

УДК 624.04:624.5

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ДЕФОРМАЦИЙ И УСИЛИЙ В ПЛОСКОЙ ВАНТОВОЙ ФЕРМЕ

Кирсанов Михаил Николаевич

др. физ.-мат. наук, проф.,

Национальный исследовательский университет "МЭИ"

E-mail: c216@ya.ru

Предлагается схема статически определимой регулярной арочной фермы с нижним поясом, закрепленным на вертикальных вантах. Выводятся формулы зависимости прогиба от размеров фермы, нагрузки и числа панелей. Получены формулы для усилий в наиболее сжатых и растянутых элементах фермы.

Ключевые слова: ферма, ванты, индукция, прогиб, Maple

ANALYTICAL CALCULATION OF STRAIN AND FORCES IN THE FLAT CABLE TRUSS

Kirsanov Mikhail Nikolaevich

Dr. phys.-math. Sci., Prof.

National research University "MPEI"

E-mail: c216@ya.ru

The scheme of the flat statically determinate beam regular truss is investigated. Formulas for the dependence of the deflection and horizontal displacement of the movable support of the truss on the load and number of panels are obtained. The formulas for efforts in the most compressed and stretched elements of the truss are derived.

Key words: Truss, displacement of the support, induction, deflection, Maple

Введение

Программное обеспечение, основанное на численных методах (в основном на методе конечных элементов), дает возможность решать сложные задачи строительной механики при сложных воздействиях, в

линейной и нелинейной постановке [1]. Независимо от этого направления развития методов строительной механики в последнее время появляются точные аналитические решения задач о напряженно-деформированном состоянии регулярных (периодических) ферм [2-8]. Методы современной компьютерной математики имеют возможность выводить конечные формулы для прогиба и усилий в фермах. Основой для ввода в параметры решения числа панелей (или ячеек периодичности) является метод индукции [9], применимый и для пространственных ферм [10]. Этот метод используется ниже при расчете вантовой фермы.

Постановка задачи

Ферма (рис. 1) содержит $2n$ панелей в средней части пролета и по m панелей в боковых частях. Общее число стержней вместе с тремя опорными и вантами $N=12(n+m)+2$.

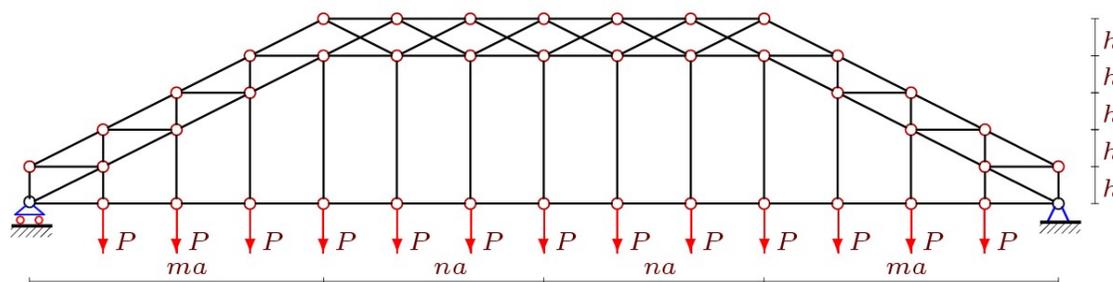


Рис. 1. Ферма, $n=3$, $m=4$

Для определения усилий в стержнях используем программу [11], записанную в системе символьной математики Maple. В программе задаются координаты шарниров и структура соединения стержней. Начало координат расположим в левой подвижной шарнирной опоре. Пронумеруем стержни (рис. 2).

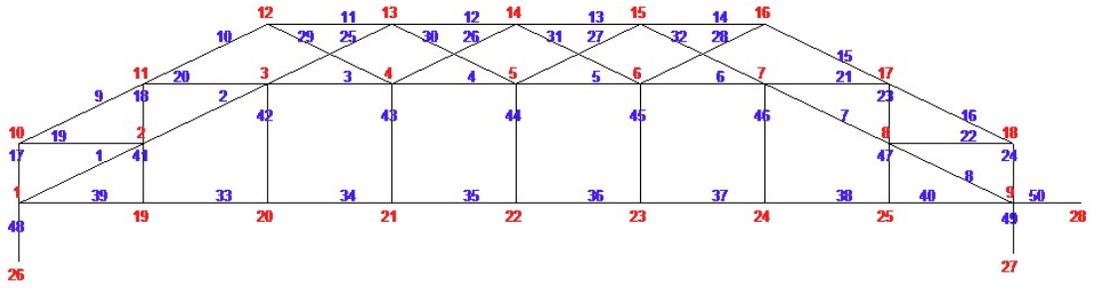


Рис. 2. Нумерация стержней фермы ($n=m=2$) в системе Maple

Координаты узлов фермы имеют вид:

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i+2n+2m+1} = (i-1)a, & y_i &= (i-1)h, & y_{i+2n+2m+1} &= y_i + h, \\ x_{i+2n+m+1} &= x_{i+4n+3m+2} = a(i+2n+m), & y_{i+2n+m+1} &= h(m-i), \\ y_{i+4n+3m+2} &= y_{i+2n+m+1} + h, & i &= 1, \dots, m, \\ x_{i+m} &= x_{i+2n+3m+1} = a(i+m-1), \\ y_{i+m} &= mh, & y_{i+2n+3m+1} &= y_{i+m} + h, & i &= 1, \dots, 2n+1. \end{aligned}$$

Координаты узлов, подвешенных на вантах:

$$x_{i+4(n+m)+2} = ai, \quad y_{i+4(n+m)+2} = 0, \quad i = 1, \dots, 2(n+m) - 1.$$

Решетки фермы зададим векторами $\bar{V}_i, i = 1, \dots, N$, содержащими номера концов стержней [2-9]. Матрица уравнений равновесия состоит из направляющих косинусов усилий в стержнях [3]. В нечетных строках матрицы располагаются проекции на горизонтальную ось x , в четных — на вертикальную ось y . Решение в символьной форме (усилия в стержнях и реакции опор) находится методом обратной матрицы.

Прогиб

По формуле Максвелла – Мора определяем прогиб середины пролета (вертикальное смещение узла $5(n+m)+2$)

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N-3} \frac{S_i s_i l_i}{EF}. \quad (1)$$

Введены обозначения: l_i — длины стержней, S_i — усилия в стержнях фермы от действия внешней нагрузки, s_i — усилия от единичной (тестовой) вертикальной силы, приложенной к узлу с номером

$5(n+m)+2$. Модуль упругости E и площади сечений стержней F приняты одинаковыми. При выполнении расчетов прогибов ферм с различным числом панелей в горизонтальной средней части ($n=1, \dots, 18$) и $m=4$, было замечено, что вид результата не меняется:

$$\Delta_n = P(A_n a^3 + B_n h^3 + C_n c^3) / (72h^2 EF). \quad (2)$$

Коэффициенты A_n, B_n, C_n зависят только от чисел панелей n и m . Для определения этих функций привлекаются операторы системы Maple. При получении рекуррентных уравнений, которым удовлетворяют члены этих последовательностей, оператором `rgf_findrecur` системы Maple потребовалось обработать последовательности длиной от 14 до 18. При меньшей длине последовательности оператор `rgf_findrecur` закономерность не выявляет. Для коэффициента при a^3 получается уравнение девятого порядка, имеющее вид

$$A_n = A_{n-1} + 4A_{n-2} - 4A_{n-3} - 6A_{n-4} + 6A_{n-5} + 4A_{n-6} - 4A_{n-7} - A_{n-8} + A_{n-9}.$$

Оператор `rsolve` дает решение этого уравнения

$$A_n = 30n^4 + 3(5/2 - 8(-1)^n)n^3 + 3(9(-1)^n - 1)n^2 / 4 + \\ + 3(581 + 171(-1)^n)n / 4 + 549 + 27(-1)^n.$$

Аналогично получаются и другие коэффициенты

$$B_n = 288 + 9(1 - (-1)^n)n / 2,$$

$$C_n = 18n^2 + 9(39 + 5(-1)^n)n / 2 + 270 - 54(-1)^n.$$

При $m=3$ коэффициенты имеют вид

$$A_n = 30n^4 + 2(5 - 14(-1)^n)n^3 + 2(4(-1)^n - 5)n^2 + \\ + (311 + 109(-1)^n)n + 306 + 18(-1)^n,$$

$$B_n = 216 + 6(1 - (-1)^n)n,$$

$$C_n = 18n^2 + 16(8 + (-1)^n)n + 177 + 3(-1)^n.$$

Таким образом, формула (2) вместе с найденными коэффициентами представляет собой искомую зависимость прогиба фермы от нагрузки, основных ее геометрических характеристик и числа панелей.

