin W., Yoda T. Bridge Engineering: Classifications, Design Loading, and Analysis Methods. Chapter Eight . Truss Bridges. Butterworth-Heinemann, 2017. Pp. 137–153.
5. Ufimtsev E. Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations // *Procedia Engineering*. 2016. T. 150. Pp. 1891-1897.
6. Branco J. M. Non-destructive assessment, full-scale load-carrying tests and local interventions on two historic timber collar roof trusses // *Engineering Structures*. 2017. Volume 140. Pp. 209-224. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.02.053>
7. Игнатъев А. В., Игнатъев В. А., Онищенко Е. В. Решение геометрически нелинейных задач статики шарнирно-стержневых систем на основе метода конечных элементов в форме классического смешанного метода // *Вестник МГСУ*. 2016. № 2. С. 20-33.
8. Tinkov D. V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures // *Magazine of civil Engineering*. 2015. No. 5(57). Pp. 66-73. doi: 10.5862/MCE.57.6
9. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // *Инженерно-строительный журнал*. 2016. №1(61). С. 25–32) doi: 10.5862/MCE.61.3
10. Tinkov D.V., Safonov A.A. Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2017, Volume 46, No. 1, Pp. 46–52. DOI: 10.3103/S1052618817010149
11. Kirsanov M. N. The exact formulas for calculating deflection and forces in the rods of the 'Molodechno' truss with an arbitrary number of panels. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 1. Pp. 33–41 doi: 10.18720/MCE.71.7
12. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 3. P. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7
13. Voropay R.A. Derivation of the formula for the deflection of the truss with additional horizontal struts // *Постулат*. 2018. № 6 (32). С. 105.
14. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The formula for the deflection of a truss loaded at half-span by a uniform load // *Постулат*. 2018. № 3 (29). С. 2.
15. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Two-parameter derivation of the formula for deflection of the console truss // *Постулат*. 2018. № 5-1 (31). С. 22.
16. Тиньков Д.В. Индуктивный вывод формулы для горизонтального перемещения башенной конструкции // В сборнике: *Международный научный семинар "Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии" - GRACOS-17. Международная школа по математическому моделированию в системах компьютерной математики - "KAZCAS-2017". Международная научно-практическая конференция - "ИТОН-2017"* Материалы семинара, школы и конференции. Под общей редакцией Ю.Г. Игнатъева. 2017. С. 249-254.
17. Тиньков Д.В. Формулы для расчёта прогиба вспарушенной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2016. Т. 2. № 13 (13). С. 10-14.

18. Kirsanov M.N., Andreyevskaya T.M. Analysis of the effect of elastic deformation of the mast on the positioning of antenna and radar equipment // Magazine of Civil Engineering. 2013. No.5(40). Pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.40.6
19. Kirsanov M. N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52 - 58. doi: <https://doi.org/10.5862/MCE.64.5>
20. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure // Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 08. Pp. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
21. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586. DOI: www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586
22. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. Volume 85. No. 9. Pp. 607 – 617.
23. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Volume 54. No. 4. Pp. 756-782.
24. Kaveh A., Rahami H., Ardalan Asl M., Mirghaderi S.R. Analysis of regular structures with member non-regularity using the equilibrium equations and singular valued decomposition // Eng. Comput. 2013. Volume 30. Pp.21–48.
25. Kaveh A., Rahami H. Topology and graph products; eigenproblems in optimal structural analysis // Commun Numer Methods Eng 2008. Volume 24. Pp. 929–45.
26. Kaveh A., Rahami H. Tri-diagonal and penta-diagonal block matrices for efficient eigen-solutions of problems in structural mechanics // Acta Mech 2007. Volume 192. Pp.77–87.
27. Kaveh A., Rahami H. Factorization for efficient solution of eigenproblems of adjacency and Laplacian matrices for graph products // Int. J. Numer Methods. Eng. 2008. Volume 75. Pp.58–82.
28. Kaveh A., Rahami H. An efficient method for decomposition of regular structures using graph products // Int. J. Numer. Methods. Eng. 2004. Volume 61 Pp. 1797–808.
29. Галишникова В.В., Игнатьев В.А. Регулярные стержневые системы. Теория и методы расчета. - Волгоград: ВолгГАСУ, 2006.
30. Игнатьев В.А. Расчет регулярных стержневых систем - Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
31. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 3 (125). С. 284-292. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.3.284-292
32. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Спектр собственных частот колебаний внешне статически неопределимой фермы // Транспортное строительство. 2019. №2. С. 20-23.
33. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. №1(20). С. 14-20.
34. Заборская Н.В. О зависимости частоты колебаний груза от его местоположения на ферме // В книге: Радиоэлектроника, электротехника и энергетика. Тезисы докладов Двадцать второй Международной научно-технической конференции студентов и аспирантов: в 3 томах. 2016. С. 244.
35. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015.Т. 1. С. 31-34.

