

ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОГИБА БАЛОЧНОЙ МНОГОРЕШЕТЧАТОЙ ФЕРМЫ

Статически определяемая плоская ферма с двойной решеткой равномерно нагружена вертикальными силами по верхнему поясу. Получена точная зависимость прогиба фермы от ее размеров, нагрузки и числа панелей в упругой стадии ее работы. Выведены формулы для наиболее сжатых и растянутых стержней верхнего и нижнего поясов. Усилия в стержнях определялись методом вырезания узлов в аналитической форме с применением системы компьютерной математики Maple. Перемещения вычислены по формуле Максвелла – Мора в предположении, что жесткости всех стержней одинаковы. Для обобщения решения на произвольное число панелей использовался метод индукции. Замечено, что коэффициенты формулы удовлетворяют однородным рекуррентным уравнениям, решение которых методами компьютерной математики дает искомую общую зависимость в виде полинома. Обнаружено кинематическое вырождение фермы при числе панелей, кратном трем. Приводится пример соответствующей кинематически непротиворечивой схемы распределения виртуальных скоростей узлов. Выводится формула для горизонтального смещения подвижной опоры от действия вертикальной нагрузки. Кривые зависимости прогиба от высоты фермы обнаруживают минимумы, наличие которых позволяет оптимизировать конструкцию по жесткости и весу. Зависимость прогиба от числа панелей при фиксированной нагрузке на ферму и заданной длине пролета имеет скачкообразный характер.

Ключевые слова: балочная ферма, прогиб, Maple, индукция, число панелей.

Постановка задачи

История применения решетчатых ферм берет свое начало от работ Кулибина [1, с. 121]. Первые расчеты таких конструкций выполнялись только численно. Особенность решетчатых схем исключает простые аналитические расчеты усилий в стержнях. Для метода Риттера, традиционно применяемого в ручных «расчетах», в данной ферме не существует соответствующего сечения, а метод последовательного вырезания узлов весьма трудоемок, особенно при большом числе стержней. Единственно возможный вариант расчета — составление и решение системы уравнений равновесия всех узлов. Современные численные методы легко справляются с такой задачей. Для получения аналитических решений привлекают специализированные пакеты символьной математики (Mathematica, Maple, Maxima и др.). Однако, несмотря на огромные возможности таких систем, существует количественное ограничение в сложности рассчитываемых конструкций, связанное с особенностями символьных преобразований. Скорость символьных преобразований существенно меньше численных и, главное, резко падает с увеличением сложности объекта. Так, например, численный расчет фермы с 100 панелями занимает секунды, в то время как символьные преобразования могут занять часы. Поэтому в [2] для получения аналитических решений сложных регулярных конструкций был предложен метод индукции, позволяющий вывести формулы для прогиба и усилий в стержнях конструкций с произвольным числом элементов. Именно этим методом в настоящей работе производится расчет фермы (рис. 1).

Расчет усилий

Ферма, содержащая $2n + 5$ шарниров и $m = 4n + 10$ стержней, равномерно нагружена по верхнему поясу вертикальными силами P . Для определения усилий в стержнях фермы используем программу [3], основанную на методе вырезания узлов и решении системы уравнений равнове-

