

УДК 624.04

Национальный исследовательский
университет "МЭИ"

Д-р физ.-мат. наук, проф. М. Н. Кирсанов
Россия, г. Москва, тел.: +7(495)362-73-14;
e-mail: c216@ya.ru

National Research University "MPEI",
D. Sc. math., Prof. M. N. Kirsanov
Russia, Moscow, tel.: +7(495)362-73-14;
e-mail: c216@ya.ru

М.Н. Кирсанов

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОГИБА РЕШЕТЧАТОЙ ФЕРМЫ, ИМЕЮЩЕЙ СЛУЧАИ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ИЗМЕНЯЕМОСТИ

Плоская ферма с четырьмя опорами при определенном числе панелей допускает мгновенную изменяемость. Найдена закономерность критических чисел панелей. Рассмотрено действие равномерно распределенной по узлам нижнего пояса нагрузки. Методом индукции выведена формула для прогиба фермы в зависимости от размеров и числа панелей. Использована система символьной математики Maple.

M. N. Kirsanov

THE DERIVATION OF FORMULA FOR DEFLECTION OF TRUSSES, WITH CASES OF KINEMATIC VARIABILITY

Flat truss with four supports allows instant variability at a certain number of panels. This regularity of the critical numbers of panels is obtained. Considered the effect of uniformly distributed load on the nodes of the lower belt. By induction method the formula for the deflection of the truss depending on the size and number of panels is found. The system of symbol mathematics Maple is used.

Решетчатая ферма с четырьмя опорами (рис. 1) внешне статически неопределима. Для определения усилий в стержнях и реакций опор необходимо составлять систему уравнений равновесия сразу для всех узлов. В ферме с n панелями в половине пролета, считая по нижнему поясу, число стержней – $n_s = 8n + 14$, включая пять опорных стержней, число шарниров $m = 4n + 7$.

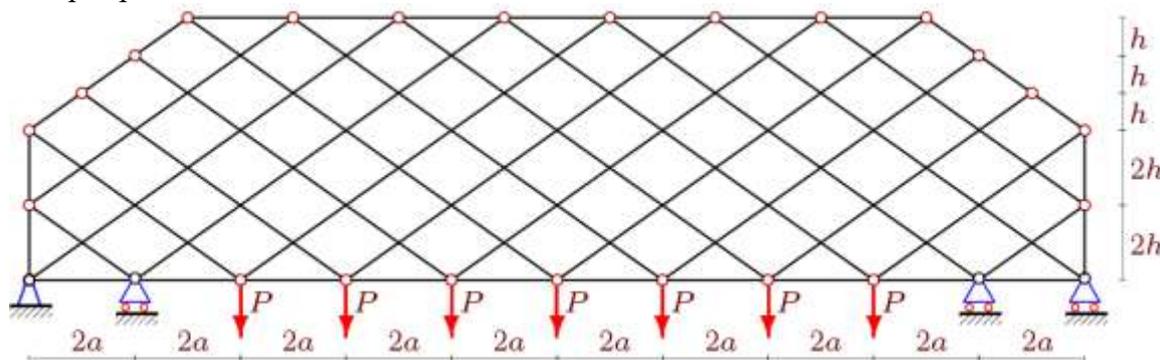


Рис. 1. Ферма при $n=5$

Для определения прогиба по формуле Максвелла - Мора необходимо знать усилия в стержнях. Решение в символьной форме получим по программе [1]. Для этого сначала надо пронумеровать стержни и узлы (рис. 2). Начало координат располагается в левой неподвижной опоре.

