

М.Н. КИРСАНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.  
НИУ МЭИ, г. Москва

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С РЕШЕТКОЙ ТИПА «BUTTERFLY»

Предлагаемая схема статически определимой плоской балочной фермы имеет горизонтальный верхний пояс и частично приподнятый нижний пояс. С одной стороны такая схема дает эксплуатационные преимущества, расширяя подферменное пространство, с другой — создает архитектурную выразительность сооружения. Получено точное выражение зависимости прогиба середины пролета фермы от числа панелей при равномерном нагружении фермы по верхнему поясу с учетом различной жесткости стержней. Расчеты усилий в стержнях выполнены методом вырезания узлов в пакете символьной математики Maple. Обобщение решения для произвольного числа панелей найдено методом индукции. Для последовательности коэффициентов параметров фермы в решении методами Maple получены и решены однородные рекуррентные уравнения с постоянными коэффициентами. Найдены некоторые асимптотики и особенности решения.

**Ключевые слова:** балочная ферма, прогиб, Maple, индукция, число панелей, асимптотика.

**Постановка задачи.** На рис. 1 представлена схема плоской статически определимой фермы. Ферма имеет две опоры и работает по балочному принципу. Нагрузка может быть приложена как к нижнему, так и к верхнему поясу. Проект этой фермы преследовал две задачи — придание балочной ферме архитектурную выразительность (решетка типа «летающих бабочек») и создание приподнятого нижнего пояса при наличии ровного горизонтального верхнего пояса. Нижний пояс с заметными дополнительными подъемами может служить, например, для организации автомобильного или железнодорожного движения, для прохода судов и пр. Новая схема требует теоретической оценки ее работоспособности. Одна из таких оценок — проверка жесткости по величине прогиба, замеренного в середине пролета. Важно также выявить зависимость жесткости от размеров фермы и числа панелей.

Вычислим усилия в стержнях и прогиб этой фермы в аналитической форме. При этом введем в число параметров задачи число панелей. Непосредственный расчет фермы с произвольным числом панелей в общем случае невозможен. Однако здесь применим метод индукции. Предлагаемая схема фермы ранее аналитически не исследовалась и применение ее в практике строительства не известно. Поэтому интерес к такой схеме чисто теоретический, как пример выявления скрытых особенностей конструкции. Проблема поиска схем статически определимых ферм («охота за схемами статически определимых ферм») отражена в [1]. Аналогичные решения для плоских ферм балочных и консольных, с различными решетками и очертаниями верхнего пояса в конечной форме получены в [2—6], обзор некоторых аналитических решений для плоских ферм дан в [7]. В большинстве работ для получения точных формул с произвольным числом панелей применяется метод индукции, показавший свою эффективность. Полученные формулы для прогиба в зависимости от числа панелей позволили найти некоторые оптимальные по жесткости конструктивные решения и указали на особенности конструкции (в том числе и чувствительность к четности числа панелей). Метод применим и для пространственных систем [8].

### Расчет

Стержни фермы предполагаем упругими с модулем упругости  $E$ . Площади сечений стержней верхнего пояса равны  $F_I$ , решетки —  $F_{II}$ . Поставим задачу получить аналитическое решение для прогиба фермы при произвольном числе панелей  $n$  в половине пролета. Ферма, содержа-

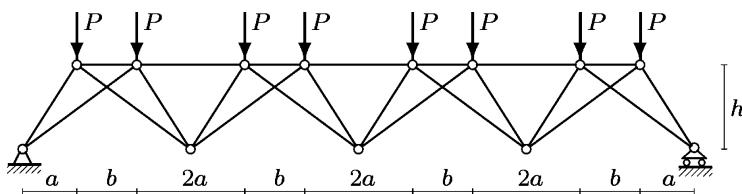


Рис. 1. Ферма,  $n = 2$

шая  $6n + 1$  шарнир и  $m = 12n - 1$  стержней, нагружена по верхнему поясу вертикальными силами  $P$ . Для определения усилий в стержнях фермы используем метод вырезания узлов. Если добавить к числу стержней фермы еще три стержня, моделирующие опоры, то система уравнений метода вырезания  $6n + 1$  узлов будет замкнутой. Алгоритм составления уравнений равновесия и заполнения матрицы в системе аналитических вычислений Maple разработан в [9]. Пронумеруем шарниры фермы. Узлы нижнего пояса нумеруются слева направо, затем нумеруются также узлы верхнего пояса. Выбирая начало координат в левой шарнирной опоре, получим:

$$\begin{aligned} x_i &= (i-1)d, \quad y_i = 0, \quad i = 1, \dots, 2n+1, \\ x_{2i+2n} &= id - a - b, \quad x_{2i+2n+1} = x_{2i+2n} + b, \quad i = 1, \dots, 2n, \\ y_{i+2n+1} &= h, \quad i = 1, \dots, 4n. \end{aligned}$$

Для составления конфигурации решетки фермы стержни фермы представим условными векторами  $\bar{N}_i, i = 1, \dots, m$ , координаты которых являются номерами шарниров по их концам. Направления этих векторов произвольны и никак не связаны со знаком усилий в них. Для стержней верхнего пояса имеем следующие вектора:

$$\bar{N}_i = [i + 2n + 1, i + 2n + 2], \quad i = 1, \dots, 4n - 1.$$

Для векторов решетки:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{i+4n-1} &= [i, 2i + 2n + 1], \quad \bar{N}_{i+6n-1} = [i, 2i + 2n], \\ \bar{N}_{i+8n-1} &= [i + 1, 2i + 2n], \quad \bar{N}_{i+10n-1} = [i + 1, 2i + 2n + 1], \quad i = 1, \dots, 2n. \end{aligned}$$

Для вычисления направляющих косинусов, входящих в уравнения узлов фермы, потребуются длины стержней и проекции их векторных представлений на оси координат

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, \quad l_{1,i} = x_{N_{2,i}} - x_{N_{1,i}}, \quad l_{2,i} = y_{N_{2,i}} - y_{N_{1,i}}, \quad i = 1, \dots, m_0,$$

где  $m_0 = m + 3$  – число стержней фермы, включая три стержня, которые моделируют шарнирные опоры (два стержня на неподвижную опору и один на подвижную). Первый индекс в номере  $N_{j,i}$  означает номер компоненты вектора  $\bar{N}_i$ , второй – номер стержня. Матрица направляющих косинусов имеет следующие элементы

$$\begin{aligned} G_{k,i} &= -l_{j,i} / l_i, \quad k = 2N_{2,i} - 2 + j, \quad k \leq m_0, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, m_0, \\ G_{k,i} &= l_{j,i} / l_i, \quad k = 2N_{1,i} - 2 + j, \quad k \leq m_0, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, m_0. \end{aligned}$$

Задача определения усилий в стержнях фермы сводится к решению системы линейных уравнений, которую запишем в матричной форме

$$G\bar{S} = \bar{B}.$$

Здесь  $\bar{S}$  – вектор неизвестных усилий;  $\bar{B}$  – вектор нагрузок. Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу  $i$ , записываются в нечетные элементы  $B_{2i-1}$  (в данной постановке их нет), вертикальные – в четные  $B_{2i}$ . Прогиб центрального узла нижнего пояса фермы (шарнир с номером  $n+1$ ) определяем по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{k=1}^m \frac{S_k s_k l_k}{EF_k},$$

где  $S_k, s_k$  – усилия в  $k$ -м стержне фермы от приложенной нагрузки и от единичной вертикальной силы, приложенной к центральному узлу верхнего пояса. Сечения стержней разные. Для стержней верхнего пояса  $F_k = F_1, k = 1, \dots, 4n - 1$ ; стержней решетки  $F_k = F_{11}, k = 4n - 1, \dots, m$ . Суммирование ведется по всем стержням фермы, опорные стержни приняты жесткими и в эту сумму не входят. Последовательное решение задачи с использованием системы символьной математики для ферм с одной, двумя, тремя и т. д. панелями в половине пролета ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) позволило методом индукции (по аналогии с [1–8]) получить следующие выражения:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2, \tag{1}$$