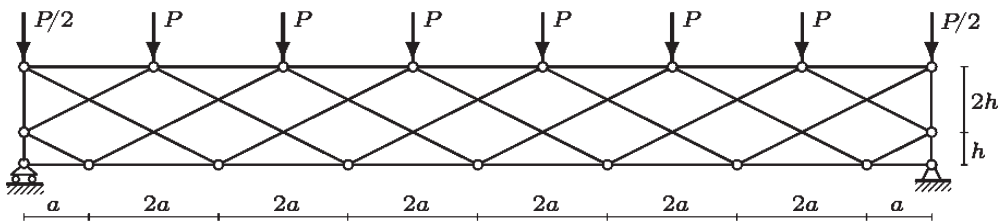


Рис. 1. Ферма, $n = 7$

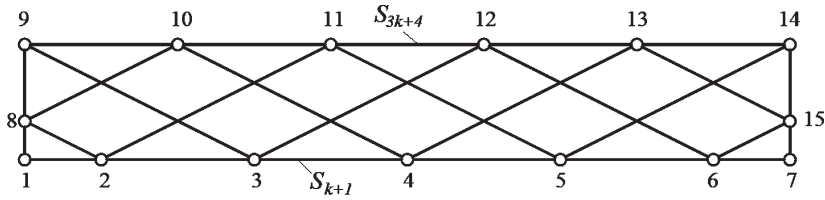


Рис. 2. Нумерация узлов, $n = 5$, $k = 2$

сия в символьной форме. Программа реализована на языке Maple. Стержни фермы упругие, модуль упругости E . Площади сечений стержней F приняты одинаковыми. Пронумеруем шарниры и стержни фермы (рис. 2).

Узлы нижнего пояса нумеруются слева направо, затем нумеруются узлы верхнего пояса. Начало координат выбираем в левой шарнирной опоре:

$$\begin{aligned} x_1 = x_{n+3} = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_{i+1} = 2ai - a, \quad y_{i+1} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ x_{i+n+3} = 2a(i-1), \quad y_{i+n+3} = 3h, \quad i = 1, \dots, n+1, \\ x_{n+2} = x_{2n+5} = 2na, \quad y_{n+2} = 0, \quad y_{n+3} = y_{2n+5} = h. \end{aligned}$$

Конфигурация решетки фермы представлена условными векторами $\bar{N}_i, i = 1, \dots, m$, координаты которых являются номерами шарниров по концам соответствующих стержней. Для стержней нижнего пояса, например, имеем следующие вектора: $\bar{N}_i = [i, i+1], i = 1, \dots, n+1$. Матрица G системы уравнений равновесия узлов состоит из направляющих косинусов стержней, вычисляемых по координатам узлов в соответствии с векторами $\bar{N}_i, i = 1, \dots, m$. В нечетные строки матрицы записываются коэффициенты уравнений проекций на ось x , в четные — на ось y .

Расчет усилий в фермах с разным числом панелей показал, что фермы, число панелей которых кратно трем, кинематически изменяемы. Определитель системы уравнений равновесия в этом случае вырождается. Конструкция становится мгновенно изменяемым механизмом. При $n = 3$ распределение скоростей будет следующим. Стержни 2-6 и 4-11 повернутся вокруг опор 1 и 5, стержни 6-8 и 9-11 — вокруг угловых шарниров 7 и 10 (рис. 3). Стержни 7-3 и 3-10 останутся неподвижными, стержни 2-9 и 4-8 совершат мгновенно поступательные движения. Очевидно соотношение скоростей $u/a = v/h$. Точно такая же картина скоростей будет для фермы с числом панелей 6, 9, 12, ...

Случаи аналогичного эффекта приобретения изменяемости в плоских фермах и характерные картины скоростей рассмотрены автором в [4–6].

Пусть рассматриваемая ферма имеет нечетное число панелей $n = 2k + 1$, не кратное трем. Последовательность

$$k = (6j + 1 - (-1)^j) / 4, \quad j = 1, 2, 3, 4 \dots \quad (1)$$

удовлетворяет этому требованию и соответственно дает значения чисел панелей 5, 7, 11, 13, ... Прогиб фермы (в среднем шарнире нижнего пояса) определяем по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} \frac{S_i s_i l_i}{EF},$$

где S_i, s_i — усилия в i -м стержне фермы от приложенной нагрузки и от единичной вертикальной силы, приложенной к центральному узлу нижнего пояса, соответственно. Суммирование ведется по всем стержням фермы, кроме жестких опорных. Последовательное решение задачи с использованием системы символьной математики для ферм с $j = 1, 2, 3, 4 \dots$ дает следующее общее для всех ферм выражение прогиба

$$\Delta EF = P \frac{A_j a^3 + H_j h^3 + C_j c^3}{2h^2}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} A_j = \frac{1}{8} \left(30j^4 + 20(3 - (-1)^j)j^3 + 2(19 - 15(-1)^j)j^2 + 8(1 - 5(-1)^j)j + 15(1 - (-1)^j) \right), \\ H_j = \frac{1}{2} (2j + 1 - 3(-1)^j), \quad C_j = \frac{3}{4} (2j^2 + 2(1 - 3(-1)^j)j + 3(1 - (-1)^j)). \end{aligned}$$

