

М.Н. КИРСАНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.
НИУ МЭИ, г. Москва

ОЦЕНКА ПРОГИБА И УСТОЙЧИВОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ

Предложена математическая модель упругой статически определимой фермы с четырьмя опорами по углам основания. С помощью системы компьютерной математики Maple выведена формула для прогиба фермы от действия трех видов симметричной нагрузки в зависимости от размеров конструкции и числа панелей. Найдены асимптоты решения. Получены формулы для усилия в наиболее сжатом стержне для оценки устойчивости конструкции при различных видах нагружения.

Ключевые слова: пространственная ферма, устойчивость, Maple, индукция, асимптотика, прогиб.

Введение. Постановка задачи

Наряду с численными решениями, полученными в различных специализированных программных комплексах, учитывающих многие конструктивные особенности стержневых конструкций, реологию материала, варианты нагрузок и нелинейность [1–7], аналитические решения имеют большое значение для проектировщиков и инженеров, занимающихся эксплуатацией и обследованием ферм. Аналитических решений для пространственных ферм, в отличие от плоских, немного [8–10]. Обзор некоторых точных решений для прогиба плоских ферм содержится в [11–13].

Рассмотрим ферму, состоящую из двух одинаковых боковых плоских секций с треугольной решеткой и одной горизонтальной секцией (рис. 1). Пусть число секций нечетное $N = 2n + 1$. Число стержней фермы $m = 9N$. В этом случае в качестве контрольной точки, где измеряется прогиб, удобно брать средний шарнир верхнего пояса. Ферма имеет три опоры в углах основания: сферический шарнир, цилиндрический и вертикальный опорный стержень. Для имитации опоры в четвертом угле к соответствующему шарниру приложим вертикальную нагрузку, равную $NP/4$ при нагружении N узлов верхнего пояса равномерной нагрузкой.

Решение

Усилия в стержнях находим в аналитической форме по программе [14], написанной на языке символьной математики Maple. Этот пакет использовался также в решении других аналогичных задач механики [8–13, 15, 16]. Для ввода информации о ферме необходимо задать систему координат и ввести координаты узлов фермы, порядка соединения стержней и нагрузку. Система уравнений равновесия узлов фермы решается методом обратной матрицы с помощью операторов системы Maple и дает значения усилий в стержнях, включая и опорные стержни. Найденные усилия используются для вывода формулы зависимости прогиба от размеров фермы и числа панелей. Если решение задачи (пусть даже в символьной форме) о зависимости прогиба от нагрузки и размеров при конкретном числе панелей не представляет особой сложности, то зависимость от числа панелей получается методом индукции на основании решения (в символьной форме) ряда задач для ферм с различным числом панелей с последующей проверкой решения в численной моде той же программы. Это обусловлено тем, что численное решение выполняется в системе Maple без затрат времени (почти мгновенно), тогда как символьные преобразования требуют значительных ресурсов компьютера и уже при $N > 20$ получение результата символьных расчетов для данной конструкции затруднительно, а при $N > 30$ — практически невозможно. Для плоских ферм [11–13] эта граница заметно выше.

