

## ИНДУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ДЕФОРМАЦИИ АРОЧНОЙ ФЕРМЫ

*М.Н. Кирсанов*

Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва, РОССИЯ

**Аннотация:** Получено и проанализировано аналитическое решение задачи о прогибе плоской арокной статически определимой фермы под действием равномерно распределенной и сосредоточенной нагрузки. Для получения зависимости прогиба от числа панелей использован метод индукции по двум параметрам – по числу панелей в ригеле и числу панелях в опорных боковых фермах. Все преобразования и анализ выполнены в системе компьютерной математики Maple. Найдены выражения для усилий в отдельных стержнях. Получено асимптотическое приближение решений.

**Ключевые слова:** ферма, прогиб, индукция, интеграл Мора, Maple

## INDUCTIVE ANALYSIS OF THE DEFORMATION OF THE ARCHED TRUSS

*Mikhail N. Kirsanov*

National research University “MPEI”, Moscow, RUSSIA

**Abstract:** An analytical solution to the problem of the deflection of a flat arched statically determinate truss under the action of a uniformly distributed and concentrated load is obtained and analyzed. To obtain the dependence of the deflection on the number of panels, an induction method was used in two parameters — the number of panels in the crossbar and the number of panels in the supporting side trusses. All transformations and analysis are performed in the system of computer mathematics Maple. Expressions for the forces in individual rods are found. The asymptotic approximation of solutions is obtained.

**Keywords:** truss, deflection, induction, Mohr' integral, Maple

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Развитие аналитических методов на основе систем компьютерной математики дало возможность получать точные формульные решения задач механики, в том числе и механики стержневых систем. Простые формульные решения могут быть использованы как при проектировании сооружений, так и для оценки решений, полученных в стандартных программных комплексах, основанных на численных преобразованиях. Особенно эффективны такие оценки в случае анализа систем большой размерности, где накопление ошибок округления является существенной проблемой. Большинство известных аналитических решений для регулярных конструк-

ций с произвольным числом ячеек периодичности построены методом индукции по одному натуральному параметру, характеризующему сложность конструкции - числу ячеек периодичности. Многократно сложнее и важнее получить решение для конструкций с двумя и более параметрами индукции. Это существенно расширяет область применимости полученных формул, увеличивает разнообразие видов рассчитываемых конструкций. Кроме того, аналитическое представление решения дает возможность проанализировать поведение конструкции, выделив некоторые ее особенности. Рассмотрим распорную ферму арочного типа (рис. 1), содержащую два независимых параметра  $m$  и  $n$ , характеризующих ее форму.

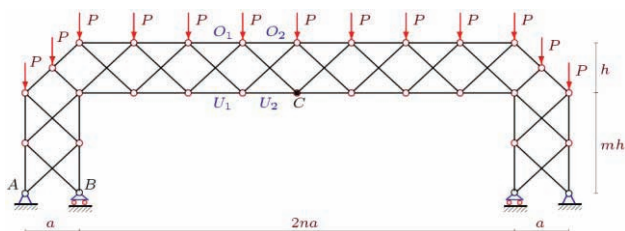


Рисунок 1. Ферма при  $n=4, m=2$ .  
Загрузка верхнего пояса.

В ферме с  $n$  панелями в половине пролета ригеля и  $m$  вертикальными панелями в боковых опорных частях содержится  $M=8(n+m)+12$  стержней, включая шесть стержней, моделирующих опоры. Ферма статически определима — число узлов в два раза больше числа стержней. Однако, независимо от усилий определить шесть реакций опор в опорных стержнях нельзя. Ферма внешне статически неопределима.

## 2. РАСЧЕТ УСИЛИЙ

Пользуясь программой [1], ранее успешно использованной для вывода аналитических зависимостей в плоских [2-7] и пространственных [8,9] фермах методом индукции, пронумеруем узлы и стержни и внесем в программу координаты узлов (рис. 2).