36. Ахмедова Е.Р., Канатова М.И. Собственные частоты колебаний плоской балочной фермы регулярной структуры // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов. Тамбов: 31 октября 2014. С. 17-18.
37. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
38. Кирсанов М.Н. Maple и Maple. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.

Reference

1. Degertekin S. O., Lamberti L., Ugur I. B. Sizing, layout and topology design optimization of truss structures using the Jaya algorithm. *Applied Soft Computing* 2017. Volume 70. September. Pp. 903–928. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2017.10.001>
2. Feng, L. J., Xiong, J., Yang, L. H., Yu, G. C., Yang, W., Wu, L. Z. Shear and bending performance of new type enhanced lattice truss structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, Volume 134, December. Pp. 589–598. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.10.045>
3. Kaveh A., Laknejadi K. A hybrid evolutionary graph-based multi-objective algorithm for layout optimization of truss structures. *Acta Mechanica*. 2013. Volume 224. No. 2. Pp. 343-364. doi 10.1007/s00707-012-0754-5
4. Lin W., Yoda T. *Bridge Engineering: Classifications, Design Loading, and Analysis Methods*. Chapter Eight . Truss Bridges. Butterworth-Heinemann. 2017. Pp. 137–153
5. Ufimtsev E. Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations. *Procedia Engineering*. 2016. T. 150. Pp. 1891-1897.
6. Branco J. M. Non-destructive assessment, full-scale load-carrying tests and local interventions on two historic timber collar roof trusses. *Engineering Structures*. 2017. Volume 140. Pp. 209-224. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.02.053>
7. Ignatiev A. V., Ignatiev V. A., Onishchenko E. V. Solving geometrically non-linear problems of statics of hinge-rod systems based on the finite element method in the form of the classical mixed method. *Proceedings of the Moscow State University of Civil Engineering*. 2016. issue 2. Pp. 20–33.
8. Tinkov D. V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures. *Magazine of civil Engineering*. 2015. No. 5(57). Pp. 66-73. doi: 10.5862/MCE.57.6
9. Tinkov D.V. The optimal geometry of a flat beam diagonal truss, taking into account the linear creep of the material. *Magazine of civil Engineering*. 2016. №1(61). Pp. 25–32. doi: 10.5862/MCE.61.3
10. Tinkov D.V., Safonov A.A. Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2017. Volume 46. No. 1, Pp. 46–52. doi: 10.3103/S1052618817010149
11. Kirsanov M. N. The exact formulas for calculating deflection and forces in the rods of the 'Molodechno' truss with an arbitrary number of panels. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 1. Pp. 33–41 doi: 10.18720/MCE.71.7
12. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 3. Pp. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7
13. Voropay R.A. Derivation of the formula for the deflection of the truss with additional horizontal struts. *Postulat*. 2018. № 6 (32). P. 105.
14. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The formula for the deflection of a truss loaded at half-span by a uniform load. *Postulat*. 2018. № 3 (29). Pp. 2.
15. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Two-parameter derivation of the formula for deflection of the console truss. *Postulat*. 2018. № 5-1 (31). Pp. 22.
16. Tinkov D.V. Inductive derivation of the formula for the horizontal movement of the tower structure. In the collection: *International Scientific Seminar "Nonlinear Models in Mechanics, Statistics, Field Theory and Cosmology" - GRACOS-17*. International School on Math-