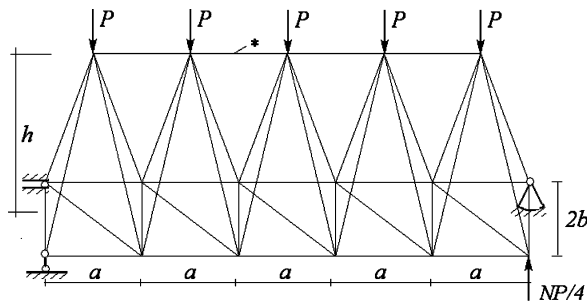


Рис. 1. Ферма при $N = 2n + 1 = 5$

Выделим в ферме пять групп стержней с одинаковыми сечениями: $2N$ продольных стержней нижнего пояса; $(N - 1) -$ верхнего; $N -$ поперечных стержней решетки нижнего пояса; $4N -$ раскосов боковых панелей и N раскосов решетки нижнего пояса. Площади сечений этих стержней выразим через некоторую условную площадь: $F_j = F / \gamma_1, j = 1, \dots, 2N, F_j = F / \gamma_2, j = 2N + 1, \dots, 3N - 1, F_j = F / \gamma_3, j = 3N, \dots, 4N, F_j = F / \gamma_4, j = 4N + 1, \dots, 8N, F_j = F / \gamma_5, j = 8N + 1, \dots, 9N$. В соответствии с этим предположением сумма в формуле Максвелла – Мора разбивается на пять слагаемых:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{2N} \frac{S_j s_j l_j}{EF_j} + \sum_{j=2N+1}^{3N-1} \frac{S_j s_j l_j}{EF_j} + \sum_{j=3N}^{4N} \frac{S_j s_j l_j}{EF_j} + \sum_{j=4N+1}^{8N} \frac{S_j s_j l_j}{EF_j} + \sum_{j=8N+1}^m \frac{S_j s_j l_j}{EF_j},$$

где $E -$ модуль упругости стержней; $l_j -$ длина j -го стержня; $S_j -$ усилие от действующей нагрузки; $s_j -$ усилие от единичной нагрузки, приложенной к центральному узлу верхнего пояса. Суммирование ведется по всем стержням фермы, кроме опорных, которые предполагаются жесткими.

Усилия в стержнях пятой группы (раскосах) при указанной нагрузке равны нулю.

$$\Delta = P((C_1 \gamma_1 + C_2 \gamma_2) a^3 + C_3 \gamma_3 b^3 + C_4 \gamma_4 c^3) / (EFh^2), \quad (1)$$

где $c = \sqrt{a^2 + 4b^2 + 4h^2}$, а коэффициенты имеют вид

$$C_1 = (1 + 10n(n^3 + 2n^2 + 2n + 1) / 3) / 32, \quad C_2 = n(5n^3 + 10n^2 + 7n + 2) / 24, \quad (2)$$

$$C_3 = (1 + 2n) / 4, \quad C_4 = (2n^2 + 2n + 1) / 32.$$

Для нахождения коэффициентов потребовалось найти общие члены последовательностей натуральных чисел, полученных расчетом десяти ферм при $n = 1, 2, \dots, 10$. С помощью оператора **rgf_findrecur** из пакета **genfunc** обнаружены рекуррентные уравнения (до пятого порядка), которым удовлетворяют члены последовательностей. Решения этих уравнений с помощью оператора **rsolve** с заданными начальными условиями дают коэффициенты (2).

Аналогично вычисляется прогиб от одной силы, приложенной к среднему узлу фермы в середине пролета. Формула для прогиба сохраняет вид (1), но коэффициенты (2) заменяются на другие:

$$C_1 = (1 + 2n)(4n^2 + 4n + 3) / 96, \quad C_2 = (n + 1)(2n + 1) / 12, \quad C_3 = 1 / 4, \quad C_4 = (2n + 1) / 32. \quad (3)$$

Если приложить вертикальную нагрузку P к каждому узлу фермы кроме угловых в основании ($2(N-1)$ в основании и N на верхний пояс), то коэффициенты формулы (1) примут вид:

$$C_1 = (1 + 10n^4 + 20n^3 + 16n^2 + 6n + 1) / 32, \quad C_2 = n(n + 1)(5n^2 + 5n + 2) / 8,$$