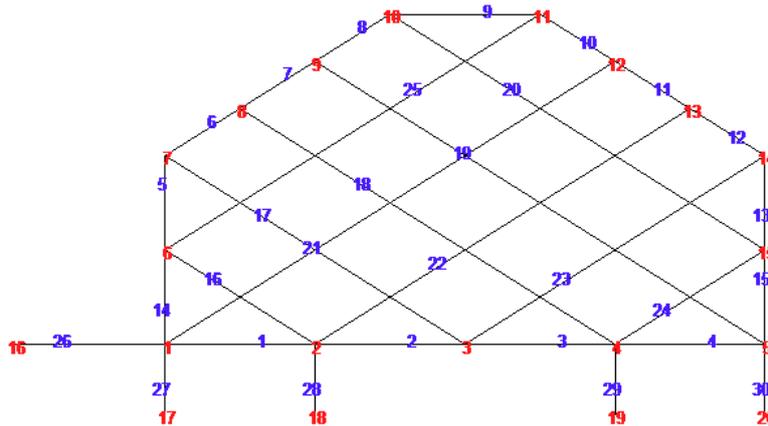


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней, $n=2$

Приведем фрагмент ввода координат в программу:

```
> for i to 2*n+1 do x[i]:=2*a*(i-1); y[i]:=0; od:
> for i to 2 do
> x[i+2*n+1]:=0; y[i+2*n+1]:=2*i*h;
> x[i+4*n+5]:=x[2*n+1]; y[i+4*n+5]:=6*h-2*i*h;
> x[i+2*n+3]:=a*i; y[i+2*n+3]:=4*h+h*i;
> x[i+4*n+3]:=a*(i-3+4*n); y[i+4*n+3]:=7*h-h*i;
> od:
> for i to 2*n-2 do
> x[i+2*n+5]:=2*a*i+a; y[i+2*n+5]:=7*h;
> od:
```

По координатам узлов определяются направляющие косинусы системы уравнений равновесия, записанной в матричной форме. Решение получается с помощью метода обратной матрицы, который не только легко реализуется в системе Maple, но и заметно быстрее специализированных операторов пакета **LinearAlgebra** этой же системы. Для расчета прогиба фермы используем формулу Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-5} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Обозначено: $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях от заданной нагрузки, l_i — длины стержней, $S_i^{(1)}$ — усилия от единичной силы, приложенной к середине нижнего пояса (узел с номером $7n+4$, рис. 2). Первые же расчеты сразу указали на особенность конструкции. Оказалось, что при $n=3$, $n=4$ определитель матрицы системы уравнений равновесия обращается в ноль. Очевидно, это соответствует кинематической изменяемости. Последующие расчеты в аналитической форме выявили закономерность последовательности недопустимых чисел панелей

$$n = 4k + 1 - \cos(\pi k) - 4 \cos(\pi k / 2) - 2 \sin(\pi k / 2), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Подтверждением кинематической изменяемости является и схема возможных скоростей, найденная для случая $n=3$ (рис. 3). Большинство шарниров и стержней в этом варианте распределения скоростей неподвижны. Стержни 4-10 и 4-17 совершают мгновенный поворот вокруг некоторого мгновенного центра скоростей с угловой скоростью $\omega = v / (10a) = u / (5c)$. Стержни 9-10, 17-18 и 3-4, 4-5 вращаются вокруг неподвижных шарниров 9, 18 и 3,4 соответственно.

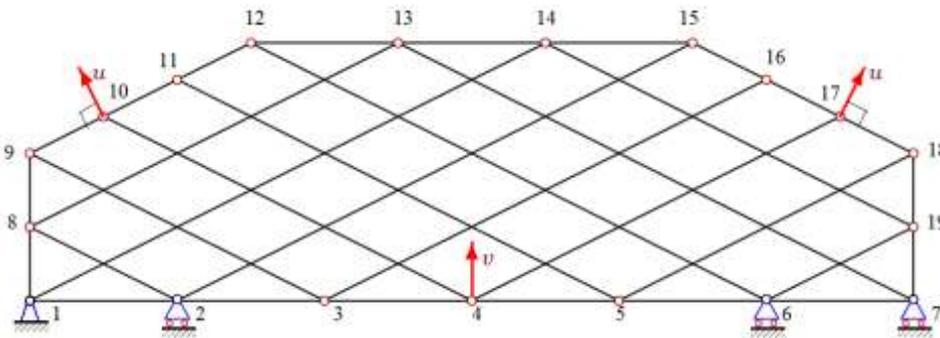


Рис. 3. Схема возможных скоростей, $n=3$

Исключая из последовательности натуральных чисел недопустимые величины, методами системы Maple получим правило образования чисел панелей, при которых ферма не вырождается:

$$n = (14k + 7 + 3\cos(\pi k) - 2\cos(\pi k / 2) - 2\sin(\pi k / 2)) / 8, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Анализ серии решений для ферм с числом панелей от 1 до 34 показал, что формула для прогиба имеет один и тот же вид

$$EF\Delta = \frac{P(A_k a^3 + H_k h^3 + C_k c^3)}{h^2}. \quad (2)$$

Последовательность коэффициентов при a^3 удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$A_k = A_{k-1} + 4A_{k-4} - 4A_{k-5} - 6A_{k-8} + 6A_{k-9} + 4A_{k-12} - 4A_{k-13} - A_{k-16} + A_{k-17}.$$

