

УДК 624.04

*Национальный исследовательский университет "МЭИ"*

*Д-р физ.-мат. наук, проф. М. Н. Кирсанов  
Россия, г. Москва, тел.: +7(495)362-73-14;  
e-mail: c216@ya.ru*

*Национальный исследовательский университет "МЭИ"*

*Студентка Рахматулина А.Р.  
Россия, г. Москва, тел.: +7(985)683-93-23;  
e-mail: anya.rashma@yandex.ru*

*Национальный исследовательский университет "МЭИ"*

*Студентка Смирнова А.А.  
Россия, г. Москва, тел.: +7(495)362-73-14;  
e-mail: Anastasia7773@yahoo.com*

*National Research University "MPEI",  
D. Sc. math., Prof. M. N. Kirsanov  
Russia, Moscow, tel.: +7(495)362-73-14;  
e-mail: [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru)*

*National Research University "MPEI",  
Student Rakhmatulina A.R.  
Russia, Moscow, tel.: +7(985)683-93-23;  
e-mail: [anya.rashma@yandex.ru](mailto:anya.rashma@yandex.ru)*

*National Research University "MPEI",  
Student Smirnova A.A.  
Russia, Moscow, tel.: +7(495)362-73-14;  
e-mail: [Anastasia7773@yahoo.com](mailto:Anastasia7773@yahoo.com)*

М.Н. Кирсанов, А.Р. Рахматулина, А.А. Смирнова

## **АНАЛИЗ ПРОГИБА ВНЕШНЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ**

Ферма с параллельными поясами и треугольной шпренгельной решеткой имеет одну боковую дополнительную внешнюю опору. В системе символьной математики Maple выводится зависимость прогиба фермы и усилий в наиболее сжатых и растянутых ее элементах в зависимости от числа панелей. С помощью специальных операторов системы составляются и решаются рекуррентные уравнения для коэффициентов искомым формул.

### **M. N. Kirsanov, A. R. Rakhmatulina, A. A. Smirnova ANALYSIS OF THE DEFLECTION OF EXTERNALLY STATICALLY INDETERMINATE GIRDER**

Truss with parallel chords and triangular lattice has one additional external support on one side. In the system of symbol mathematics Maple the dependence of the deflection of the truss and forces in the most compressed and stretched its elements depending on the number of panels are obtained. With the help of special operators of the system are compiled and solved the recurrence equation for the coefficients of the desired formulas.

Несмотря на три опоры с четырьмя неизвестными реакциями ферма (рис. 1) статически определима. Для  $n$  панелей, считая по верхнему поясу, число стержней –  $n_s = 8n + 8$ , включая четыре опорные стержня (два на неподвижный шарнир, один боковой горизонтальный и один в правой опоре). Число внутренних шарниров фермы  $m = 4n + 4$ .

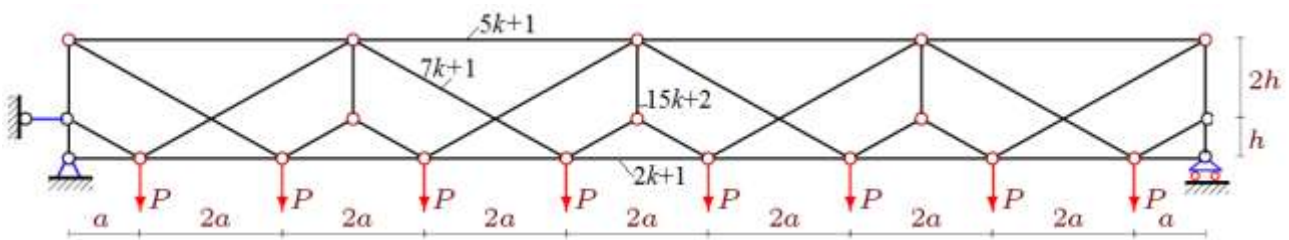


Рис. 1. Ферма при  $n=2k=4$

Пронумеруем стержни и узлы фермы (рис. 2). Выберем начало координат в левой неподвижной опоре.

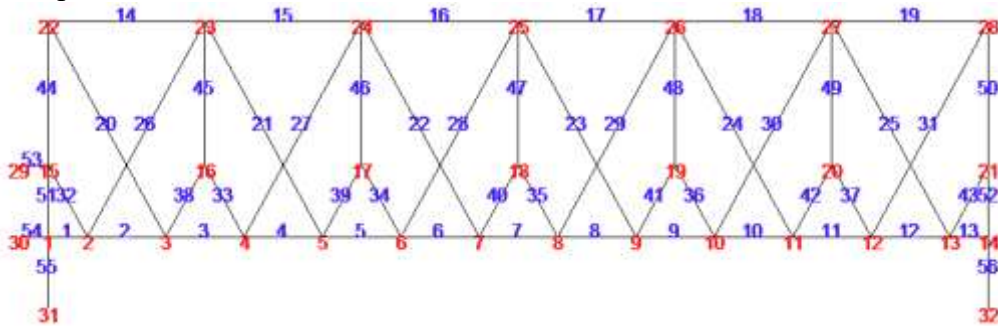


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней,  $n=2k=6$

Используем программу [1] составления уравнений равновесия узлов фермы и нахождения усилий в стержнях, записанную на языке Maple. Для счета необходимо задать координаты узлов, по которым определяются направляющие косинусы усилий системы уравнений равновесия:

$$x_1 = 0, y_1 = 0, x_{2n+2} = 4na, y_{2n+2} = 0,$$

$$x_{i+1} = 2ai - a, y_{i+1} = 0, i = 1, \dots, 2n,$$

$$x_{i+2n+2} = x_{i+3n+3} = 4a(i-1),$$

$$y_{i+2n+2} = h, y_{i+3n+3} = 3h, i = 1, \dots, n+1.$$

Координаты опорных точек:

$$x_{m-3} = -f, y_{m-3} = h,$$

$$x_{m-2} = -f, y_{m-2} = 0,$$

$$x_{m-1} = 0, y_{m-1} = -f,$$

$$x_m = x_{2n+2}, y_m = -f,$$

где  $f$  – произвольное число. Предполагается, что опорные стержни жесткие, поэтому в формулу Максвелла – Мора длины этих стержней не войдут.

Структура решетки по аналогии с заданием графа в дискретной математике представлена векторами  $\vec{V}_i, i = 1, \dots, n_s$ , содержащими в своих компонентах номера шарниров по концам соответствующих стержней. Здесь первая компонента – номер шарнира в одном конце (условном начале) соответствующего стержня, вторая – номер шарнира в другом его конце. Выбор начала и конца стержня-вектора не влияет на результат счета и не определяет знак усилия. Приведем фрагмент программы на языке системы Maple, задающий структуру фермы

```
> for i to 2*n+1 do N[i]:=[i,i+1];od:
>for i to n do
> N[i+2*n+1]:=[i+3*n+3,i+3*n+4];
```

```

> N[i+3*n+1]:=[2*i+1,i+3*n+3];
> N[i+4*n+1]:=[2*i,i+3*n+4];
> N[i+5*n+1]:=[2*i,i+2*n+2];
> N[i+6*n+1]:=[2*i+1,i+2*n+3];
> od:
> for i to n+1 do
> N[i+7*n+1]:=[i+2*n+2,i+3*n+3];
> od:
> N[8*n+3]:=[1,2*n+3]:
> N[8*n+4]:=[2*n+2,3*n+3]:

```

По данным координат и векторам структуры определяются длины стержней и проекции их векторных представлений для вычисления направляющих косинусов, составляющих матрицу уравнений равновесия:

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, \quad l_{1,i} = x_{V_{2,i}} - x_{V_{1,i}}, \quad l_{2,i} = y_{V_{2,i}} - y_{V_{1,i}}, \quad i = 1, \dots, n_s.$$

Первый индекс в номере  $V_{j,i}$  принимает значения 1 или 2 и соответствует номеру компоненты вектора  $\bar{V}_i$ , второй – номеру стержня. Матрица направляющих косинусов  $\mathbf{G}$  имеет следующие элементы:

$$G_{k,i} = -l_{j,i} / l_i, \quad k = 2V_{i,2} - 2 + j, \quad k \leq n_s, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n_s,$$

$$G_{k,i} = l_{j,i} / l_i, \quad k = 2V_{i,1} - 2 + j, \quad k \leq n_s, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n_s.$$

Усилия в стержнях определяются из решения системы уравнений, записанной в матричной форме

$$\mathbf{G}\bar{S} = \bar{B}. \quad (1)$$

Здесь  $\bar{S} = \{S_1, \dots, S_{n_s}\}$  — вектор усилий в стержнях,  $\bar{B} = \{P_{x,1}, P_{y,1}, \dots, P_{x,n_s}, P_{y,n_s}\}$  — вектор правых частей (внешних нагрузок, приложенных к узлам). Для расчета прогиба фермы используем формулу Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-4} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Обозначено:  $S_i^{(P)}$  — усилия в стержнях от заданной нагрузки,  $l_i$  — длины стержней,  $S_i^{(1)}$  — усилия от единичной силы, приложенной к середине верхнего пояса. Пусть число панелей четное  $n=2k$ . В этом случае средний узел имеет номер  $7k+4$ , рис. 2. Из анализа серии решений для ферм с различным числом панелей было замечено, что формула для прогиба имеет один и тот же вид

$$EF\Delta = \frac{P(Aa^3 + Hh^3 + Cc^3)}{3h^2}$$

Полученная последовательность 36, 504, 2484, 7776, 18900, 39096, 72324, 123264, 197316, 300600 коэффициентов при  $a^3$  удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$A_k = 5A_{k-1} - 10A_{k-2} + 10A_{k-3} - 5A_{k-4} + A_{k-5}.$$

Для получения этого уравнения был привлечен специальный оператор **rgf\_findrecur** пакета **genfunc** системы Maple. Для его работы требуется четное число членов последовательности. Другой оператор из ядра системы Maple находит решение

рекуррентного уравнения  $A_k = 6k^2(1 + 5k^2)$ . Аналогично (но немного проще) определяются два других коэффициента:  $H = 2k(9 + k + 5k^3)$ ,  $C = k^2(11 + 10k^2)$ .