$$C_3 = (1 + 6n) / 4, \quad (4) \quad C_4 = (6n^2 + 6n + 1) / 32.$$

Анализ прогиба и устойчивости

Введем обозначение $\Delta' = EF\Delta / (PL)$ и коэффициент соотношения длины пролета L и высоты фермы: $k = L / h$. Графики зависимости (1) при одинаковых сечениях стержней ($\gamma_i = 1, i = 1, \dots, 5$) и равномерной нагрузке по верхнему поясу обнаруживают эффект смещения минимума в сторону уменьшения относительной высоты (рис. 2, $n = 5, L = 100$ м) при увеличении ширины основания b (нижний пояс). Заметим, что при моделировании пространственных ферм плоскими, этот эффект естественным образом ускользает от расчетчика. Этот же эффект наблюдается и в случае сосредоточенной нагрузки в середине верхнего пояса (коэффициенты (3) в формуле (1)) и при загрузке всех узлов фермы (коэффициенты (4)). Зависимость прогиба от числа панелей для различного типа нагружения при $b = 3h, L = 100$ м отображена кривыми на рис. 3. Нагружение по верхнему поясу (2) обозначено цифрой 1, одной сосредоточенной силой 2 (коэффициенты (3)), нагрузке по всем узлам — 3. Суммарная нагрузка во всех трех случаях приведена к силе P . Результат показывает, что наиболее эффективное распределение, соответствующее наименьшему прогибу, — это распределение по верхнему поясу. Заметим, что линейность задачи позволяет комбинировать три решения и получать результаты для различных нагрузок, в том числе, моделирующих собственный вес стержней фермы.

Можно найти линейную асимптотику всех трех найденных решений с теми же допущениями о постоянстве длины пролета. Линейность подсказывает и ход кривых на рис. 3. Пределы вычисляются средствами Maple (оператор **limit**). Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta'_{(1)} / n = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta'_{(3)} / n = (h^2 + b^2)^{3/2} / (4h^2 L), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta'_{(2)} / n = (h^2 + b^2)^{3/2} / (2h^2 L).$$

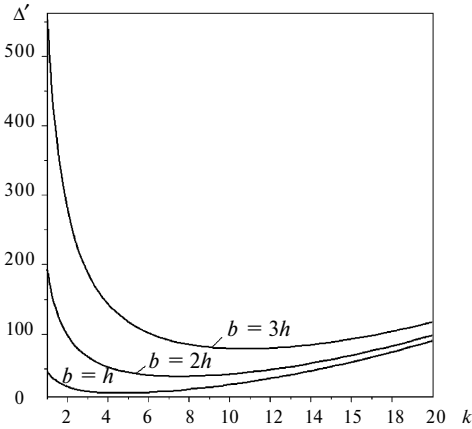


Рис. 2. Зависимость от высоты фермы

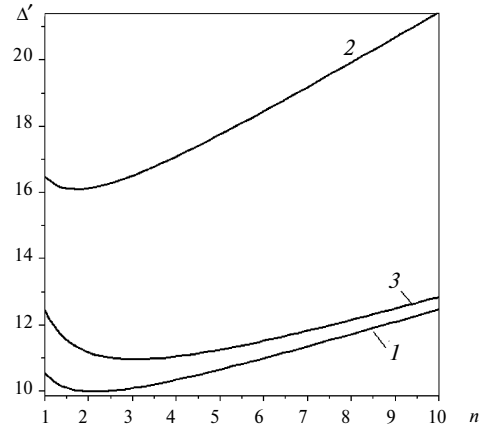


Рис. 3. Прогиб для различных нагрузок

Полученные пределы имеют теоретическое значение, например, для сравнения различных схем конструкций [11, 12] и позволяют определить или оценить в какой-то степени оптимальную по жесткости форму конструкции.