Уравнение получено оператором `rgf_findrecur` пакета `genfunc` системы Maple. Заметим, что по сравнению с аналогичными решениями это уравнение длиннее, требуется большое время для его вывода. Оператор `rsolve` находит решение рекуррентного уравнения

$$\begin{aligned} A_k = & (490k^4 + (980 - 728\sin\varphi + 516\cos 2\varphi - 728\cos\varphi)k^3 + \\ & + (774\cos 2\varphi - 912\sin\varphi - 286 - 1272\cos\varphi)k^2 + \\ & + (1256\sin\varphi - 776 + 1664\cos\varphi - 888\cos 2\varphi)k + \\ & + 2541 - 2352\cos\varphi - 48\sin\varphi - 189\cos 2\varphi) / 768, \end{aligned}$$

где $\varphi = \pi k / 2$. Аналогично определяются другие коэффициенты решения:

$$\begin{aligned} C_k = & (14k^2 + (28\sin\varphi - 42\cos 2\varphi + 28\cos\varphi + 14)k - 28\cos\varphi + 56\sin\varphi + 49 - 21\cos 2\varphi) / 32, \\ H_k = & 2(2 - 2\cos\varphi - \sin\varphi)k - \cos 2\varphi + 1. \end{aligned}$$

На рисунке 4 даны кривые решения (2) для безразмерного прогиба $\Delta' = EF\Delta / (P_{sum}L)$, вычисленного при постоянной длине пролета фермы $L=4an=100$ м и постоянной, не зависящей от числа панелей нагрузке $P_{sum} = (4n-1)P$.

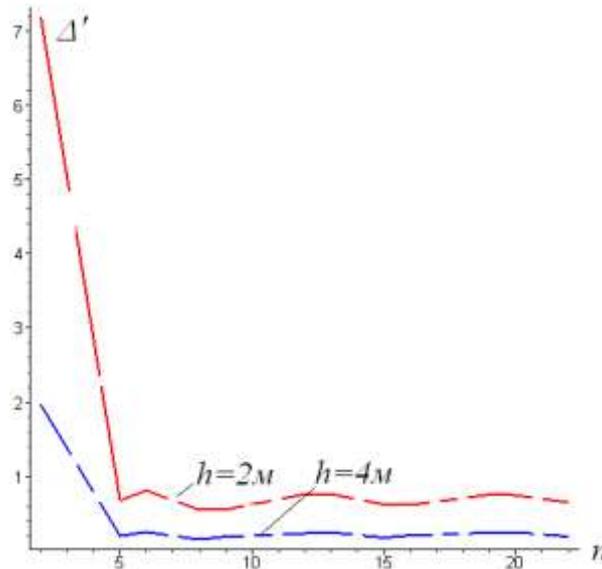


Рис.4. Зависимость прогиба от числа панелей

Точки недопустимых значений n (1) на графике отмечены пробелами. С увеличением числа панелей решение для прогиба имеет все меньшие скачки и, начиная с некоторого значения, почти не меняется.

На основе метода индукции при поддержке системы Maple формулы для прогиба плоских ферм различной структуры в аналитической форме выведены также в [2-5].

Библиографический список

1. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы//Строительная механика и расчет сооружений. 2017. 2(271). С. 4-10.
3. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. Architecture and Engineering. 2016. No. 3. Vol. 1. Pp. 14-17.
4. Тиньков Д. В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 52-56.
5. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.

References

1. Kirsanov M. N. Maple and Maplet. Solutions of mechanics problems. SPb.: Publishing house LAN, 2012. 512 p.
2. Kirsanov M. N., Maslov A.N. The formula for calculation of the deflection of multiple lattice beam truss// Structural mechanics and calculation of structures. 2017. 2(271). Pp. 4-10.
3. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. Architecture and Engineering. 2016. No. 3. Vol. 1. Pp. 14-17.

4. Tin'kov D. V. Analysis of the influence of fixation conditions on the deflection of the girder beam flat with downward braces// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. M: Infra-M. 2015. Vol. 1. Pp. 52-56.
5. Tin'kov D. V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures // magazine of civil Engineering. 2015. No. 5(57). Pp. 66-73.