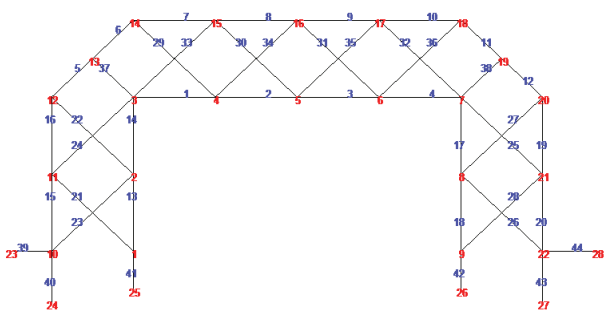


Рисунок 2. Номера стержней и узлов,  
 $n=m=2$ .

Матрица  $G$  уравнений равновесия узлов состоит из направляющих косинусов стержней, которые вычисляются через длины стержней  $l_i, i=1, \dots, M$  и их условные проекции  $l_{j,i}, j=1, 2$  на оси координат. Матрица направ-

ляющих косинусов имеет следующие элементы:

$$G_{t,i} = -l_{j,i} / l_i, \quad t = 2V_{i,2} + j - 2, \quad t \leq M, \quad j = 1, 2,$$

$$G_{t,i} = l_{j,i} / l_i, \quad t = 2V_{i,1} + j - 2, \quad t \leq M, \quad j = 1, 2,$$

$$i = 1, \dots, M.$$

Система уравнений равновесия узлов имеет вид

$$G\bar{S} = \bar{B},$$

где  $\bar{S} = \{S_1, \dots, S_M\}$  — вектор усилий,  $\bar{B}$  — вектор внешних нагрузок.

Для случая нагружения верхнего пояса (рис. 1) имеем:

$$B_{2i} = 1, \quad i = 2n + 3m + 2, \dots, 4n + 3m + 6.$$

В четные элементы вектора нагрузок записываются вертикальные силы, в нечетные — горизонтальные. Первые же расчеты ферм с различными  $n$  и  $m$  показали, что для нечетных  $m$  определитель матрицы  $G$  обращается в нуль, что свидетельствует о кинематической изменяемости конструкции [10]. Действительно, при  $m=1$  можно выявить схему возможных скоростей узлов (рис. 3).

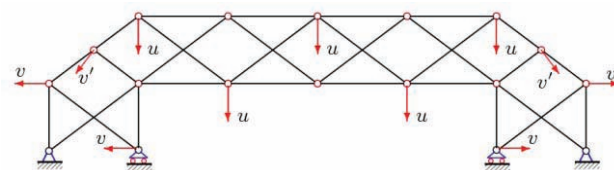


Рисунок 3. Схема возможных скоростей узлов изменяемой фермы ( $n=2, m=1$ ).

Соотношение возможных скоростей определяется из кинематики механизма:

$$v / h = u / a = 2v' / \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Аналогичные схемы скоростей, доказывающие изменяемость конструкции, существуют и для других нечетных значений  $m$ .

### 3. ПРОГИБ

Для определения прогиба фермы используем интеграл Мора в виде,

$$\Delta = \sum_{i=1}^{M-6} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF),$$

где суммирование ведется по стержням фермы и обозначено:  $S_i^{(1)}$  — усилия от единичной силы, приложенной к середине нижнего пояса ригеля,  $S_i^{(P)}$  — усилия в стержнях от заданной нагрузки,  $l_i$  — длины стержней. Жесткости стержней  $EF$  приняты одинаковыми для всех стержней. Расчет ферм с различными  $n$  и  $m=2k$  выявил, что формула для прогиба имеет один и тот же вид

$$\Delta = P \frac{A_{n,k} a^3 + C_{n,k} c^3 + H_{n,k} h^3}{h^2 EF}, \quad (1)$$

отличаясь только коэффициентами при степенях (кубах) размеров  $a$ ,  $h$  и

$$c = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Индукция проводилась в два этапа. Сначала по числу  $n$  при фиксированном  $k$  был получен ряд формул, затем эти коэффициенты этих формул обобщались по числу  $k$ . При этом выяснилось, что коэффициент при  $a^3$  не зависит от  $k$ :

$$A_{n,k} = (10n^4 + 2(5 - 2(-1)^n)n^3 + 2(1 - 3(-1)^n)n^2 + 5(1 - (-1)^n)n - 3 - 3(-1)^n) / 24.$$