где

$$\Delta_1 EF_1 = P \frac{A_1 a^4 + A_2 b^4 + A_3 c^2 b^2 + A_4 ab^3 + A_5 a^3 b}{bh^2},$$

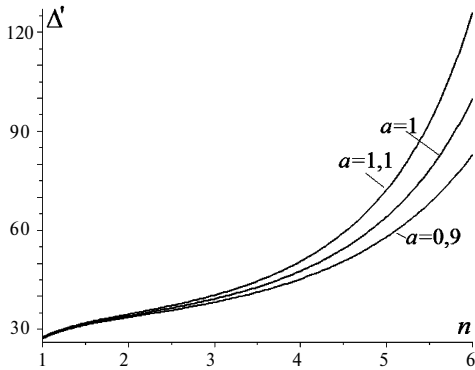


Рис. 2. Зависимость прогиба от числа пролетов,  $L = 40$  м,  $h = 2$  м,  $d = b + 2a = 5$  м

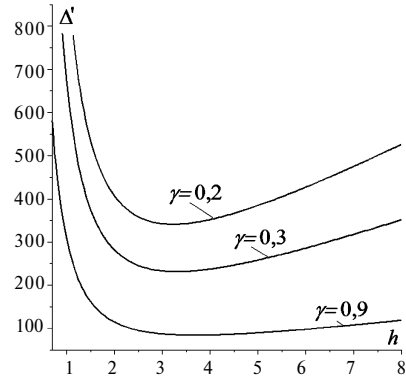


Рис. 3. Зависимость прогиба от высоты,  $L = 40$  м,  $a = b$ ,  $n = 5$

$$A_1 = 4n^2(1 + 5n^2)/3, A_2 = n^2(5n^2 - 2)/3, A_3 = 25n^4,$$

$$A_4 = n^2(65n^2 - 11)/6, A_5 = 2n^2(35n^2 + 4)/3,$$

$$\Delta_2 EF_{II} = P \frac{B_1 a^2 (c^3 + g^3) + B_2 abc^3 + B_3 abg^3 + B_4 c^3 b^2 + B_5 g^3 b^2}{b^2 h^2},$$

$$B_1 = A_1 / 2, B_2 = 5n^2(2n^2 + 1)/3, B_3 = n^2(10n^2 - 1)/3,$$

$$B_4 = n^2(5n^2 + 7)/6, B_5 = A_1 / 8.$$

Введено обозначение длин раскосов  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $g = \sqrt{(a+b)^2 + h^2}$ . Зависимости коэффициентов при степенях  $a, b, c$  и  $g$  от числа панелей оказались довольно сложными. Так для нахождения общего члена  $A_1$  последовательности 8, 112, 552, 1728, 4200, 8688, 16072, 27392, 43848, 66800, 97768, 138432 с помощью оператора **rgf\_findrecur** системы Maple было найдено рекуррентное уравнение пятого порядка

$$A_{1,k} = 5A_{1,k-1} - 103A_{1,k-2} + 10A_{1,k-3} - 5A_{1,k-4} + A_{1,k-5}.$$

Решение этого уравнения с помощью оператора **rsolve** дает общий член последовательности.

### Анализ

Рассмотрим случай, когда все стержни имеют одинаковую площадь сечения  $F_1 = F_{II} = F$ . Введем обозначение для суммарной нагрузки на ферму  $P_\Sigma = 4nP$  и для безразмерного прогиба  $\Delta' = \Delta EF / (P_\Sigma L)$ , где  $L = 2(2a + b)n$  — длина пролета фермы. График зависимости (1) от числа панелей (размеры на рис. 2 указаны в метрах) обнаруживает две точки перегиба и резкий рост прогиба с увеличением числа панелей. Зависимость же прогиба от высоты имеет точку экстремума (рис. 3,  $h$  — в метрах). График построен с учетом различных площадей сечения стержней верхнего пояса и решетки. Введен коэффициент  $F_{II} = \gamma F_1$ . Таким образом, если решетка состоит из более тонких стержней, то  $\gamma < 1$ .