Анализ

Построим график зависимости (2) для случая фермы с заданной длиной пролета $L=2a(n+m)$, $m=4$ и фиксированной нагрузкой $P_{sum} = (2n + 2m - 1)P$. На рисунке 3 даны две кривые безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (LP_{sum})$ при $L=100\text{м}$ и двух значениях высоты фермы. Решение обнаруживает существенные скачки. Для двух соседних значений n прогиб заметно (до 25%) отличается. Эта особенность конструкции может быть использована в процессе проектирования для оптимизации ее жесткости.

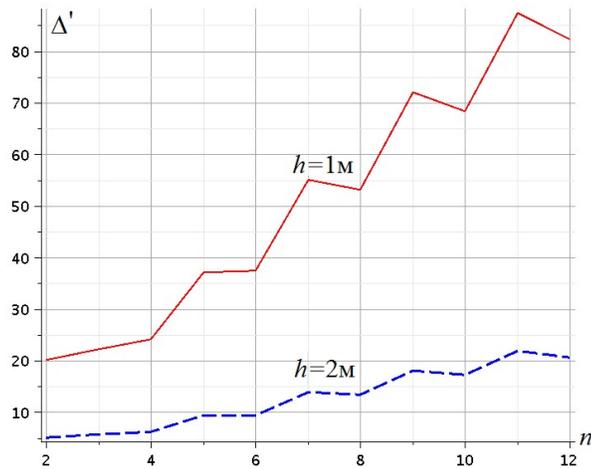


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей

Кроме того, можно заметить, что несмотря на волнообразное изменение прогиба при увеличении числа панелей, у этой кривой есть асимптота с наклоном $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = h / (8L)$.

Критические усилия в стержнях

Для расчета фермы на прочность и устойчивость необходимо иметь аналитические выражения для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях. В действительности, в процессе вывода формулы для прогиба уже были получены аналитические выражения для усилий во всех стержнях. Остается только выявить среди них экстремальные и методом индукции обобщить выражения на произвольное число панелей. Если

общие формулы для прогиба в силу математических трудностей удалось получить лишь для конкретных значений числа панелей $m=3, 4$ в боковых частях фермы, то решение задачи об экстремальных усилиях в отдельных стержнях несложно обобщить на произвольные m и n . Как показывает численный счет, наибольшие сжимающие усилия от действия распределенной нагрузки в данном случае будут в крайних нижних стержнях нижнего пояса (рис.2). Имеем следующее аналитическое обобщение

$$S_1 = -Pc(m + n(2m - 1) / m) / (2h).$$

Наибольшее усилие растяжения испытывают горизонтальные стержни, закрепленные на вантах:

$$S_{8(n+m)+1} = \dots = S_{10(n+m)} = Pa(m + n(2m - 1) / m) / (2h).$$

При этом последнее решение будет справедливо лишь для $h < \bar{h} = a(m^2 + 2nm - n) / (2m)$, т.е. когда $S_{8(n+m)+1} = \dots = S_{10(n+m)} > P$. Для ферм с большей высотой при $h > \bar{h}$ наиболее растянутыми будут ванты с одинаковыми усилиями, равными P .

Выводы

Вантовые конструкции, содержащие в качестве своих основных несущих частей растянутые элементы, имеют ряд преимуществ по сравнению с аналогичными жесткими конструкциями. Аналитический расчет усилий и прогибов в таких конструкциях с учетом произвольного числа панелей в литературе не известен. Приведенный расчет показал, что предлагаемая схема фермы допускает аналитические выражения для прогибов и усилий. Выражения для прогиба имеет полиномиальный вид и позволяет провести точный расчет широкого класса ферм лишь с помощью калькулятора, не прибегая к компьютерным программам. Графики полученных решений показали характерные для решетчатых ферм [4,5] изломы кривых.