Усилие в наиболее сжатом из стержней верхнего пояса (в середине пролета, на рис. 1 помечен *) можно получить из уравнения моментов, составленного для усилий в среднем сечении фермы без использования системы Maple и индукции. Усилие в этом стержне от действия нагрузки, распределенной по всем узлам (постоянная нагрузка), равно $S_*^{(3)} = -Pan(n+1)/(2h)$, усилие от сосредоточенной нагрузки G в середине верхнего пояса: $S_*^{(2)} = -Gan/(2h)$. Если ρ и F — удельный вес материала и площадь сечения стержней, то вес фермы в случае одинаковых сечений стержней равен $P_{sum} = \rho F((3N-1)a + 2Nb + 4Nc)$. Таким образом, значение нагрузки P , распределенной по $6n+1$ узлу, в выражении для $S_*^{(3)}$ надо брать $P_{sum}/(6n+1)$. Приравнявая усилие в наиболее сжатом стержне от действия веса и временной нагрузки G критической нагрузке упругого шарнирно закрепленного по концам стержня, получаем уравнение для определения характеристик сечения

$$\left(\frac{P_{sum}(n+1)}{6n+1} + G \right) \frac{an}{2h} = \frac{\pi^2 EJ}{a^2},$$

где J — момент инерции сечения. Например, для стальной фермы пролетом $L = (2n+1)a = 63$ м при $n=10$, $a=3$ м, $\rho = 7,8 \cdot 10^4$ Н/м³, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $G = 100$ кН, $b = h = 2$ м потребуются стержни круглого сплошного сечения радиусом 5,5 см. Собственный вес фермы при этом достигнет 598,6 кН; прогиб, вычисленный по формуле (1) с коэффициентами (3) от нагрузки G равен 10,5 см; прогиб от собственного веса, вычисленный по той же формуле, но с коэффициентами (4), — 40,6 см. Суммарный прогиб составляет 1/123 пролета. При тех же значениях и $n = 8$ (пролет 51 м) прогиб составит 1/206 часть пролета. Таким образом, учитывая, что прогиб должен составлять в основном от 1/200 до 1/500 пролета (в зависимости от назначения конструкции), подбор сечения фермы должен определяться не из условия устойчивости, а из условия жесткости. Более тонкий анализ этого вопроса можно провести по выведенным формулам с учетом перераспределения площадей сечений стержней по поясам.

Заключение

Получены формулы для прогиба пространственной статически определимой конструкции в зависимости от числа панелей. Анализ формул выявил некоторые особенности, в частности, показано заметное влияние соотношения высоты и ширины фермы (h/b) на оптимальное по жесткости значение относительной высоты фермы $k = L/h$. Определены некоторые асимптотические свойства конструкции, дающие возможность подбирать ее геометрические и конструкционные параметры для увеличения ее жесткости. Полученные решения могут быть использованы для тестирования численных расчетов конструкций со значительным числом деформируемых элементов, где возможна погрешность результатов за счет накопления ошибок округления.

Литература

1. Галишикова В.В. Численный анализ устойчивости равновесия пространственных ферм в геометрически нелинейной постановке // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2010. № 1. С. 42—50.
2. Галишикова В.В. Вывод разрешающих уравнений задачи геометрически нелинейного деформирования пространственных ферм на основе унифицированного подхода. Вестник Волгогр. гос архит.-строит. ун-та. сер.: Стр-во и архит. 2009. Вып. 14(33). С. 39—49.
3. Игнатьев А.В., Игнатьев В.А., Онищенко Е.В. Решение геометрически нелинейных задач статики шарнирно-стержневых систем на основе метода конечных элементов в форме классического смешанного метода // Вестник МГСУ. 2016. №. 2. С. 20—33.
4. Кургузов В.Д. О численном решении геометрически нелинейных задач строительной механики // Известия высших учебных заведений. Строительство, 2009. № 3-4. С. 14—22.
5. Belytsko T., Liu W., Moran B. Nonlinear finite elements for continua and structures. J Wiley & Sons, 2000. 666 p.
6. Bonet J., Wood R. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. Cambridge University Press, 1997. 279 p.
7. De Borst R., Crisfield M., Remmers J., Verhoosel C. Non-linear finite element analysis of solids and structures. J. Wiley & Sons, 2012. — 594 p.
8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5—8.
9. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений, 2011. № 5. С. 11—15.
10. Ларичев С.А. Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. — М.: Инфра-М. Т. 1. С. 4—8.
11. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал, 2015. № 5(57). С. 66—73.
12. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2015. № 6. С. 21—28.
13. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник, 2016. № 1 (7). С. 247—254.
14. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. — 512 с.
15. Голоскоков Д.П. Расчет плоских перекрытий в системах символьных вычислений // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова, 2015. № 4 (32). С. 119—125.
16. Матросов А.В. Расчет балочных перекрытий численно-аналитическим методом // Вестник Государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова, 2012. № 1. С. 8—15.