Аналитическое решение допускает асимптотический анализ. Средствами Maple можно получить следующий предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^3 = 15h / (4L)$ . Предел получен в предположении  $a = b$ , фиксированной длины пролета  $L = 6an$  и нагрузке  $P_\Sigma = 4nP$ . Найденная предельная величина имеет теоретический характер и служит для сравнения различных стержневых конструкций [7].

### Заключение

Рассмотрена новая схема статически определимой фермы балочного типа. Полученное аналитическое решение выявило ряд особенностей конструкции, которые позволяют оптимизировать размеры фермы с целью экономии материала и увеличении ее жесткости. Обнаружены экстремальные точки на графике зависимости прогиба от высоты фермы и от числа панелей. Формулы включают в себя параметр, учитывающий различную жесткость стержней. Описан

ный алгоритм допускает дальнейшее обобщение на различную жесткость стержней в панели и произвольные нагрузки. Основное преимущество решения по сравнению с численными — это возможность получать простые оценки прогиба для ферм с большим числом панелей без потери точности решения, характерного для численных методов.

### Литература

1. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, No. 9. Pp. 607–617.
2. *Кирсанов М.Н.* Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал, 2012. № 5(31). С. 38–42.
3. *Кирсанов М.Н.* Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал, 2015. № 4 (56). С. 38–44.
4. *Ларичев С.А.* Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. — М.: Инфра-М, 2015. Т. 1. С. 4–8.
5. *Ахмедова Е.Р.* Аналитический расчет прогиба плоской фермы со шпренгельной решеткой // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. — М.: Инфра-М, 2015. Т. 1. С. 62–65.
6. *Тиньков Д.В.* Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. — М.: Инфра-М, 2015. Т. 1. С. 52–56.
7. *Тиньков Д.В.* Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал, 2015. №5(57). С. 66–73.
8. *Леонов П.Г., Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // В сборнике: Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014. Труды международной научно-методической конференции, 2014. С. 239–242.
9. *Кирсанов М.Н.* Maple и MapleT. Решения задач механики. — СПб.: Лань, 2012. — 512 с.

### Literatura

1. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, No. 9. Pp. 607–617.
2. *Kirsanov M.N.* Induktivnyy analiz vliyaniya pogreshnosti montazha na zhestkost i prochnost ploskoy fermy // Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal, 2012. № 5(31). S. 38–42.
3. *Kirsanov M.N.* Matematicheskaya model balochnoy fermy s elementami uprochneniya // Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal, 2015. № 4 (56). S. 38–44.
4. *Larichev S.A.* Induktivnyy analiz vliyaniya stroitel'nogo pod'ema na zhestkost prostranstvennoy balochnoy fermy // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. — М.: Инфра-М, 2015. Т. 1. С. 4–8.
5. *Ahmedova E.R.* Analiticheskiy raschet progiba ploskoy fermy so shprengel'noy reshetkoy // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. — М.: Инфра-М, 2015. Т. 1. С. 62–65.
6. *Tinkov D.V.* Analiz vliyaniya usloviy zakrepleniya na progib ploskoy balochnoy fermy s nishodyashchimi raskosami // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. — М.: Инфра-М, 2015. Т. 1. С. 52–56.
7. *Tinkov D.V.* Sravnitelnyy analiz analiticheskikh resheniy zadachi o progibe fermennykh konstruksiy // Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal, 2015. №5(57). S. 66–73.
8. *Leonov P.G., Kirsanov M.N.* Analiticheskiy raschet i analiz prostranstvennoy sterzhnevoy konstruksii v sisteme Maple // V sbornike: Informatizatsiya inzhenernogo obrazovaniya INFORINO-2014. Tруды mezhdunarodnoy nauchno-metodicheskoy konferentsii, 2014. S. 239–242.
9. *Kirsanov M.N.* Maple i MapleT. Resheniya zadach mehaniki. — SPb.: Lan, 2012. — 512 s.

Уважаемые читатели!

Напоминаем, что продолжается **ПОДПИСКА** на журнал:

**РОСПЕЧАТЬ 18317/36188.**

В редакции можно купить любой номер журнала  
или его электронную версию ([stroydex@list.ru](mailto:stroydex@list.ru)).