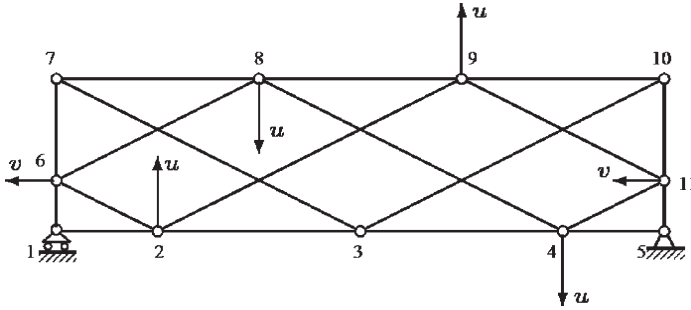


Рис. 3. Схема возможных скоростей при $n = 3$

Введено обозначение $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Зависимости коэффициентов при степенях получены как решения рекуррентных уравнений с помощью операторов `rgf_findrecur` и `rsolve` системы Maple.

Разработанный алгоритм позволяет легко перестроить решение на другие нагрузки и перемещения. Вычислим горизонтальное смещение подвижной опоры. Очевидно, в основном эта величина определяется деформацией стержней нижнего пояса, а в реальных конструкциях эти элементы достаточно жесткие, поэтому величина смещения будет весьма незначительной. Большой интерес в таком исследовании, скорее всего, имеет выявление его особенностей, знание которых может пригодиться при эксплуатации сооружения, где горизонтальное смещение опоры зависит также и от температурных деформаций. Используем ту же формулу Максвелла – Мора, но s_i – это уже усилие в i -м стержне фермы от единичной горизонтальной силы, приложенной к левой опоре. Метод индукции для фермы, число панелей которой не кратно трем $n = (6j - (-1)^j - 3)/4$, $j = 1, 2, 3, \dots$ (здесь не наложено ограничение на нечетность панелей n) дает следующее выражение для смещения

$$\Delta EF = P \frac{(6j^3 - 3(3 + (-1)^j)j^2 + (13 + 3(-1)^j)j - 5(1 - (-1)^j))a^2}{16h}. \quad (3)$$

Одновременно с вычислением прогиба можно получить и аналитические выражения для наиболее сжатых и растянутых стержней. Расчет показывает, что это усилия в средних стержнях верхнего и нижнего поясов (рис. 2):

$$S_{3k+4} = -S_{k+1} = -P \frac{(6j^2 + 2(3 - (-1)^j)j + 1 - (-1)^j)a}{8h}.$$

Расчет произведен для нечетного числа панелей $n = 2k + 1$ и последовательности номеров (1). Заметим, что простые способы вычисления усилий в отдельных стержнях (метод Риттера) в данной конструкции неприменимы. Индуктивный подход является простым способом вывода формулы для усилий в этих стержнях. Возможно применение также метода замены стержней Геннеберга [7, с. 55], но этот способ плохо алгоритмируется и требует индивидуального подхода к каждому стержню.

Анализ

Проанализируем, как меняется прогиб фермы при постоянном пролете $L = 2an$ в зависимости от числа панелей. Введем обозначение для суммарной нагрузки на ферму $P_s = nP$, так чтобы с изменением числа панелей общая нагрузка не менялась. Зависимость безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (P_s L)$, построенная по формуле (2) от числа панелей (размеры h на рис. 4 указаны в метрах) обнаруживает скачки, более выраженные при малых n . С ростом n прогиб почти не меняется, что позволяет для грубых расчетов ориентироваться на результаты, полученные при малых n . В данном случае это значения $n \approx 10$.