Этот коэффициент получен из решения рекуррентного уравнения девятого порядка

$$A_{n,k} = A_{n-1,k} + 4A_{n-2,k} - 4A_{n-3,k} - 6A_{n-4,k} + 6A_{n-5,k} + 4A_{n-6,k} - 4A_{n-7,k} - A_{n-8,k} + A_{n-9,k}.$$

Для построения рекуррентного уравнения по последовательности коэффициентов применялся оператор `rgf_findrecur`, а для его решения — оператор `rsolve` системы Maple. Несколько сложнее были получены коэффициенты:

$$C_{n,k} = (n^2 + ((2k + 1)n + 4k + 1)(1 - (-1)^n)) / 4, \\ H_{n,k} = k((7 - (-1)^n)n + 17 - 11(-1)^n) / 6 + k^2(3 - (2n + 7)(-1)^n) / 2 + 4k^3(1 - (-1)^n)(n + 2) / 3.$$

Учитывая, что символьные преобразования в системе Maple выполняются медленно, при выводе этих формул необходимо было правильно выбрать порядок двойной индукции. Сначала по предварительным расчетам с малыми значениями  $m$  и  $n$  выяснялся приблизительный порядок степеней полиномов, далее выполнялась индукция по параметру с большим порядком (для  $H_{n,k}$  это параметр  $n$ ), затем по параметру с меньшим порядком. Для случая нагружения фермы по нижнему поясу (рис. 4) решение меняется не сильно.

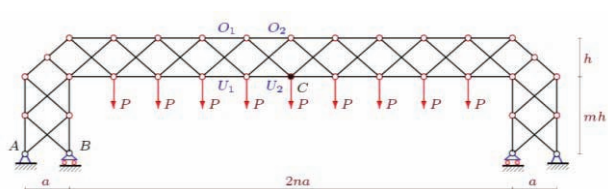


Рисунок 4. Ферма при  $n=5$ ,  $m=2$ .  
Загружен нижний пояс ригеля.

Коэффициент  $A_{n,k}$  остается прежним, а другие коэффициенты имеют вид:

$$C_{n,k} = (2n^2 + (1 - (-1)^n)(2n + 1) + 4k(1 - (-1)^n)n) / 8, \\ H_{n,k} = (4k^3(1 - (-1)^n)n + 3k^2(1 - (-1)^n)(2n + 1)) / 2 + k((7 - (-1)^n)n - 3(-1)^n - 3) / 2 / 3.$$

Прогиб от действия одной вертикальной силы в точке  $C$  также вычисляется по формуле (1) с коэффициентами

$$A_{n,k} = (4n^3 + 3(1 - (-1)^n)n^2 + (5 - 3(-1)^n)n + 3 - 3(-1)^n) / 12,$$

$$C_{n,k} = (2n + (2k + 1)(1 - (-1)^n)) / 4,$$

$$H_{n,k} = ((1 - (-1)^n)(3 + 4k)k^2 + k(7 - (-1)^n) / 2) / 3.$$

#### 4. АНАЛИЗ ПРОГИБА. УСИЛИЯ В СТЕРЖНЯХ И РЕАКЦИИ ОПОР

Рассмотрим случай фермы с заданным пролетом  $L$ , высотой  $H$  и произвольным числом панелей в ригеле, так что

$$a = L / (2n + 2).$$

Аналитическая форма решения позволяет наглядно выявить некоторые его особенности. Зафиксируем также общую нагрузку на ферму по верхнему поясу

$$P_{sum} = (2n + 5)P.$$

Введем обозначение для безразмерного прогиба

$$\Delta' = \Delta EF / (P_{sum} L).$$

На рисунке 5 при  $H = mh = 12m$  и  $L = 100$  м даны три ломаные кривые, имеющие явно выраженный минимум и немонотонно растущие с числом  $n$ . Асимптотику этого роста выявляет следующий предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^2 = H / (8kL).$$

Помимо оценки величины прогиба фермы для проектировщика желательно иметь информацию об усилиях в наиболее сжатых и растянутых стержнях с целью проверки их на устойчивость и прочность. В процессе вывода формул для прогиба программа получала аналитические выражения для усилий во всех стержнях конструкции. В качестве тестируемых выберем по два стержня в верхнем и нижнем поясе ригеля.