- emational Modeling in Computer Mathematics Systems - "KAZCAS-2017". International Scientific and Practical Conference - "ITON-2017" Seminar, school and conference materials. Under the general editorship of Yu.G. Ignatiev. 2017. Pp. 249-254.
17. Tinkov D.V. Formulas for calculating the deflection of a flamed beam diagonal truss with an arbitrary number of panels. *Construction mechanics and construction*. 2016. Volume 2. № 13 (13). Pp. 10-14.
 18. Kirsanov M.N., Andreyevskaya T.M. Analysis of the effect of elastic deformation of the mast on the positioning of antenna and radar equipment. *Magazine of Civil Engineering*. 2013. No.5(40). Pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.40.6
 19. Kirsanov M. N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 4. Pp. 52 - 58. doi: <https://doi.org/10.5862/MCE.64.5>
 20. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 08. Pp. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
 21. Kirsanov M.N. Analytical calculation of deflection of rectangular spatial roof structure. *Proceedings of the Moscow State University of Civil Engineering*. 2018. Volume 13, issue 5 (116), pp. 579–586. doi: www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586
 22. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech*. 2005. Volume 85. No. 9. Pp. 607 – 617.
 23. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Volume 54. No. 4. Pp. 756-782.
 24. Kaveh A., Rahami H., Ardalan Asl M., Mirghaderi S.R. Analysis of regular structures with member non-regularity using the equilibrium equations and singular valued decomposition. *Eng. Comput*. 2013. Volume 30. Pp.21–48.
 25. Kaveh A., Rahami H. Topology and graph products; eigenproblems in optimal structural analysis. *Commun Numer Methods Eng* 2008. Volume 24. Pp. 929–45.
 26. Kaveh A., Rahami H. Tri-diagonal and penta-diagonal block matrices for efficient eigen-solutions of problems in structural mechanics. *Acta Mech* 2007. Volume 192. Pp.77–87.
 27. Kaveh A., Rahami H. Factorization for efficient solution of eigenproblems of adjacency and Laplacian matrices for graph products. *Int. J. Numer Methods. Eng.* 2008. Volume 75. Pp.58–82.
 28. Kaveh A., Rahami H. An efficient method for decomposition of regular structures using graph products. *Int. J. Numer. Methods. Eng.* 2004. Volume 61. Pp. 1797–808.
 29. Galishnikova V.V., Ignatiev V.A. Regular core systems. Theory and methods of calculation. - Volgograd: VolgGASU, 2006.
 30. Ignatiev V.A. Calculation of regular core systems – Saratov: Saratov Higher Military Chemical Military School, 1973.
 31. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels. *Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*. 2019. Volume 14. No. 3 (125). Pp. 284-292. doi: 10.22227/1997-0935.2019.3.284-292
 32. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Spectrum of natural frequencies of oscillations of externally statically indefinable truss. *Transport construction*. 2019. №2. Pp. 20-23.
 33. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analytical expressions of frequencies of small oscillations of a beam truss with an arbitrary number of panels. *Construction mechanics and construction*. 2019. №1 (20). Pp. 14-20.
 34. Zaborskaya N. V. On the dependence of the frequency of oscillations of the cargo from its location on the truss. In the book: Radio electronics, electrical engineering and energy. Abstracts of the Twenty-second International Scientific and Technical Conference of Students and Postgraduates: in 3 volumes. 2016. Pp. 244.
 35. Kanatov M.I. Frequency equation and analysis of oscillations of a flat beam truss. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. M: Infra-M. 2015. Volume 1. Pp. 31-34.

36. Akhmedova E.R., Kanatova M.I. Own vibration frequencies of a flat beam truss of a regular structure. Science and education in the XXI century: a collection of scientific papers on the materials. Tambov: October 31. 2014. Pp. 17-18.
37. Osadchenko N. V. Analytical solutions of deflection problems for flat trusses of arch type. Construction mechanics and construction. 2018. Volume 1. No. 6. Pp.12-33.
38. Kirsanov M. N. Maple and Maplet. Solutions of mechanics problems. SP.: Publishing house LAN, 2012. 512 p.

STATIC AND KINEMATIC ANALYSIS OF FLAT TRUSS OF REGULAR TYPE

M. N. Kirsanov¹

National Research University "MPEI"
Moscow, Russia

¹Dr of Physics and Mathematics, professor, tel.: +7(495)3627314; e-mail: c216@ya.ru

The scheme of statically determinate truss with a periodic structure are analyzed. Formulas are derived for the deflection of the truss, depending on the size of the truss and the number of panels. To generalize a number of solutions for trusses with different number of panels, the induction method is applied to the general case. All transformations and solutions of the equations of node equilibrium are performed in the system of computer mathematics Maple. To find the recurrence equations, which are satisfied by the coefficients in the formulas, special operators of the computer mathematics system Maple are involved. It is shown that in some cases with a certain number of panels the trusses become kinematically variable. Appropriate schemes for the distribution of possible node velocities are given. The asymptotic property of the solution is found. The problem is solved for three types of symmetric load. It is shown that the obtained dependence has a jump-like character. This allows you to use the solution in optimization problems when choosing the number of panels of the designed structure.

Keywords: Формы, induction, Maple, deflection, kinematic variability