Зависимость же от высоты (при тех же предположениях о нагрузке и пролете) имеет минимум (рис. 5). Компактное аналитическое выражение, соответствующее этой точке найти не удастся, но можно заметить, что от числа панелей оно зависит заметно (оптимальная высота h растет с увеличением числа панелей, а прогиб уменьшается). Безусловно, это не повод «мель-

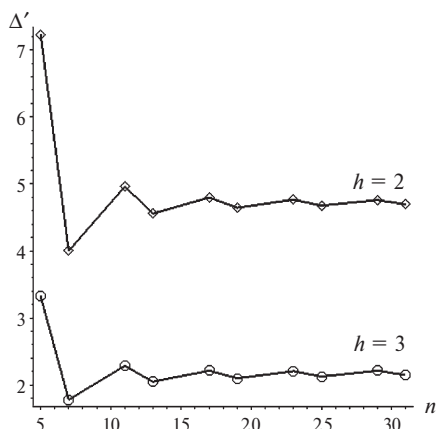
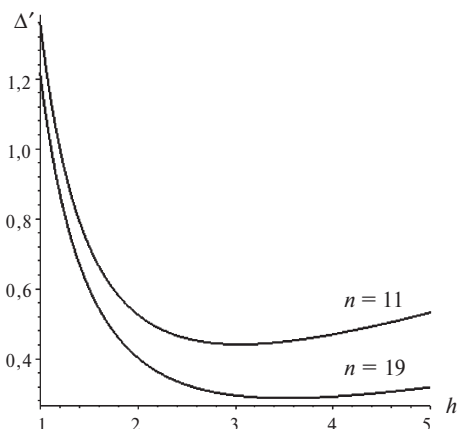


Рис. 4. Зависимость прогиба от числа пролетов

Рис. 5. Зависимость прогиба от высоты (в метрах), $L = 80$ м, $L = 20$ м

чить» панели, так как с уменьшением размера a увеличивается общее число стержней и узлов в конструкции, следовательно, растет общий вес и трудоемкость изготовления и монтажа.

Заключение

Рассмотренная схема фермы обнаруживает скрытую особенность. При числе панелей, кратном трем, она становится кинематически изменяемой. Это свойство наиболее надежно выявляется при аналитическом расчете. При численном счете по той же программе [3], допускающей как численную, так и аналитическую моду, вырождение определителя часто скрытано за погрешностями счета и не всегда бросается в глаза. Аналитическое решение для прогиба и смещения опоры выявляет принципиальные особенности схемы конструкции, наиболее заметные из которых – скачкообразное изменение прогиба в зависимости от числа панелей и слабая зависимость прогиба от числа панелей при большом их числе. Эти свойства конструкции позволяют оптимизировать размеры фермы с целью экономии материала и увеличении ее жесткости. Примененный алгоритм допускает несложное обобщение на различные жесткости стержней. По сравнению с численным решением аналитическое решение дает возможность получать оценки прогиба для ферм с большим числом панелей без потери точности решения, что характерно для численных расчетов (SOFiSTiK, Ansys и др.) [8–10]. Аналитические решения методом индукции по программе [3] получены в [11–18]. Обзор точных решений для прогиба плоских ферм приведен в [19, 20].

Литература

1. Шусев П.В. Мосты и их архитектура. Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре. — М, 1953. — 360 с.
2. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал, 2012. № 5 (31). С. 38–42.
3. Кирсанов М.Н. Решебник. Теоретическая механика / Под ред. А.И.Кириллова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 382 с.
4. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения, 2015. № 8. С. 49–51.
5. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал, 2015. № 5 (57). С. 58–65. doi: 10.5862/MCE.57.
6. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений, 2015. № 3. С. 70–11.
7. Кирсанов М.Н. Задачи по теоретической механике с решениями в Maple 11. — М.: Физматлит, 2010. — 264 с.
8. Satojalov M., Žiūkās A. Investigation of mechanical state of spatial roof from steel trusses on asymmetric building // Mechanics. 2015. Vol. 21. № 1. Pp. 11–18.
9. Дмитриева Т.Л., Ле Ч.М.Д. Использование программного комплекса Ansys для решения задач оптимизации ферм // Проблемы оптимального проектирования сооружений: докл. 3-й Всерос. конф. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. арх.-стр. ун-та, 2014. С. 128–135.
10. Ходяков В.А. Оптимизация металлических ферм неразрезного пролетного строения // Транспорт. Транспортные сооружения. Экология. 2015. № 4. С. 114–129.