Literatura

1. Galishnikova V.V. Chislennyi analiz ustoychivosti ravnovesiya prostranstvennykh ferm v geometricheski nelineynoy postanovke // Stroitel'naya mehanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy, 2010. # 1. S. 42—50.
2. Galishnikova V.V. Vyivod razreshayuschiy uravneniy zadachi geometricheski nelineynogo deformirovaniya prostranstvennykh ferm na osnove unifikirovannogo podhoda. Vestnik Volgogr. gos arhit.-stroit. un-ta. ser.: Str-vo i arhit. 2009. Vyip. 14(33). S. 39—49.
3. Ignatev A.V., Ignatev V.A., Onischenko E.V. Reshenie geometricheski nelineynykh zadach statiki sharnirno-stержnevyykh sistem na osnove metoda konechnykh elementov v forme klassicheskogo smeshannogo metoda // Vestnik MGSU. 2016. #. 2. S. 20—33.
4. Kurguzov V.D. O chislennom reshenii geometricheski nelineynykh zadach stroitel'noy mehaniki // Izvestiya vyisshikh uchebnykh zavedeniy. Stroitel'stvo, 2009. # 3-4. S. 14—22.
5. Belytsko T., Liu W., Moran B. Nonlinear finite elements for continua and structures. J Wiley & Sons, 2000. 666 p.
6. Bonet J., Wood R. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. Cambridge University Press, 1997. 279 p.
7. De Borst R., Crisfield M., Remmers J., Verhoosel C. Non-linear finite element analysis of solids and structures. J. Wiley & Sons, 2012. — 594 p.
8. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet i optimizatsiya prostranstvennoy balochnoy fermi // Vestnik MEI. 2012. # 5. S. 5—8.
9. Kirsanov M.N. Osobennosti analiticheskogo rascheta prostranstvennykh stержnevyykh sistem // Stroitel'naya mehanika i raschet sooruzheniy, 2011. # 5. S. 11—15.
10. Larichev S.A. Induktivnyy analiz vliyaniya stroitel'nogo pod'ema na zhestkost prostranstvennoy balochnoy fermi // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. — М.: Инфра-М. Т. 1. С. 4—8.
11. Tinkov D.V. Sravnitel'nyy analiz analiticheskikh resheniy zadachi o progibe fermennykh konstruksiy // Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal, 2015. # 5(57). С. 66—73.
12. Tinkov D.V. Analiz tochnykh resheniy progiba regul'yarnykh sharnirno-stержnevyykh konstruksiy // Stroitel'naya mehanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy, 2015. # 6. S. 21—28.
13. Kiyko L.K. Analiticheskaya otsenka progiba arochnoy fermi pod deystviem vetrovoy nagruzki // Nauchnyy vestnik, 2016. # 1 (7). S. 247—254.
14. Kirsanov M.N. Maple i Maplet. Resheniya zadach mehaniki. SPb.: Izd-vo Lan, 2012. — 512 s.
15. Goloskokov D.P. Raschet ploskiykh perekrytiy v sistemah simvol'nykh vychisleniy // Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova, 2015. # 4 (32). S. 119—125.
16. Matrosov A.V. Raschet balochnykh perekrytiy chisl'no-analiticheskim metodom // Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova, 2012. # 1. S. 8—15.