Одновременно с определением прогиба в том же цикле по числу панелей в ферме можно вывести формулы для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях. Однозначно положения этих стержней здесь найти нельзя. В зависимости от соотношения размеров имеем два варианта для усилий в максимально сжатых стержнях (рис. 1)

$$S_{5k+1}^{(P)} = -2k^2 Pa / h, S_{15k+2}^{(P)} = -2k^2 P.$$

Отсюда, при  $a > h$  расчет на устойчивость следует вести по усилию в среднем стержне верхнего пояса, при  $a < h$  — по усилию в средней стойке фермы. Для растянутых стержней есть тоже два варианта

$$S_{2k+1}^{(P)} = 2k^2 Pa / h, S_{7k+1}^{(P)} = (k^2 + 1)Pc / h.$$

Сравнивая две последние величины, получаем, что если  $a/h > (k^2 + 1) / \sqrt{(3k^2 + 1)(k^2 - 1)}$ , то усилие в среднем стержне нижнего пояса будет больше. Для  $k > 1$  правая часть неравенства монотонно уменьшается с увеличением  $k$  от значения  $5/\sqrt{39} \approx 0,8$  до предельного значения  $\sqrt{3}/3 \approx 0,58$ . Отсюда, можно дать приближенную оценку ситуации, когда рассчитывать на предельное напряжение на растяжение нужно по среднему стержню с номером  $2k+1$  в нижнем поясе:  $a/h > 0,8$ .

На рисунке 3 отображены кривые безразмерного прогиба  $\Delta' = EF\Delta / (P_{sum}L)$ , вычисленного при постоянной длине пролета фермы  $L=4ak=40$  м и постоянной, не зависящей от числа панелей нагрузки  $P_{sum} = 4kP$ .

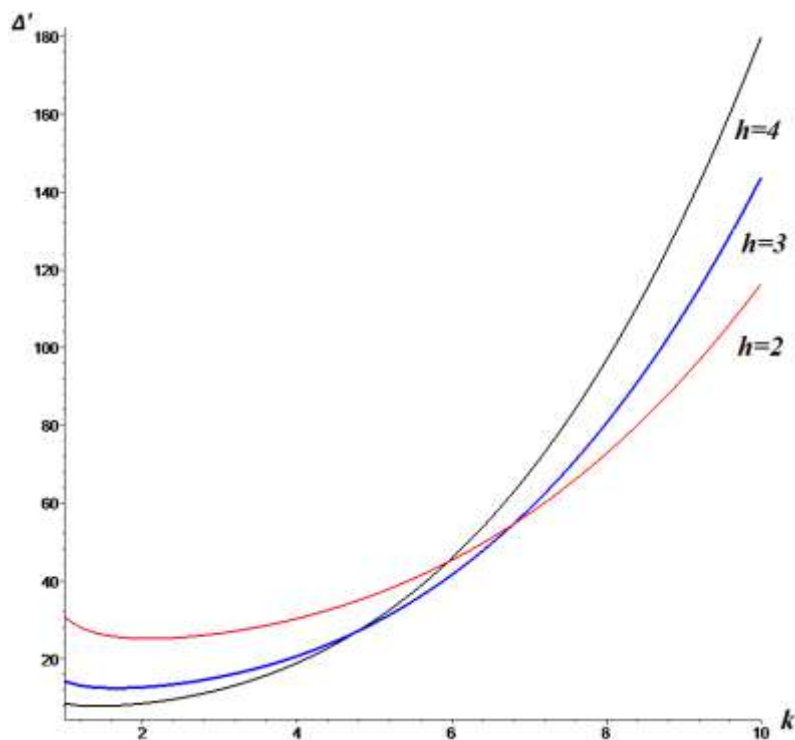


Рис.2. Зависимость прогиба

Две особенности полученного решения обнаруживают эти кривые. Во-первых, на кривых имеются неявно выраженные минимумы, наиболее явные при малых высотах. Во-вторых, пересечение кривых указывает на возможные варианты выбора размеров конструкции при оптимизации веса и жесткости.

Формулы для прогиба плоских ферм различной структуры в аналитической форме на основе метода индукции при поддержке системы Maple выведены также в [2-4].

#### Библиографический список

1. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы//Строительная механика и расчет сооружений. 2017. 2(271). С. 4-10.
3. Тиньков Д. В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. Т. 1. 2015. С. 52-56.
4. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.

#### References

1. Kirsanov M. N. Maple and Maplet. Solutions of mechanics problems. SPb.: Publishing house LAN, 2012. 512 p.
2. Kirsanov M. N., Maslov A.N. The formula for calculation of the deflection of multiple lattice beam truss// Structural mechanics and calculation of structures. 2017. 2(271). Pp. 4-10.
3. Tin'kov D. V. Analysis of the influence of fixation conditions on the deflection of the girder beam flat with downward braces// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. M: Infra-M. Vol. 1. 2015. Pp. 52-56.
4. Tin'kov D. V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures // magazine of civil Engineering. 2015. No. 5(57). Pp. 66-73.