11. Тиньков Д.В. Формулы для расчёта прогиба вступарушенной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции, 2016. Т. 2. № 13 (13). С. 10–14.
12. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.
13. Ponomareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load // Science Almanac. 2016. N 4-3 (18). С. 257–259.
14. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
15. Voropai R.A., Kazmiruk I.Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss// Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 2-1(6). Pp. 10–12.
16. Voropai R.A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice // Science Almanac. 2016. N 4-3 (18). С. 238–240.
17. Shipaeva A.S. Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple//Science Almanac. 2016. N 5-3 (19). Pp. 236–239.
18. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels// Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 4-3 (8). Pp. 7-8.
19. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал, 2015. № 5 (57). С. 66–73.
20. Куйко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник, 2016. № 1 (7). С. 247–254.

Literatura

1. Schusev P.V. Mostyi i ih arhitektura. Gosudarstvennoe izdatelstvo literatury po stroitelstvu i arhitekture. — М, 1953. — 360 s.
2. Kirsanov M.N. Induktivnyiy analiz vliyaniya pogreshnosti montazha na zhestkost i prochnost ploskoy fermyi // Inzhenerno-stroitelnyiy zhurnal, 2012. № 5 (31). S. 38–42.
3. Kirsanov M.N. Reshebnik. Teoreticheskaya mehanika / Pod red. A.I.Kirillova. — М.: FIZMATLIT, 2008. — 382 s.
4. Kirsanov M.N. Raschet zhestkosti sterzhnevoy reshetki // Vestnik mashinostroeniya, 2015. № 8. S. 49–51.
5. Kirsanov M.N. Analiz progiba reshetchatoy balochnoy fermyi raspornogo tipa // Inzhenerno-stroitelnyiy zhurnal, 2015. № 5 (57). S. 58–65. doi: 10.5862/MCE.57.
6. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet balochnoy fermyi so slozhnoy reshetkoy // Stroitel'naya mehanika i raschet sooruzheniy, 2015. № 3. S. 70–11.
7. Kirsanov M.N. Zadachi po teoreticheskoy mehanike s resheniyami v Maple 11. — М.: Fizmatlit, 2010. — 264 s.
8. Samofalov M., Žiukas A. Investigation of mechanical state of spatial roof from steel trusses on asymmetric building // Mechanics. 2015. Vol. 21. No. 1. Pp. 11–18.
9. Dmitrieva T.L., Le Ch.M.D. Ispolzovanie programmnoy kompleksa Ansys dlya resheniya zadach optimizatsii ferm // Problemy optimal'nogo proektirovaniya sooruzheniy: dokl. 3-y Vseros. konf. Novosibirsk: Izd-vo Novosib. gos. arh.-str. un-ta, 2014. S. 128–135.
10. Hodyakov V.A. Optimizatsiya metallicheskih ferm nerazreznogo proletnogo stroeniya// Transport. Transportnyie sooruzheniya. Ekologiya. 2015. № 4. S. 114–129.
11. Tinkov D.V. Formulyi dlya raschYota progiba vsparushennoy balochnoy raskosnoy fermyi s proizvolnyim chisлом paneley // Stroitel'naya mehanika i konstruksii, 2016. Т. 2. № 13 (13). S. 10–14.
12. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.
13. Ponomareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load // Science Almanac. 2016. N 4-3 (18). S. 257–259.
14. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 1-4 (5). S. 6-7.
15. Voropai R.A., Kazmiruk I.Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss// Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 2-1(6). Pp. 10–12.
16. Voropai R.A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice // Science Almanac. 2016. N 4-3 (18). S. 238–240.
17. Shipaeva A.S. Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple//Science Almanac. 2016. N 5-3(19). Pp. 236–239.
18. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels// Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 4-3 (8). Pp. 7-8.
19. Tinkov D.V. Sravnitelnyiy analiz analiticheskikh resheniy zadachi o progibe fermennykh konstruksiy // Inzhenerno-stroitelnyiy zhurnal, 2015. № 5 (57). S. 66–73.
20. Kiyko L.K. Analiticheskaya otsenka progiba arochnoy fermyi pod deystviem vetrovoy nagruzki // Nauchnyiy vestnik, 2016. № 1 (7). S. 247–254.