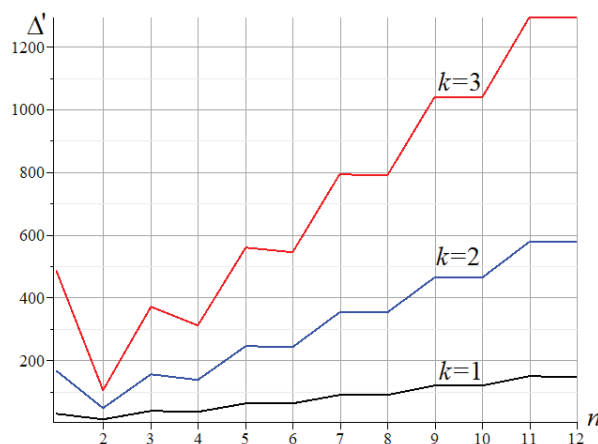


Рисунок 5. Зависимость прогиба от числа панелей.

Совершенно очевидно, что это только некоторые стержни, опасные с точки зрения потери устойчивости или прочности. Полноценный расчет должен включать в себя и другие (в лучшем случае — все) стержни. Формулы для усилия в этих стержнях приводим лишь для примера. Для определения закономерности образования коэффициентов в усилиях стержней потребовалась последовательность расчетов меньшей длины. Как и в процедуре вывода формулы для прогиба, необходимая длина последовательности коэффициентов определяется получением рекуррентного уравнения с физически достоверным решением, тестируемым в численной моде программы на произвольных числах панелей. Индукция по числу  $n$  дает решение, не зависящее от числа  $m$ . Стержни нижнего пояса в середине пролета растянуты:

$$U_1 = P(n^2 - 3)a / (2h), \quad U_2 = P(n^2 - 1)a / (2h),$$

стержни верхнего пояса сжаты:

$$O_1 = -P(n + 2)(n - 1)a / (2h),$$

$$O_2 = -Pn(n + 1)a / (2h).$$

Эти формулы справедливы как при загрузке верхнего так и нижнего пояса. Реакции неподвижных опор зависят от числа панелей

$m=2k$  и при загрузке верхнего пояса имеют вид:

$$Y_A = P(4k + 4 + n(2k + 1)) / 2,$$

$$X_A = Pa(n + 2) / (2h).$$

Реакции симметрично расположенных подвижных шарниров:

$$Y_B = -P(4k - 1 + n(2k - 1)) / 2.$$

Для случая загрузки нижнего пояса эти реакции другие:

$$Y_A = P(2k + 1)n / 2, X_A = Pan / (2h),$$

$$Y_B = -P(n(2k - 1) + 1) / 2.$$

## 5. ВЫВОДЫ

Предложенная схема статически определенной арочной фермы, несмотря на ее внешнюю статическую неопределимость [11], допускает точное аналитическое решение для прогиба в зависимости от числа панелей при различных нагрузках. При этом выявлены случаи кинематической изменяемости конструкции. Решение имеет полиномиальный вид по числам панелей, а ломаные кривые зависимости прогиба от  $n$  обнаруживают как локальные так и глобальные минимумы. Найдена квадратичная асимптотика полученной зависимости. Примененный алгоритм и выведенные формулы могут быть использованы в задачах оптимизации конструкций [12-14]. Обзоры задач для плоских ферм, решенных методом индукции, содержатся в [15-17].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кирсанов М.Н.** Maple и MapleT. Решения задач механики. – СПб.: Лань, 2012. – 512 с.
2. **Кирсанов М.Н.** Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа «butterfly». // Строительная механика и расчет сооружений, 2016, №4, с. 2-5.
3. **Тиньков Д.В.** Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой. // Постулат, 2017, №12.
4. **Kirsanov M.N.** An Inductive Method of Calculation of the Deflection of the Truss Regular Type. // Architecture and Engineering, 2016, No. 3, Vol. 1, pp. 14-17.
5. **Shipaeva A.S.** Calculation of the Deflection of Girder Beam Loaded on the Bottom Flange in the System Maple. // Science Almanac, 2016, No. 5-3(19), pp. 236-239.
6. **Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A.** The Formula for the Deflection of a Truss Loaded at Half-Span by a Uniform load. // Postulat, 2018, No. 3.
7. **Kirsanov M.N.** Analytical Calculation, Marginal and Comparative Analysis of a Flat Girder. // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture, 2016, No. 1(29), pp. 84-105.
8. **Kirsanov M.N.** Evaluation of Spatial Deflection of Coatings with Periodic Structure. // Magazine of Civil Engineering, 2017, No. 8, pp. 58-66.
9. **Kirsanov M.N.** Stress State and Deformation of a Rectangular Spatial Rod Cover. // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture, 2016, No. 3(31), pp. 71-79.
10. **Smirnova A.A., Rakhmatulina A.R.** Analytical Calculation of the Displacement of the Truss Support. // Science Almanac, 2017, No 2-3(28), pp. 275-278.
11. **Астахов С.В.** Вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы под действием нагрузки в середине пролета. // Строительство и архитектура, 2017, Том 5, №2(15), с. 50-54.
12. **Алексейцев А.В.** Эволюционная оптимизация стальных ферм с учетом узло-

вых соединений стержней. // Инженерно-строительный журнал, 2013, №5(40), с. 27-37.

13. **Серпик И.Н., Алексейцев А.В.** Оптимизация металлических конструкций путем эволюционного моделирования. – М.: АСВ, 2012. – 239 с.
14. **Baumann V., Kost V.** Structure Assembling by Stochastic Topology Optimization. // Computers and Structures, 2005, Vol. 83, No. 25-26. pp. 2175-2184.
15. **Тиньков Д.В.** Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций. // Инженерно-строительный журнал, 2015, №5(57), с. 66-73.
16. **Осадченко Н.В.** Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами. // Постулат, 2017, №12, ст. 28, 9 с.
17. **Широков А.С.** Индуктивный вывод зависимости прогиба и смещения опоры арочной фермы от числа панелей в системе Maple. // Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» – GRACOS-17. – Казань: Издво Академии наук Республики Татарстан, 2017, с. 267-272.

## REFERENCES

1. **Kirsanov M.N.** Maple i Maple. Resheniya Zadach Mekhaniki [Maple and Maple. Solutions of Problems of Mechanics]. Saint-Petersburg, Lan, 2012, 512 pages.
2. **Kirsanov M.N.** Analiticheskiy Raschet Balochnoy Fermы s Reshetkoy Tipa “butterfly” [Theoretical Analysis of a Beam Farm With a Butterfly Grid]. // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy, 2016, No. 4, pp. 2-5.
3. **Tinkov D.V.** Raschet Progiba Ploskoy Arochnoy Fermы s Krestobraznoy Reshetkoy [Calculation of the Deflection of a Flat Arched Farm With a Cross-Shaped Grid]. // Postulat, 2017, No. 12.
4. **Kirsanov M.N.** An Inductive Method of Calculation of the Deflection of the Truss Regular Type. // Architecture and Engineering, 2016, No. 3, Vol. 1, pp. 14-17.
5. **Shipaeva A.S.** Calculation of the Deflection of Girder Beam Loaded on the Bottom Flange in the System Maple. // Science Almanac, 2016, No. 5-3(19), pp. 236-239.
6. **Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A.** The Formula for the Deflection of a Truss Loaded at Half-Span by a Uniform load. // Postulat, 2018, No. 3.
7. **Kirsanov M.N.** Analytical Calculation, Marginal and Comparative Analysis of a Flat Girder. // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture, 2016, No. 1(29), pp. 84-105.
8. **Kirsanov M.N.** Evaluation of Spatial Deflection of Coatings with Periodic Structure. // Magazine of Civil Engineering, 2017, No. 8, pp. 58-66.
9. **Kirsanov M.N.** Stress State and Deformation of a Rectangular Spatial Rod Cover. // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture, 2016, No. 3(31), pp. 71-79.
10. **Smirnova A.A., Rakhmatulina A.R.** Analytical Calculation of the Displacement of the Truss Support. // Science Almanac, 2017, No 2-3(28), pp. 275-278.
11. **Astakhov S.V.** Vyvod Formuly Dlya Progiba Vneshne Staticheski Neopredelimoй Ploskoy Fermы pod Deystviyem Nagruzki v Seredine Proleta [The Derivation of the Formula for the Deflection of an Externally Statically Indeterminate Flat Farm Under the Influence of a Load in the Middle of the Span]. // Stroitelstvo i arkhitektura, 2017, Tom 5, No. 2(15), pp. 50-54.
12. **Alekseytsev A.V.** Evolyutsionnaya Optimizatsiya Stalnykh Ferm s Uchetom Uzlovykh Soyedineniy Sterzhney [Evolutionary