Список литературы

1. Galishnikova V.V., Dunaiski P., Pahl P.J. Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Trusses and Frames SUN MeDIA, Stellenbosch (Republic of South Africa), 2009. P. 382. ISBN 978-1-920109-48-6.
2. Астахов С.В. Вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы под действием нагрузки в середине пролета//Строительство и архитектура. 2017. Том 5. №2(15). С. 50–54 DOI 10.12737/25110
3. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5 (57). С. 66–73.
4. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. № 4. С. 20–23. <http://ms.enjournal.net/article/12930/>
5. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. 2(271). С. 4–10.
6. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. N3. С.23-27.
7. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях симметричной балочной фермы// Строительство и реконструкция. 2017. № 1(69). С.19-23.
8. Кирсанов М. Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 2 (101). С. 165–171.
9. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type// Architecture and Engineering. 2016. No. 3. vol. 1. pp. 14-17.

10. Кирсанов М.Н., Заборская Н.В. Деформации периодической фермы с раскосной решеткой // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 3(71). С. 61–67.
11. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.

References

1. Galishnikova V.V., Dunaiski P., Pahl P.J. Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Trusses and Frames SUN MeDIA, Stellenbosch (Republic of South Africa), 2009. P. 382. ISBN 978-1-920109-48-6.
2. Astahov S.V. Vyvod formuly dlya progiba vneshne staticheski neopredelimoj ploskoj fermy pod dejstviem nagruzki v seredine proleta//Stroitel'stvo i arhitektura. 2017. Tom 5. №2(15). S. 50–54 DOI 10.12737/25110 (Astakhov S.V. The derivation of formula for deflection of statically indeterminate externally flat truss under load at midspan//Construction and Architecture 2017. Vol. 5. Issue 2 (15): pp. 50–54)
3. Tin'kov D. V. Sravnitel'nyj analiz analiticheskikh reshenij zadachi o progibe fermennyh konstrukcij // Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2015. № 5(57). S. 66–73. (Tinkoff , D. V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures // Magazine of civil Engineering. 2015. № 5(57). pp. 66–73).
4. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta progiba i usilij v reshetchatoj ferme // Mekhanizaciya stroitel'stva. — 2017. — № 4. — S. 20-23.(Kirsanov, M.N. Formulas for calculating deflection and effort in lattice truss. Mechanization of construction. 2017. №4 pp. 20-23).
5. Kirsanov M.N., Maslov A.N. Formuly dlya rascheta progiba balochnoj mnogoreshchatoj fermy//Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2017. № 2(271). S. 4-10. (Kirsanov, M. N., Maslov, A.N. The formula for calculation of the deflection of multiple lattice beam truss// Structural mechanics and calculation of structures. 2017. № 2(271). pp. 4-10.)

6. Kirsanov M.N. K vyboru reshetki balochnoj fermy // Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij. 2017. №3. S.23-27. (Kirsanov M.N. On the choice of the lattice girder // Structural mechanics of engineering constructions and buildings. 2017. N3. pp.23-27.)
7. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta progiba i usilij v sterzhnyah simmetrichnoj balochnoj fermy // Stroitel'stvo i rekonstrukciya. 2017. № 1(69). S.19-23. (Kirsanov M.N. Formulas for calculating of deflection and stresses in the bars of symmetrical truss // Building and reconstruction. 2017. № 1(69). pp.19-23.)
8. Kirsanov M. N. Analiticheskoe issledovanie zhestkosti prostranstvennoj staticheski opredelimoj fermy // Vestnik MGSU. 2017. T. 12. №. 2 (101). S. 165–171. (Kirsanov M. N. An analytical study on the stiffness of statically determinate spatial truss // Vestnik MGSU2017. Vol. 12. №. 2 (101). pp. 165–171.)
9. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. № 3. vol. 1. pp. 14-17.
10. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformacii periodicheskoj fermy s raskosnoj reshetkoj // Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2017. № 3(71). S. 61–67. (Kirsanov, M. N., Zaborskaya, N. V. Deformation of the periodic truss with diagonal lattice // Magazine of civil Engineering. 2017. № 3(71). pp. 61–67.)
11. Kirsanov M. N. Maple i Maplet. Resheniya zadach mekhaniki. SPb.: Izd-vo Lan', 2012. 512 s. (Kirsanov, M. N. Maple and Maplet. Solutions of Mechanics problems. SPb.: Publishing house LAN, 2012. 512 p.)