- Optimization of Steel Trusses With Allowance for Nodal Connections of Rods]. // *Inzhenerno-Stroitelnyy Zhurnal*, 2013, No. 5(40), pp. 27-37.
13. **Serpik I.N., Alekseytsev A.V.** Optimizatsiya Metallicheskih Konstruktsiy Putem Evolyutsionnogo Modelirovaniya [Optimization of Steel Structures Through Evolutionary Modeling]. Moscow, ASV, 2012, 239 pages.
  14. **Baumann B., Kost B.** Structure Assembling by Stochastic Topology Optimization. // *Computers and Structures*, 2005, Vol. 83, No. 25-26. pp. 2175-2184.
  15. **Tinkov D.V.** Sravnitelnyy Analiz Analiticheskikh Resheniy Zadachi o Progibe Fermennykh Konstruktsiy [Comparative Analysis of Analytical Solutions of the Problem of Deflection of Truss Structures]. // *Inzhenerno-Stroitelnyy Zhurnal*, 2015, No. 5(57), pp. 66-73.
  16. **Osadchenko N.V.** Raschet Progiba Ploskoy Nerazreznoy Sticheski Opredelimoj Fermы s Dvumya Proletami [Calculation of the Deflection of a Flat, Continuous, Statically Determinate Truss With Two Spans]. // *Postulat*, 2017, No. 12, st. 28, 9 p.
  17. **Широков А.С.** Индуктивный вывод зависимости прогиба и смещения опоры арочной фермы от числа панелей в системе Maple. // *Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» – GRACOS-17.* – Казань: Издво Академии наук Республики Татарстан, 2017, с. 267-272.
  18. **Shirokov A.S.** Induktivnyy Vyvod Zavisimosti Progiba i Smeshcheniya Opory Arochnoy Fermы ot Chisla Paneley v Sisteme Maple [Inductive Derivation of the Dependence of Deflection and Displacement of the Arch of the Arch Support on the Number of Panels in the Maple System]. // *Mezhdunarodnyy nauchnyy seminar «Nelineynyye modeli v mekhanike, statistike, teorii polya i kosmologii» – GRACOS-17.* Kazan. Izdatelstvo Akademii nauk Respubliki Tatarstan, 2017, pp. 267-272.
- 
- Кирсанов Михаил Николаевич, профессор, доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский университет «МЭИ», кафедра теоретической механики и мехатроники; 111250, Россия, г. Москва, ул. Красноказарменная, дом 14; тел. +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru.
- Mikhail N. Kirsanov, Professor, Dr.Sc., National Research University “MPEI”, Department of theoretical mechanics and mechatronics; 111250, Russia, Moscow, Krasnokazarmennaya str., 14; tel. +7(495)362-73-14, E-mail: c216@ya.ru.